

DIE EIGENSCHAFTEN DES ARITHMETISCHEN
INVARIANTKOMPONENTES
(Zusammenfassung)

Diese Mitteilung bringt eine Verallgemeinerung der Begriffe der G.G.T. und K. G. V. durch die Einführung des Begriffes des Invariantkomponentes. Man betrachtet eine Menge M , die bezüglich der Operation $\vee$ eine Halbgruppe F bildet. Es wird vorausgesetzt die eindeutige Faktorisierung der Elemente von M bezüglich der Operation $\vee$. Mit der Hilfe der Halbgruppenoperation kann man in M zwei Operationen $\cup$ und $\cap$ einführen, und dadurch kann man M auch als einen distributiven Verband D betrachten.

Die Invariantkomponenten der Elemente $x_i \in M$ ($i = 1, \dots, n$) sind die Koeffizienten

$$S_k = \bigcup_1^k x_i \quad (k = 1, \dots, n)$$

in der formalen Entwicklung des Polynoms

$$p(x) = \bigcap_1^n (x \cup x_i)$$

Es gelten die Formeln (6), (7) und (8). Aus diesen Formeln kann man die üblichen Formeln bezüglich der G.G.T. und K.G.V. leicht herleiten.

ASUPRA PROBLEMEI POLILOCALE CU NODURI
CONFUNDATE, PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE
LINEARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

de

O. ARAMĂ și D. RIPIANU

§ 1. În această notă, se studiază următoarea problemă. Fiind dată o ecuație diferențială lineară cu coeficienți constanți, de ordinul patru $E(y) = 0$, se cere să se determine în funcție de coeficienții ecuației diferențiale, marginea superioară L a numerelor pozitive λ , care se bucură de proprietatea că oricare ar fi nodurile distincte $x_1 < x_2$ satisfăcând condiția $x_2 - x_1 < \lambda$ și oricare ar fi valorile reale, y_1, y_1', y_2, y_2' ecuația diferențială respectivă să admită o integrală și una singură, care să satisfacă condițiile :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} y(x_1) &= y_1 \\ y'(x_1) &= y_1' \\ y(x_2) &= y_2 \\ y'(x_2) &= y_2' \end{aligned}$$

Lucrarea de față se încadrează în cercetările pe care autorii le fac în cadrul Secției I-a de cercetări teoretice a Institutului de Calcul al Filialei din Cluj a Academiei R. P. R.

Faptul că mulțimea numerelor λ nu este vidă, rezultă de exemplu din lucrarea lui O. Nicoletti [1].

Se disting mai multe cazuri după natura rădăcinilor polinomului caracteristic asociat ecuației diferențiale. În această notă se studiază problema enunțată, pentru cazul când polinomul caracteristic admite două rădăcini reale și distincte și două rădăcini complexe.*)

*) În cazul cîne toate rădăcinile polinomului caracteristic, sunt reale și distincte, se obține că $L = \infty$, ceea ce rezultă din nota [2].

Vom presupune că rădăcinile reale sunt a, b , iar rădăcinile complexe sunt $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$. Folosind o transformare reală de forma:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x &= \mu t \\ y &= e^{\lambda t} z(t) \end{aligned}$$

Ecuatia $E(y) = 0$ se poate transforma într-o ecuație diferențială de același tip $E^*(z) = 0$, al cărei polinom caracteristic să aibe ca rădăcini complexe, numerele i și $-i$. În acest scop este suficient să luăm $\mu = \beta^{-1}$ și $\lambda = \alpha \cdot \beta^{-1}$. Dacă se notează cu L^* , numărul L corespunzător ecuației $E^*(z) = 0$ atunci are lor relația

$$(1.3) \quad L = |\mu| L^* = \frac{L^*}{|\beta|}$$

În cele ce urmează, fără a restrânge generalitatea problemei, se va presupune deci că cele două rădăcini complexe ale polinomului caracteristic asociat ecuației $E(y) = 0$, sunt i și $-i$. Notînd cu a și b rădăcinile reale ale acestui polinom, integrala g-rală se va scrie:

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + C \cos x + D \sin x$$

Scriind condițiile (1.1), se obține un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute A, B, C, D . Pentru ca acest sistem să admită cîte o soluție unică, oricare ar fi vectorul $\{y_1, y_1', y_2, y_2'\}$, este necesar și suficient o determinant format din coeficienții necunoscutelor, să fie diferit de zero. Acest determinant se scrie:

$$(1.4) \quad \Delta(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{ax_1} & e^{bx_1} & \cos x_1 & \sin x_1 \\ ae^{ax_1} & be^{bx_1} & -\sin x_1 & \cos x_1 \\ e^{ax_2} & e^{bx_2} & \cos x_2 & \sin x_2 \\ ae^{ax_2} & be^{bx_2} & -\sin x_2 & \cos x_2 \end{vmatrix}$$

