

E-3717/84

ACADEMIA
REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

LUCRĂRILE SESIUNII GENERALE ȘTIINȚIFICE

DIN 2 — 12 IUNIE 1950

EXTRAS

DESPRE O FORMULĂ DE QUADRATURĂ
MECANICĂ

DE
PROF. D. V. IONESCU

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

15.337 74

DESPRE O FORMULĂ DE QUADRATURĂ MECANICĂ

DE

PROF. D. V. IONESCU

Comunicare prezentată în ședința din 5 Iunie 1950.

1. Să considerăm integrala:

$$(1) \quad I = \int_a^b p(x) f(x) dx$$

în care $p(x)$ este o funcțiune dată, finită și integrabilă în intervalul închis și finit (a, b) . Mai presupunem că funcțiunea $p(x)$ este nenegativă în inter-

valul (a, b) și astfel încât integrala $\int_a^b p(x) dx$ să aibă o valoare pozitivă.

Funcțiunea $f(x)$ este presupusă continuă în intervalul (a, b) și cu derivate succesive până la ordinul $2n+i+k$.

Urmând o metodă al cărei principiu este datorit lui J. R a d o n [1] în intervalul (a, b) luăm punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$ arbitrare, astfel ca:

$$(2) \quad a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b,$$

și la intervalele $(a_1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$ atașăm funcțiunile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ integrale ale ecuațiilor diferențiale.

$$(3) \quad \varphi_r^{(2n+i+k)}(x) = (-1)^{i+k} p(x) \quad (r = 1, 2, \dots, n+1)$$

și care satisfac la următoarele condiții:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_r(x_r) &= \varphi_{r+1}(x_r), \quad \varphi_r^{(2n+i+k-2)}(x_r) = \varphi_{r+1}^{(2n+i+k-2)}(x_r), \dots, \varphi_r^{(2n+i+k-1)}(x_r) = \\ &= \varphi_{r+1}^{(2n+i+k-1)}(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

și

$$(5) \quad \varphi_1(a) = \varphi_1'(a) = \dots = \varphi_1^{(n+k-1)}(a) = 0$$

$$(6) \quad \varphi_{n+1}(b) = \varphi_{n+1}'(b) = \dots = \varphi_{n+1}^{(2n+i-1)}(b) = 0$$



Integrala (I) se înlocuiește cu

$$I = (-1)^{i+k} \int_a^x \varphi_{(2n+i+k)}(x) f(x) dx + (-1)^{i+k} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{2n+i+k}(x) f(x) dx + \dots$$

$$\dots + (-1)^{i+k} \int_{x_n}^b \varphi_{n+i}^{(2n+i+k)}(x) f(x) dx$$

și aplicând formula de integrare prin părți, generalizată, se obține:

$$I = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n)$$

$$(7) \quad + A_0 f(a) + A_1 f'(a) + \dots + A_{n+i-1} f^{(n+i-1)}(a)$$

$$+ B_0 f(b) + B_1 f'(b) + \dots + B_{k-1} f^{(k-1)}(b) + R$$

unde

$$(8) \quad C_r = (-1)^{i+k} \left[\varphi_r^{(2n+i+k-1)}(x_r) - \varphi_{r+1}^{(2n+i+k-1)}(x_r) \right] \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

$$(9) \quad A_s = (-1)^{i+k+s-1} \varphi_1^{(2n+i+k-s-1)}(a) \quad (s = 0, 1, \dots, n+i-1)$$

$$(10) \quad B_t = (-1)^{i+k+t} \varphi_{n+1}^{(2n+i+k-t-1)}(b) \quad (t = 0, 1, \dots, k-1)$$

iar

$$(11) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx,$$

$\varphi(x)$ fiind o funcțiune care coincide cu $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_{n+1}(x)$ în intervalele (a, x_1) , (x_1, x_2) , $\dots$, (x_n, b) .

2. Notând

$$(12) \quad \psi(x) = \frac{1}{(2n+i+k-1)!} \left[\int_x^b (u-x)^{2n+i+k-1} p(u) du - \sum_{r=0}^{k-1} C_r \lambda_r (b-x)^{2n+i+k-r-1} \right]$$

unde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ sunt constante arbitrare, avem

$$(13) \quad \varphi_{n+1}(x) = \psi(x)$$

și

$$(13') \quad \varphi_r(x) = \psi(x) - \sum_{j=r}^n k_j \frac{(x_j-x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

Funcțiunile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$, astfel definite, satisfac la ecuațiile diferențiale (3) și la condițiile (4) și (6). Constantele $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, k_1, k_2, \dots, k_n$ se determină astfel ca și condițiile (5) să fie satisfăcute.

