

E-3717/85

ACADEMIA
REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

LUCRĂRILE
SESIUNII GENERALE
ȘTIINȚIFICE

DIN 2—12 Iunie 1950

EXTRAS

O GENERALIZARE A ECUAȚIEI INTE-
GRALE CU LIMITE VARIABLE
DE SPEȚA A DOUA

DE

PROF. D. V. IONESCU

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

O GENERALIZARE A ECUAȚIEI INTEGRALE CU LIMITE VARIABLE DE SPEȚA A DOUA

DE

PROF. D. V. IONESCU

Comunicare prezentată în ședința din 5 Iunie 1950.

1. Se știe că ecuația integrală lineară de speța a doua a lui Volterra poate fi generalizată, plecând dela ecuația diferențială nelineară

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

și integrând-o. Se obține astfel o ecuație integrală, care este un caz particular al ecuației integrale nelineare

$$(2) \quad y(x) - \int_0^x F(x, s, y(s)) ds = f(x)$$

în care $F(x, s, y)$ și $f(x)$ sunt funcțiuni date, iar $y(x)$ este funcțiunea necunoscută.

Acest procedeu de generalizare și integrare a ecuației integrale (2) au fost date de T. Lalescu.

2. Se știe, însă, că se poate obține ecuația integrală a lui Volterra de speța a doua și ca o generalizare a ecuației diferențiale lineare de ordinul p , luând ca funcțiune necunoscută, derivata de ordinul cel mai înalt.

Aplicând această idee la o ecuație diferențială de ordinul p , nelineară, vom fi conduși în mod natural la o generalizare a ecuației integrale lineare de speța a doua.

Astfel, fie

$$(3) \quad y^{(p)} = F(x, y, y', \dots, y^{(p-1)})$$

o ecuație diferențială nelineară de ordinul p . Ea are o integrală, și numai una, care verifică condițiile lui Cauchy: $y(0) = 0, y'(0) = 0, \dots, y^{(p-1)}(0) = 0$.

Punând

$$y^{(p)}(x) = \varphi(x),$$

avem

$$y^{(r)}(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{p-r-1}}{(p-r-1)!} \varphi(s) ds \quad (r = 0, 1, \dots, p-1).$$

Scriind că $y(x)$ verifică ecuația diferențială (3), avem ecuația integrală

$$(3') \quad \varphi(x) = F \left\{ x, \int_0^x \frac{(x-s)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi(s) ds, \int_0^x \frac{(x-s)^{p-2}}{(p-2)!} \varphi(s) ds, \dots, \int_0^x \varphi(s) ds \right\}$$

Introducând în locul sâmburilor $\frac{(x-s)^{p-1}}{(p-1)!}, \frac{(x-s)^{p-2}}{(p-2)!}, \dots, 1, p$ sâmburi arbitrari $N_1(x, s), N_2(x, s), \dots, N_p(x, s)$ și notând

$$(4) \quad \theta_k(x) = \int_0^x N_k(x, s) \varphi(s) ds \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

suntem conduși la ecuația integrală nelineară

$$(5) \quad \varphi(x) = F[x, \theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_p(x)]$$

care face obiectul acestei lucrări

3. Vom presupune că funcțiunea $F(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$ este continuă când

$$(6) \quad 0 \leq x \leq a \text{ și } |y_k| \leq b \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

iar funcțiunile $N_k(x, s)$, ($k = 1, 2, \dots, p$) sunt continue când

$$(7) \quad 0 \leq x \leq a \text{ și } 0 \leq s \leq x$$

În plus, vom presupune că funcțiunea $F(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$ verifică condiția lui Lipschitz, adică $x, y_1, \dots, y_p$ și $y_1'', \dots, y_p''$ fiind numere din domeniul (6), avem:

$$(8) \quad |F(x, y_1, \dots, y_p) - F(x, y_1', \dots, y_p')| < \sum_{k=1}^p Q_k |y_k - y_k'| \text{ unde}$$

Q_k sunt constante.

Se va nota, mai departe, cu F o margine superioară a lui $|F(x, y_1, \dots, y_p)|$, când x și y_k sunt în domeniul (6), și cu M o margine superioară a sâmburilor $|N_k(x, s)|$, când x și s sunt în domeniul (7).