Dezvoltîndu-l după minorii ultimelor două coloane, se obține îndată:

$$\Delta(x_1, x_2) = e^{(a+b)x_1} \{ (1+ab) \sin s (e^{as} - e^{bs}) + (a-b) (e^{as} + e^{bs}) \cos s - (a-b) [1 + e^{(a+b)s}] \}$$

unde s-a notat $s = x_2 - x_1$.

Presupunînd că $x_2 > x_1$, (ceiace întotdeauna se poate realiza printr-o notație adecuată), problema aflării numărului L revine deci la aflarea celei mai mici rădăcini pozitive a următoarei ecuații transcendente, în

$$(1.5) \quad \begin{aligned} f(s) &= (1+ab) (e^{as} - e^{bs}) \sin s + (a-b) [(e^{as} + e^{bs}) \cos s - \\ &- (1 + e^{(a+b)s})] = -\frac{(a-b)}{12} (1+a^2)(1+b^2)s^4 + c_5 s^5 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Această rădăcină va reprezenta numărul căutat L .

În paragrafele ce urmează, prezentăm un studiu al ecuației (1.5), în scopul de a preciza în ce condiții (pentru parametrii a și b), ecuația (1.5) admite (respectiv nu admite) cel puțin o rădăcină reală pozitivă, adică în ce condiții numărul L ce se caută, este finit (resp. infinit). De asemeni în cazul cînd ecuația (1.5) admite rădăcini reale pozitive, se încearcă a preciza poziția celei mai mici dintre aceste rădăcini, care după cum s-a specificat mai sus, reprezintă numărul L .

Se va însemna întotdeauna cu a , cei mai mare dintre rădăcinile reale ale polinomului caracteristic, astfel că $b < a$. Utilizînd la nevoie schimbarea de variabilă $x = -t$, (care lasă neschimbat numărul L , ceiace rezultă din formula (1.3), în care $\mu = -1$), se poate întotdeauna presupune că $a > 0$. Vom distinge trei cazuri după cum $b > 0$ sau $b < 0$, sau $b = 0$. În § 2, § 3 și în § 4, se studiază ecuația (1.5) în cazul $b > 0$; în § 5, se studiază aceiași ecuație în cazul $b < 0$, și în cazul $b = 0$.

Studiul ecuației (1.5) în cazul $b > 0$.

§ 2. În acest paragraf se demonstrează:

Lema 1. Dacă $0 < b < a$ și $ab \geq 1$, atunci pentru orice $s > 0$, are loc inegalitatea strictă $f(s) < 0$, iar dacă $0 < b < a$ și $ab < 1$, atunci inegalitatea $f(s) < 0$ nu se mai menține în general decît numai în intervalul $(0, 2\pi]$, funcția $f(s)$ putînd să aibe rădăcini mai mari ca numărul 2π și oricît de aproape de 2π , pentru valori convenabil alese ale parametrilor a și b .

Demonstrație. Considerăm întii cazul particular $0 < b < a$ și $ab \geq 1$. Pentru a arăta că are loc inegalitatea $f(s) < 0$, oricare ar fi $s > 0$, va fi suficient să observăm că $f(0) = 0$ și apoi să arătăm că are loc $f'(s) < 0$, în intervalul $(0, \infty)$, adică că în acest interval funcția $f(s)$ este descrescătoare.

Un calcul elementar ne arată că

$$(2.1) \quad \operatorname{sgn} f'(s) = \operatorname{sgn} f_1(s)$$

unde s-a notat

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f_1(s) &= e^{-(a+b)s} f'(s) = [b(1+a^2)e^{-bs} - a(1+b^2)e^{-as}] \sin s + \\ &+ [(1+a^2)e^{-bs} - (1+b^2)e^{-as}] \cos s - (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

În baza egalității (2.1) va fi suficient să arătăm că în intervalul $(0, \infty)$ are loc inegalitatea $f_1(s) < 0$.