Punând:

$$(14) \quad k_j (x_j - a)^n + (b - x_j)^k = \bar{k}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

și

$$(15) \quad p(x) (x - a)^n + (b - x)^k = p_2(x),$$

constantele $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n$ sunt date de ecuațiile:

$$(16) \quad \sum_{r=0}^{k-1} k_r x^r = \int_a^b p_2(x) x^s dx \quad (s = 0, 1, \dots, n-1)$$

iar $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$,

$$(17) \quad \sum_{r=0}^{k-1} C_r \lambda_r (b - a)^{n+s-r} = \int_a^b p(x) (x - a)^{n+s} dx - \sum_{j=1}^n k_j (x_j - a)^{n+s} \quad (s = 0, 1, \dots, k-1)$$

Interpretarea coeficienților k_j este simplă; ei sunt tocmai coeficienții C_j din formula (7).

3. Să privim acum în ecuațiile de mai sus pe $x_1, x_2, \dots, x_n$ ca necunoscute și să ne întrebăm dacă nu este posibil ca funcțiunea $\varphi_1(x)$ să mai satisfacă în punctul a și la condițiile:

$$(18) \quad \varphi_1^{(n+k)}(a) = \varphi_1^{(n+k+1)}(a) = \dots = \varphi_1^{(2n+k-1)}(a) = 0$$

În acest caz, notând:

$$(19) \quad C_j (x_j - a) (b - x_j)^k = C'_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

și

$$(20) \quad p(x)(x-a)(b-x)^k = p_2(x)$$

vedem că necunoscutele C'_j și x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) sunt date de sistemul de ecuații:

$$(21) \quad \sum_{r=1}^n C'_r x_r^s = \int_a^b p_2(x) x^s dx \quad (s = 0, 1, \dots, 2n-1).$$

Aceasta înseamnă că $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile reale, distincte și cuprinse între a și b ale polinomului

$$(22) \quad Q_n(x) = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \\ C_{2n-1} & C_{2n-2} & \dots & C_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n & C_{n-1} & \dots & C \end{vmatrix}$$

$$(23) \quad C_\alpha = \int_a^b p_2(x) x^\alpha dx \quad (\alpha = 0, 1, \dots, 2n-1).$$

După cum se știe, șirul $Q_n(x)$, ($n = 1, 2, \dots$) este un șir de polinoame ortogonale față de funcțiunea $p_2(x)$.

Suntem astfel conduși la formula de quadratură mecanică

$$(24) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n) \\ + A_0 f(a) + A_1 f'(a) + \dots + A_{i-1} f^{(i-1)}(a) \\ + B_0 f(b) + B_1 f'(b) + \dots + B_{k-1} f^{(k-1)}(b) + R$$

care face obiectul acestei comunicări.

În această formulă, coeficienții C_r , A_s , B_t , și restul R sunt dați de formulele (8), (9), (10), și (11) în care însă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului (22).

Este important de observat că în formula (24) toți coeficienții C_r , A_s , B_t sunt exprimați cu ajutorul funcțiunii $\varphi(x)$, egală cu funcțiunile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \dots \varphi_{n+1}(x)$ în intervalele (a, x_1) , $(x_1, x_2) \dots (x_n, b)$ care satisfac la ecuațiile diferențiale (3) și la condițiile (4), (5), (6) și (18). Funcțiunea $\varphi(x)$ este continuă și cu derivate succesive continue până la ordinul $2n + i + k - 2$. Ea păstrează un semn constant în intervalul (a, b) , curba $y = \varphi(x)$ neavând decât un singur maximum sau un singur minimum în intervalul (a, b) . Demonstrația folosește condițiile (4), (5), (6) și (18). Funcțiunea $\varphi(x)$ are derivate de ordinul $2n + i + k - 1$ discontinue în punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$. Salturile corespunzătoare în valoare absolută sunt tocmai coeficienții $C_1, C_2, \dots, C_n$ care sunt pozitivi. În mod precis, avem

$$(25) \quad C_r = (-1)^{i+k+1} \left[\varphi^{(2n+i+k-1)}(x_r+0) - \varphi^{(2n+i+k-1)}(x_r-0) \right] \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

Avem

$$(26) \quad A_s = (-1)^{i+k+s-1} \varphi^{(2n+i+k-s-1)}(a) \quad (s = 0, 1, \dots, i-1)$$

$$(27) \quad B_t = (-1)^{i+k+t} \varphi^{(2n+i+k-t-1)}(b) \quad (t = 0, 1, \dots, k-1)$$

Dacă notăm:

$$M = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

putem să scriem:

$$R = M f^{(2n+i+k)}(\xi),$$

unde ξ este un număr cuprins între a și b .