În aceste condițiuni, integrarea ecuației integrale nelineare (5) se face cu metoda aproximațiilor succesive, punând

$$(9) \quad \varphi_0(x) = F(x, 0, 0, \dots, 0):$$

și

$$(9') \quad \varphi_n(x) = F[x, \theta_{1,n-1}(x), \theta_{2,n-1}(x), \dots, \theta_{p,n-1}(x)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

unde

$$(10) \quad \theta_{kn}(x) = \int_0^x N_k(x, s) \varphi_n(s) ds.$$

Funcțiunile $\varphi_n(x)$ astfel definite sunt continue și dacă se notează cu h cel mai mic număr dintre a și $\frac{b}{MF}$, vom avea pentru $0 \leq x \leq h$

$$|\theta_{k,n}(x)| < b$$

Se demonstrează că seria

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)]$$

este absolut și uniform convergentă, arătând că

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < FM^n Q^n \frac{x^n}{n!}$$

unde

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_p$$

Rezultă că dacă n tinde către infinit, $\varphi_n(x)$ are o limită $\varphi(x)$ funcțiune continuă și se arată că $\varphi(x)$ este soluție a ecuației integrale nelineare (5) și că este unica soluție care să fie continuă.

4. Procedul indicat la nr. 2, se extinde la funcțiuni de n variabile.

De exemplu, pentru $n = 2$, pornind dela ecuația cu derivate parțiale

$$(11) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

și dela integrala ei nulă dealungul axelor Ox și Oy , suntem conduși la ecuația integrală nelineară:

$$(12) \quad \varphi(x, y) = F[x, y; u_1(x, y), \dots, u_p(x, y); v_1(xy), \dots, v_q(xy); w_1(xy), \dots, w_r(xy)]$$

pe care o vom scrie mai scurt:

$$(12') \quad \varphi(x, y) = F[x, y; u_i(x, y); v_k(x, y); w_l(x, y)] \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, q \\ l = 1, 2, \dots, r \end{pmatrix}$$

în care:

$$(I3) \quad \begin{aligned} u_i(x, y) &= \int_0^x \int_0^y A_i(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt \\ v_k(x, y) &= \int_0^y B_k(x, y; t) \varphi(x, t) dt \\ w_l(x, y) &= \int_0^x C_l(x, y; s) \varphi(s, y) ds. \end{aligned}$$

Vom presupune că funcțiunea $F(x, y; u_i; v_k; w_l)$ este continuă, când

$$(I4) \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \quad |u_i|, |v_k|, |w_l| < C \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, q \\ l = 1, 2, \dots, r \end{pmatrix}$$

și vom nota cu F o margine superioară a modului ei în acest domeniu.

De asemenea, vom presupune că sâmburii $A_i(x, y; s, t)$, $B_k(x, y; t)$, $C_l(x, y; s)$ sunt funcțiuni continue când

$$(I5) \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \quad \text{și} \quad 0 \leq s \leq x \quad 0 \leq t \leq y$$

și vom nota cu A, B, C margini superioare ale modulelor lor în acest domeniu.

În fine, vom presupune că funcțiunea $F(x, y; u_i; v_k; w_l)$ satisface la condiția lui Lipschitz, adică $x, y, u'_i, v'_k, w'_l, u''_i, v''_k, w''_l$, fiind numere din domeniul (I3) avem

$$(I6) \quad \begin{aligned} &|F(x, y; u''_i, v''_k, w''_l) - F(x, y; u'_i, v'_k, w'_l)| \\ &< \sum_{i=1}^p P_i |u''_i - u'_i| + \sum_{k=1}^q Q_k |v''_k - v'_k| + \sum_{l=1}^r R_l |w''_l - w'_l| \end{aligned}$$

unde P_i, Q_k, R_l sunt constante.

Integrarea ecuației integrale nelineare (I2') se face cu metoda aproximațiilor succesive punând

$$\varphi_0(x, y) = F[x, y; 0; 0; 0]$$

și

$$\varphi_n(x, y) = F[x, y; u_{i,n-1}(x, y); v_{k,n-1}(x, y); w_{l,n-1}(x, y)]$$

($n = 1, 2, \dots$)

unde

$$\begin{aligned} u_{i,n} &= \int_0^x \int_0^y A_i(x, y; s, t) \varphi_n(s, t) ds dt \\ v_{k,n} &= \int_0^y B_k(x, y; t) \varphi_n(x, t) dt \\ w_{l,n} &= \int_0^x C_l(x, y; s) \varphi_n(s, y) ds \end{aligned}$$

Dacă se notează cu h' un număr mai mic decât a și $\frac{c}{CF}$ și cu h'' un număr mai mic decât a și $\frac{c}{BF}$, h' și h'' fiind supuși și condiției $h' h'' < \frac{c}{AF}$ se arată că pentru $0 \leq x \leq h'$, $0 \leq y \leq h''$, vom avea

$$|u_{l,n}(x, y)| < C, |v_{k,n}(x, y)| < C, |w_{l,n}(x, y)| < c, (n = 1, 2, \dots)$$

se arată apoi că seria

$$\varphi_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x, y) - \varphi_{n-1}(x, y)]$$

este absolut și uniform convergentă, pentru $0 \leq x \leq h'$ și $0 \leq y \leq h''$, astfel că $\varphi_n(x, y)$ va avea o limită $\varphi(x, y)$ funcțiune continuă de x și y .