Demonstrarea inegalității $f_1(s) < 0$ în intervalul $(0, \infty)$ o vom face, arătînd că toate valorile extreme ale funcției continue $f_1(s)$, corespunzătoare intervalului $(0, \infty)$, sunt negative. Aceste valori extreme sunt rădăcinile ecuației

$$(2.3) \quad f_1(s) = (1+a^2)(1+b^2)(e^{-as} - e^{-bs}) \sin s = 0$$

adică numere de forma $s = k\pi$ unde k este un număr întreg pozitiv. Se constată cu ușurință că în intervalul $(0, \infty)$, maximele funcției $f_1(s)$ corespund rădăcinilor de forma $s = 2p\pi$, unde $p = 1, 2, \dots$. Pentru a arăta că funcția $f_1(s)$ este negativă în intervalul $(0, \infty)$, va fi suficient să arătăm că valorile ei maxime $f_1(2p\pi)$, $p = 1, 2, \dots$, sunt negative.

Să notăm cu $f_{1,p}(b)$ funcția de variabilă b , ce se obține înlocuind în expresia lui $f_1(s)$, pe s cu $2p\pi$ și privind parametrul a constant:

$$(2.4) \quad f_{1,p}(b) = f_1(2p\pi) = (1 + a^2)e^{-2b\pi} - (1 + b^2)e^{-2a\pi} - a^2 + b^2 = \\ = a^2(e^{-2b\pi} - 1) + b^2(1 - e^{-2ap\pi}) + e^{-2bp\pi} - e^{-2ap\pi} > 0$$

De aici se obține îndată că

$$(2.5) \quad \frac{d}{db} f_{1,p}(b) = \frac{2}{e^{2bp\pi}} [-p\pi(1 + a^2) + (1 - e^{-2ap\pi}) b e^{2bp\pi}] = \frac{2}{e^{2bp\pi}} \cdot f_{2,p}(b)$$

unde s-a notat cu $f_{2,p}(b)$ funcția:

$$(2.6) \quad f_{2,p}(b) = -p\pi(1 + a^2) + (1 - e^{-2ap\pi}) b e^{2bp\pi}$$

Egalitatea (2.5) ne arată că

$$(2.7) \quad \operatorname{sgn} \frac{d}{db} f_{1,p}(b) = \operatorname{sgn} f_{2,p}(b)$$

Această egalitate ne conduce a studia semnul funcției $f_{2,p}(b)$ în intervalul $(0, a)$. Observăm din (2.6) că funcția $f_{2,p}(b)$ este crescătoare în raport cu variabila b în intervalul $(0, a)$, (întrucât prin ipoteză $a > 0$).

Vom arăta acum că funcția $f_{2,p}(b)$ are o rădăcină și una singură în intervalul $0 < b < a$. Să considerăm în acest scop funcția $f_{3,p}(a)$, definit precum urmează:

$$(2.8) \quad f_{3,p}(a) = f_{2,p}(b) |_{b=a} = -p\pi(1 + a^2) + a(e^{2ap\pi} - 1)$$

Se constată cu ușurință că $\frac{d}{da} f_{3,p}(a) > 0$ pentru $a > 0$ și că $f_{3,p}(0) < 0$, iar $f_{3,p}(1) > 0$ (pentru $p \geq 1$). De aici rezultă că funcția $f_{3,p}(a)$ se anulează o dată și o singură dată în intervalul $0 < a < \infty$. Fie a_p rădăcina ei din intervalul $(0, \infty)$. Evident că $0 < a_p < 1$. Se observă că

$$(2.9) \quad \operatorname{sgn} f_{3,p}(a) = \operatorname{sgn}(a - a_p)$$

Întrucât prin ipoteză avem $0 < b < a$ și $ab \geq 1$, rezultă neapărat că $a > 1$. În acest caz, din formula (2.9) se deduce că $f_{3,p}(a) > 0$, și apoi din formula (2.8) că $f_{2,p}(b) |_{b=a} > 0$. Ținând seama de această inegalitate și apoi de faptul că $f_{2,p}(0) = -pa(1 + a^2) < 0$, precum și de observația că $f_{2,p}(b)$ este crescătoare, rezultă că în intervalul $0 < b < a$, funcția $f_{2,p}(b)$

se anulează o singură dată, pentru o valoare pe care o notăm cu β_p . Ținând seama de aceasta și de (2.7), se obține tabelul nr. 1.

b	0	β_p	a
$f_{2,p}(b)$	$-p\pi(1 + a^2)$	$-$	$+$
$f_{1,p}(b)$	$1 - e^{-2ap\pi}$	$\searrow$	$\nearrow$