Formula aceasta se deduce și dintr'o generalizare a metodei lui A. A. Marcov din care deduce formula lui Gauss¹⁾.

4. În general, rădăcinile polinomului $Q_n(x)$ dat de formula (22) sunt iraționale. Atunci, pentru calcule numerice, se pot lua în locul lui $x_1, x_2, \dots, x_n$ valori apropiate raționale $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ și calculul integralei I se va face cu ajutorul formulei (7).

5. Se poate trata pe aceeași cale, cazul când $i=0$ sau $k=0$. Suntem conduși la formule analoage cu formulele (7) și (24).

În fine, în cazul $i=k=0$, suntem conduși la formula de quadratură clasică a lui Gauss, și la restul ei, exprimat în modul de mai sus.

Institutul Matematic, Cluj.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается интеграл (1), где $p(x)$ — данная функция, конечная и интегрируемая в замкнутом и конечном интервале $[a, b]$ не отрицательная в вышеупомянутом интервале и такая, что

интеграл $\int_a^b p(x) dx$ положительный.

Берем отрезок интервала (a, b) точками $x_1, x_2, \dots, x_n$ и частными интервалами $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$, производим соответствие интегральных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ дифференциальных уравнений (3) с условиями (4), (5) и (6).

Таким образом мы приходим к формуле приближенного интегрирования (7), где коэффициенты C_r, A_s, B_t даны формулами (8), (9) и (10) и остаток R дан формулой (11), где $\varphi(n)$ функция, совпадающая с $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ в интервалах $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$.

Функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ даны формулами (12), (13) и (13'), постоянные K_j и A_r даны формулами (14), (15), (15), (17).

Рассматривая $x_1, x_2, \dots, x_n$ как неизвестные их можно определить условиями (18). Приходим к формуле приближенного интегрирования (24), которая является предметом этой статьи и где $x_1, x_2, \dots, x_n$ корни многочлена $Q_n(x)$ (22) и (23).

Функция $\varphi(x)$, находящаяся в выражении остатка R , сохраняет постоянный знак в интервале (a, b) и все коэффициенты C_r, A_s, B_t

¹⁾ Formula generală a fost indicată de Prof. T. Popoviciu în cursul său de « Metode de aproximație », la Universitatea « V. Babeș » din Cluj, în anul 1949—1950.

формулы (24) выражаются при помощи $\varphi(x)$ формулами (25), (26) и (27).

Случай $i = 0$ или $k = 0$ можно рассматривать таким же образом. Случай $i = k = 0$ приводит к известной формуле Гаусса с выражением остатка, данным при помощи функции, аналогичной функции $\varphi(x)$.

RÉSUMÉ

On considère l'intégrale (1) dans laquelle $p(x)$ est une fonction donnée, finie et intégrable dans l'intervalle fermé et fini (a, b) , non négative dans cet intervalle et telle que l'intégrale $p(x)dx$ soit positive. On prend une division de l'intervalle (a, b) par les points $x_1, x_2, \dots, x_n$ et aux intervalles partiels $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$, on fait correspondre les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_{n+1}(x)$ intégrales des équations différentielles (3) avec les conditions (4), (5) et (6).

On est ainsi conduit à la formule de quadrature (7) où les coefficients C_r, A_s, B_t sont donnés par les formules (8), (9), et le reste R est donné par la formule (11) où $\varphi(x)$ est la fonction qui coïncide avec $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_{n+1}(x)$ dans les intervalles $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$.

Les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ sont données par les formules (12), (13), et (13'), les constantes k_j et λ_r étant données par les formules (14), (15), (16) et (17).

En considérant les $x_1, x_2, \dots, x_n$, comme des inconnues, on peut les déterminer en imposant encore les conditions (18). On est conduit à la formule de quadrature (24) qui fait l'objet de cette Note et où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme $Q_n(x)$ (formules (22), (23)).

La fonction $\varphi(x)$ qui figure dans l'expression du reste R garde un signe constant dans l'intervalle (a, b) et tous les coefficients C_r, A_s, B_t de la formule (24) s'expriment à l'aide de $\varphi(x)$ par les formules (25), (26) et (27).

Le cas $i=0$ ou $k=0$ peut se traiter de la même manière. De même le cas $i=k=0$ conduit à la formule classique de Gauss, avec l'expression du reste donnée à l'aide d'une fonction analogue à la fonction $\varphi(x)$.

BIBLIOGRAFIE

- 1 J. Radon, *Restausdrücke bei Interpolations und Quadratur Formeln durch bestimmte Integralen*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 935, 42, s. 389.
- 2 A. A. Markoff, *Differenzenrechnung*. Leipzig 1896. Siebentes Kapitel, S. 80.