Această limită $\varphi(x, y)$, este soluția unică a ecuației integrale nelineare (II).

Institutul de Matematici, Cluj

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Можно получить линейное интегральное уравнение второго рода Вольтерра в виде обобщения линейного дифференциального уравнения p -порядка, взяв как неизвестную функцию производную p -порядка.

Применяя этот способ к нелинейному дифференциальному уравнению p -порядка мы приходим к интегральному уравнению (3'), которое можно обобщить, заменяя ядра

$$\frac{(x-s)^{p-1}}{(p-1)!}, \frac{(x-s)^{p-2}}{(p-2)!}, \dots, 1$$

любыми ядрами $N_1(x, s), N_2(x, s), \dots, N_p(x, s)$.

Так мы получаем нелинейное интегральное уравнение (5), где функции $\theta_1(x), \dots, \theta_p(x)$ даны формулами (4).

Будем предполагать функцию $F(x, y_1, \dots, y_p)$ непрерывной области (6) и обозначим через F верхнюю грань $|F(x, y, \dots, y_p)|$ этой области. Предположим также ядра $N_k(x, s)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) непрерывными в области (7) и обозначим через M верхнюю грань их модулей в этой же области. Наконец, предположим, что функция $F(x, y, \dots, y_p)$ удовлетворяет условию Липшица (8), где Q_k — постоянные.

В этих условиях автор доказывает, что интегральное уравнение (5) имеет одно и только одно решение, данное методом последовательных приближений в промежутке $[0, h]$, где h наименьшее из чисел a и $\frac{b}{MF}$.

Можно распространить уравнение (5) к функциям нескольких переменных. Например, для $n = 2$, исходя от уравнения с частными производными (II), приходим к нелинейному интегральному уравнению (12) или (12'), в котором функции $u_i(x, y)$, $v_k(x, y)$, $w_l(x, y)$ даны формулами (13).

RÉSUMÉ

On peut obtenir l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce, comme une généralisation de l'équation différentielle linéaire d'ordre p , en prenant comme fonction inconnue la dérivée d'ordre p .

En appliquant ce procédé à l'équation différentielle non linéaire (3) d'ordre p , on est conduit à l'équation (3') qu'on peut généraliser en remplaçant les noyaux

$\frac{(x-s)^{p-1}}{(p-1)!}, \frac{(x-s)^{p-2}}{(p-2)!}, \dots, 1$, par des noyaux quel-

conques $N_1(x, s), N_2(x, s), \dots, N_p(x, s)$.

On a ainsi l'équation intégrale (5) non linéaire où les fonctions $\theta_1(x), \dots, \theta_p(x)$ sont données par les formules (4).

On suppose la fonction $F(x, y_1, \dots, y_p)$ continue dans le domaine (6) et on désigne par F une borne supérieure du $|F(x, y_1, \dots, y_p)|$ dans ce domaine. On suppose aussi que les noyaux $N_k(x, s)$, ($k = 1, 2, \dots, p$) sont continus dans le domaine (7) et on désigne par M une borne supérieure de leurs modules dans ce domaine. On suppose enfin que la fonction $F(x, y_1, \dots, y_p)$ satisfait à la condition de Lipschitz (8) où les Q_k sont des constantes.

Dans ces conditions on démontre que l'équation intégrale (5) a une solution et une seule qui est donnée par la méthode des approximations successives, dans l'intervalle $(0, h)$, où h est le plus petit des nombres a et $\frac{b}{MF}$.

On peut étendre l'équation intégrale (5) à des fonctions de plusieurs variables. Par exemple, pour $n = 2$, en partant de l'équation aux dérivées partielles (II), on est conduit à l'équation intégrale non linéaire (12) ou (12'), dans laquelle les fonctions $u_i(x, y)$, $v_k(x, y)$, $w_l(x, y)$ sont données par les formules (13).

BIBLIOGRAPHIE

1. T. Lalescu, *Introduction à la théorie des équations intégrales*. Paris 1912, p. 127.