Tabelul 1

Să arătăm că $f_{1,p}\left(\frac{1}{a}\right) < 0$. Să considerăm în acest scop funcția $f_{4,p}(a)$, definită precum urmează:

$$(2.10) \quad f_{4,p}(a) = \frac{a^2}{1 + a^2} f_{1,p}\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - e^{-2ap\pi} - a^2(1 - e^{-\frac{2p\pi}{a}}).$$

Se poate arăta că

$$(2.11) \quad \operatorname{sgn} f_{4,p}(a) = \operatorname{sgn}(1 - a)$$

Într-adevăr se observă că

$$f_{4,p}(0) = f_{1,p}(1) = 0, \quad f_{4,p}(\infty) = -\infty$$

Apoi:

$$\frac{1}{2} f'_{4,p}(a) = p\pi(e^{-2p\pi a} + e^{-\frac{2p\pi}{a}}) - a(1 - e^{-\frac{2p\pi}{a}})$$

De aici deducem:

$$\frac{1}{2} e^{\frac{2p\pi}{a}} \cdot f'_{4,p}(a) = 1 + \frac{2p\pi}{a} + 2\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 - e^{\frac{2p\pi}{a}} - 2p^2\pi^2 e^{-2p\pi\left(a - \frac{1}{a}\right)} = \\ = -\left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2p\pi}{a}\right)^n + 2p^2\pi^2 e^{-2p\pi\left(a - \frac{1}{a}\right)}\right] < 0$$

Acestea fiind stabilite, se alcătuiește tabelul 2, în care s-a notat cu α_p rădăcina funcției $f_{4,p}(a)$ din intervalul $(0, \infty)$. Din acest tabel rezultă egalitatea (2.11).

Ținând seama de egalitatea (2.11) rezultă că $f_{4,p}(a) < 0$ iar

a	0	α_p	1	∞
$f'_{4,p}(a)$	$2p\pi \searrow$	0	$\searrow$	$-2p\pi$
$f_{4,p}(a)$	0	$\nearrow$	$f_{4,p}(\alpha_p) \searrow$	0 $\searrow$ $-\infty$

Tabelul 2.

de aici conform relației (2.10), că $f_{1,p}\left(\frac{1}{a}\right) < 0$. Acesta ne arată că $f_{1,p}(b)$ se anulează cel puțin o dată în intervalul $(0, a)$. Din tabelul 1, rezultă că funcția $f_{1,p}(b)$ nu se poate anula decât o singură dată în intervalul $(0, a)$. Notăm cu b_p rădăcina ei din intervalul $(0, a)$. Ținând seama de relația (2.7) și de tabelul 1, rezultă pentru rădăcina b_p a funcției $f_{1,p}(b)$, inegalitatea $b_p < \beta_p$. Cu acestea precizare, tabelul 1 se completează după cum se indică în tabelul 3.

b	0	b_p	β_p	a
$f_{2,p}(b)$	$-p\pi(1 + a^2)$	$-$	$-$	$+$
$f_{1,p}(b)$	$1 - e^{-2ap\pi}$	$\searrow$	0 $\searrow$	$\nearrow$ 0

Tabelul 3

Apoi ținând seama de acest tabel și de inegalitatea $f_{1,p}\left(\frac{1}{a}\right) < 0$, rezultă că $0 < b_p < \frac{1}{a}$. Cum însă $b \geq \frac{1}{a}$ (prin ipoteză), rezultă că $b > b_p$ ($p=1, 2, \dots$), iar din tabelul 3, că $f_{1,p}(b) = f_1(2p\pi) < 0$. Ținând seamă de acest rezultat, precum și de faptul stabilit anterior că valorile maxime ale funcției $f_1(s)$ sunt atinse pentru $s = 2p\pi$ ($p = 1, 2, \dots$), rezultă că funcția continuă $f_1(s)$ ia valori negative în tot intervalul $(0, \infty)$. Atunci conform relației (2.1), rezultă că funcția $f(s)$ este descrescătoare în intervalul $(0, \infty)$ și cum $f(0) = 0$, rezultă afirmația lemei în subcazul $ab \geq 1$.

Considerăm acum cazul $0 < b < a$ și $ab < 1$. Se observă că și în acest caz, formulele (2.1), (2.2), (2.3) se mențin. De asemeni rămâne valabilă constatarea că în intervalul $(0, \infty)$, maximele funcției $f_1(s)$ corespund rădăcinilor ecuației (2.3), care sunt numere de forma $0 = 2p\pi$ ($p = 1, 2, \dots$). Spre deosebire de cazul $ab \geq 1$ tratat anterior, în cazul de față, adică în cazul când $ab < 1$, s-ar putea ca expresia $f_1(2\pi) = f_{1,1}(b)$ să fie pozitivă,

s	0	π	2π
$f'_1(s)$	0	-	0
$f_1(s)$	0	$\searrow$	$\nearrow$
$f(s)$	0	$\searrow$	$\searrow$

Tabelul 4

Subcazul $f_1(2\pi) = f_{1,1}(b) > 0$. Se alcătuieste tabelul 5, în care s_1 reprezintă rădăcina funcției $f_1(s)$ în intervalul $(\pi, 2\pi)$. Ținând seama de

s	0	π	s_1	2π
$f'_1(s)$	0	-	-	0
$f_1(s)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$f(s)$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Tabelul 5

funcția $f_5(a)$ de variabilă a , definită precum urmează:

$$(2.12) \quad f_5(a) = \frac{f(s)}{a-b} = \frac{1+ab}{a-b} (e^{as} - e^{bs}) \sin s + (e^{as} + e^{bs}) \cos s - [1 + e^{(a+b)s}]$$

Fie apoi funcțiile:

$$(2.13) \quad f_6(s) = \lim_{a \rightarrow b} f_5(a) = f_5(a) \Big|_{a=b} = -1 + e^{bs} [2 \cos s + (1+b^2) s \sin s] - e^{2bs}$$

$$f_7(b) = f_6\left(\frac{5}{2}\pi\right) = -1 + \frac{5}{2}\pi(1+b^2)e^{\frac{5}{2}\pi b} - e^{5\pi b}$$

$$f_8(b) = \frac{1}{5\pi}e^{-\frac{5}{2}\pi b}, \quad f'_7(b) = b + \frac{5}{4}\pi(1+b^2) - e^{\frac{5}{2}\pi b}$$

astfel că suntem conduși să considerăm două subcazuri:

Subcazul: $f_1(2\pi) = f_{1,1}(b) \leq 0$. Ținând seamă de relația (2.3) și de faptul că $f(2\pi) < 0$, se deduce din tabelul 4 că $f_1(s) < 0$ și deci că $f(s) < 0$ în intervalul $(0, 2\pi]$.

inegalitatea $f(2\pi) < 0$, se deduce că $f(s) < 0$ în intervalul $(0, 2\pi)$.

Să demonstrăm acumă că funcția $f(s)$ poate avea rădăcini mai mari ca 2π și oricît de aproape de 2π , pentru valori convenabile alese ale parametrilor a și b . Să considerăm în acest scop func-

Evident că:

$$f'_8(b) = 1 + \frac{5}{2}\pi b - \frac{5}{2}\pi e^{\frac{5}{2}\pi b} < 1 + \frac{5}{2}\pi b - e^{\frac{5}{2}\pi b} < 0$$

Se alcătuieste tabelul 6 din care se deduce că pentru $0 < b < b_1$, (din tabel rezultă că rădăcina $b_1 < 1$), funcția $f_6(s)$ are în $\left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$ cel puțin o rădăcină de ordin de multiplicitate fără soț, (dat fiindcă $f_6(2\pi) = -(1 - e^{2b\pi})^2 < 0$ și $f_6\left(\frac{5}{2}\pi\right) > 0$). Dacă se înseamnă cu $2\pi + \beta(b)$, ($\beta > 0$), cea mai mică dintre rădăcinile în chestiune, are loc egalitatea $\beta(0) = 0$, (dat fiindcă $f_6(2\pi) = 0$ pentru $b = 0$). Funcția $\beta(b)$ fiind evident continuă în variabila b , (expresia $f_6(s)$ fiind o funcție continuă de variabila b), înseamnă că pentru $b > 0$ suficient de mic, β poate fi făcut

b	0	$\bar{\beta}$	b_1	1	∞				
$f_8(b)$	$\frac{5\pi-4}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$1+\frac{2}{5}\pi-e^{\frac{5}{2}\pi}<0$	$\searrow$	$-\infty$		
$f_7(b)$	$\frac{5\pi-4}{2}$	$\nearrow$	$f_7(\bar{\beta})$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1+5\pi e^{\frac{5}{2}\pi}-e^{5\pi}<0$	$\searrow$	$-\infty$

Tabelul 6

arbitrar de mic, adică pentru un $s_1 > 2\pi$ fix, oarecare, se poate alege un număr b_2 , ($0 < b_2 < 1$) fix, destul de mic, astfel încît pentru orice b , ($0 < b < b_2 = b_2(s_1)$), să se aibă $2\pi + \beta < s_1$. Cum însă

$$e^{-2bs}f'_6(s) = -2b + e^{-bs} [(-1+b^2)\sin s + 2b\cos s + (1+b^2)s(\cos s + b\sin s)]$$

se obține că

$$\frac{e^{-4b\pi}}{2} f'_6(2\pi) = -b + e^{-2b\pi} (\pi + b + \pi b^2) \neq 0$$

dacă b nu se confundă cu nici una din rădăcinile lui $f'_6(2\pi)$ considerată ca funcție de b . Se poate deci lua pe s_1 , $\left(2\pi < s_1 < \frac{5}{2}\pi\right)$ destul de aproape de

2π , astfel ca pentru $2\pi \leq s \leq s_1$ să se aibă $f'_6(s) \neq 0$ (dat fiind că $f'_6(s)$ este o funcție continuă de variabilele b și s), și deci ca în intervalul $(2\pi, s_1)$, funcția $f_6(s)$ să aibă numai o rădăcină $s = 2\pi + \beta$ de un ordin de multiplicitate fără soț. Alegînd astfel pe s_1 , avem $f_6(s_1) > 0$. Cum $f_5(a)$ este o funcție continuă de variabila a în punctul $a = b$, se poate alege un număr b_3 suficient de mic și satisfăcînd inegalitățile: $1 > b_3 = b_3(s_1) > 0$, astfel încît pentru orice

a și $b < b_2(s_1)$ verificând inegalitățile $0 < b < a < b + b_3$, să se aibe $f_5(a) > 0$ și deci $f(s_1) > 0$. Cum însă $f(2\pi) < 0$, iar $s_1 < 2\pi$, așa cum s-a mai observat în repetate rânduri, putând fi ales oricât de apropiat de 2π , înseamnă că intervalul $[0, 2\pi]$ în care $f(s) < 0$, nu poate fi mărit.

§ 3. În paragrafele 3 și 4, ținând seama de rezultatele deja obținute, se continuă studiul ecuației $f(s) = 0$, în intervalul $[2\pi, \infty)$, căutând să se precizeze mai mult poziția celei mai mici rădăcini pozitive (în cazul când aceasta există). Vom menține și pe mai departe ipoteza că $0 < b < a$.

Considerăm în loc de ecuația $f(s) = 0$, următoarea ecuație echivalentă cu prima și mai comodă pentru expunerea ce urmează:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} F(s) &= -e^{-bs} \cdot f(s) = \\ &= (a-b)(e^{as} + e^{-bs}) - (a-b)[1 + e^{(a-b)s}] \cos s + \\ &\quad + (1+ab)[1 - e^{(a-b)s}] \sin s = 0. \end{aligned}$$

Transcriem această ecuație sub forma

$$(3.2) \quad F(s) = Y(s) - R(s) \sin[s + \alpha(s)] = 0$$

unde

$$(3.3) \quad \begin{cases} Y(s) = (a-b)(e^{as} + e^{-bs}) \\ R(s) = \{(a-b)^2 [1 + e^{(a-b)s}]^2 + (1+ab)^2 [1 - e^{(a-b)s}]^2\}^{1/2} \\ \alpha(s) = \arctg \frac{(a-b)[e^{(a-b)s} + 1]}{(1+ab)[e^{(a-b)s} - 1]} \end{cases}$$

Un calcul elementar ne arată că $\frac{d\alpha}{ds} < 0$, oricare ar fi $s \in (-\infty, \infty)$, adică că $\alpha(s)$ este o funcție descrescătoare în intervalul $(-\infty, \infty)$. Când s variază în intervalul $(0, \infty)$, atunci $\alpha(s)$ descrește de la $\frac{\pi}{2}$ la valoarea $\arctg \frac{a-b}{1+ab} = \gamma$.

Numărul γ satisface evident inegalitățile

$$(3.4) \quad 0 < \gamma < \alpha(s) < \frac{\pi}{2}, \text{ pentru } 0 < s < \infty$$

Să considerăm funcția $Y(s)$ ce figurează în (3.2). Ne propunem întâi să studiem comportarea acestei funcții $Y(s)$ față de factorul de amplitudine $R(s)$ din (3.2). Acest studiu ar putea furniza indicații cu privire la existența și distribuția rădăcinilor ecuației $F(s) = 0$. De exemplu, dacă se va arăta că într-un interval oarecare I , are loc inegalitatea $Y(s) > R(s)$, atunci în acel interval ecuația $F(s) = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

Pentru a studia comportarea mutuală a curbelor $y = Y(s)$ și $y = R(s)$, este suficient să studiem distribuția zerourilor funcției:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} y = \varphi(s) &= Y(s) - R(s) = (a-b)(e^{as} + e^{-bs}) - \\ &\quad \{(a-b)^2 [e^{(a-b)s} + 1]^2 + (1+ab)^2 [e^{(a-b)s} - 1]^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

pentru $s > 0$. Vom demonstra următoarea

Lema 2. Oricare ar fi a și b satisfăcând condiția $0 < b < a$, în intervalul $(0, \infty)$ curba de ecuație $y = \varphi(s)$ transversează axa Os o dată și o singură dată, trecând din semiplanul inferior în semiplanul superior. (fig. 1).

Demonstrație. Se observă că $Y(s) > 0$ și $R(s) > 0$ și deci este suficient să demonstrăm această lemă pentru funcția $\Phi(s) = Y^2(s) - R^2(s)$. Avem:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Phi(s) &= (a-b)^2 e^{2as} + (a-b)^2 e^{-2bs} - \\ &\quad - [(a-b)^2 + (1+ab)^2] e^{2(a-b)s} + 2(1+ab)^2 e^{(a-b)s} - (a-b)^2 - (1+ab)^2 \end{aligned}$$

Va fi suficient să stabilim proprietatea:

Dacă pentru un $s > 0$ are loc inegalitatea $\Phi(s) > 0$, atunci pentru acea valoare s are loc și inegalitatea $\Phi'(s) > 0$.

Într-adevăr, avem:

$$(3.7) \quad \frac{1}{2(a-b)} \frac{d\Phi}{ds} = a(a-b)e^{2as} - b(a-b)e^{-2bs} - \bar{\gamma} e^{2(a-b)s} + (1+ab)^2 e^{(a-b)s}$$

unde $\bar{\gamma} = (1+a^2)(1+b^2)$

Din inegalitatea $\Phi(s) > 0$, rezultă inegalitatea

$$(3.8) \quad \bar{\gamma} e^{2(a-b)s} - (a-b)^2 e^{2as} - (a-b)^2 e^{-2bs} + \bar{\gamma} < 2(1+ab)^2 e^{(a-b)s}$$

Apoi, ținând seama de această inegalitate precum și de (3.7), se obține

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2(a-b)} \frac{d\Phi}{ds} &> a(a-b)e^{2as} - b(a-b)e^{-2bs} - \bar{\gamma} e^{2(a-b)s} + \\ &\quad + \frac{\bar{\gamma}}{2} e^{2(a-b)s} - \frac{(a-b)^2}{2} e^{2as} - \frac{(a-b)^2}{2} e^{-2bs} + \frac{\bar{\gamma}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [(a-b)(a+b)(e^{2as} - e^{-2bs}) - \bar{\gamma} e^{2(a-b)s} + \bar{\gamma}] = \frac{1}{2} \Psi(s) \end{aligned}$$

Fie s_0 cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $\Phi(s) = 0$, rădăcină în care curba de ecuație $y = \Phi(s)$ taie axa Os , trecând din semiplanul inferior în semiplanul superior*). În acest punct în relația (3.9), semnul $>$ se în-

*) Existența unui astfel de rădăcini rezultă din relațiile $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$, $\Phi''(0) = -2(a-b)^2(1-ab)^2 \leq 0$, $\Phi(+\infty) = +\infty$.

locuește cu semnul = întrucât o astfel de schimbare are loc și în relația (3.8) pentru $s = s_0$. Putem deci scrie

$$(3.10) \quad \frac{1}{2(a-b)} \frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s=s_0} = \frac{1}{2} \Psi(s_0)$$

Dar în intervalul $(0, s_0)$, funcția $\Phi(s)$ este nepozitivă prin felul cum s-a ales rădăcina s_0 . Cum însă în punctul s_0 , curba $y = \Phi(s)$ traversează axa Os , trecînd din semiplanul inferior în semiplanul superior, rezultă că $\frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s=s_0} \geq 0$

și conform egalității (3.10), are loc inegalitatea

$$(3.11) \quad \Psi(s_0) \geq 0$$

Vom arăta că curba de ecuație $y = \Psi(s)$, nu taie în intervalul $(0, \infty)$ decît o singură dată axa Os , trecînd din semiplanul inferior în cel superior; de aici ținînd seama de (3.11) va rezulta pentru orice $s > s_0$ inegalitatea $\Psi(s) > 0$ de unde în baza relației (3.9) va rezulta inegalitatea $\frac{d\Phi}{ds} > 0$, și astfel lema va fi demonstrată.

Într-adevăr, se obține îndată că

$$\Psi'(s) = 2a(a^2 - b^2)e^{2as} + 2b(a^2 - b^2)e^{-2bs} - 2(a-b)\gamma e^{2(a-b)s}$$

$$\Psi''(s) = (2a)^2(a^2 - b^2)e^{2as} - (2b)^2(a^2 - b^2)e^{-2bs} - [2(a-b)]^2\gamma e^{2(a-b)s}$$

$$\Psi'''(s) = (2a)^3(a^2 - b^2)e^{2as} + (2b)^3(a^2 - b^2)e^{-2bs} - [2(a-b)]^3\gamma e^{2(a-b)s}$$

$$\Psi'''(s) > 2a\Psi''(s)$$

Din ultima relație se vede că dacă pentru o valoare oarecare $s > 0$, are loc inegalitatea $\Psi''(s) \geq 0$, atunci pentru acea valoare s are loc și inegalitatea $\Psi'''(s) > 0$. De aici rezultă că funcția $\Psi''(s)$ nu poate avea în intervalul $(0, \infty)$ mai mult de o rădăcină; ținînd seama de aceasta precum și de egalitatea $\text{sgn } \Psi''(0) = \text{sgn } \Psi'''(0) = -1$, rezultă că funcția $\Psi''(s)$ are o singură rădăcină pozitivă, trecînd de la valori negative la valori pozitive, atunci cînd s crește de la 0 la ∞ . Mai departe, ținînd seama de egalitatea $\Psi(0) = 0$, precum și de cele constatate anterior cu privire la funcția $\Psi'(s)$, rezultă că funcția $\Psi(s)$ are o rădăcină pozitivă și una singură și ia valori pozitive la dreapta acesteia. Deci, dacă pentru o valoare oarecare $s > 0$, are loc inegalitatea $\Psi(s) \geq 0$, atunci are loc și inegalitatea $\Psi(s+h) > 0$, oricare ar fi numărul $h > 0$. În particular, din inegalitatea (3.11), rezultă conform observației precedente că funcția $\Psi(s)$ ia valori pozitive în intervalul (s_0, ∞) , și mai mult chiar, — că este crescătoare în acest interval. Ținînd seama de aceasta, din inegalitatea (3.9) rezultă că în intervalul (s_0, ∞) , funcția $\Phi(s)$ este crescătoare și ia valori pozitive. Întrucît s-a presupus că s_0 este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației

$\Phi(s) = 0$, rădăcină în care curba respectivă traversează axa Os , rezultă din cele stabilite anterior că curba de ecuație $y = \Phi(s)$ traversează o singură dată axa Os în intervalul $(0, \infty)$, fiind strict crescătoare la dreapta punctului de traversare s_0^{**}). Astfel, lema este complet demonstrată.

Într-o formulare mai sugestivă, lema demonstrată anterior poate fi enunțată precum urmează:

În intervalul $(0, \infty)$, curba (Y) de ecuație $y = Y(s)$ traversează o singură dată curba (R) de ecuație $y = R(s)$; la dreapta punctului de traversare, curba (Y) se situează strict deasupra curbei (R) , (fig. 1).

§ 4. Aplicarea lemei 2 la studiul distribuției rădăcinilor ecuației $f(s) = 0$, în cazul $0 < b < a$.

Să notăm cu M_0 punctul de traversare al curbelor (Y) și (R) , situat la dreapta axei Oy și cu s_0 abscisa acestui punct, (fig. 1). Evident că $s_0 > 0$. Din lema precedentă rezultă că în intervalul (s_0, ∞) , curba (Y) se va situa strict deasupra curbei (R) , iar în intervalul $(0, s_0)$, curba (Y) se va situa sub curba (R) . Ținînd seama de expresia (3.2) a funcției $F(s)$, rezultă din cele de mai sus că în intervalul (s_0, ∞) ecuația $F(s) = 0$ nu va avea nici o rădăcină. Pe de altă parte, din lema 1 rezultă că în intervalul $(0, 2\pi]$, ecuația $F(s) = 0$ nu are nici o rădăcină. Deci în cazul cînd această ecuație admite rădăcini pozitive, atunci neapărat $s_0 > 2\pi$ și aceste rădăcini trebuie să fie situate în intervalul $(2\pi, s_0]$.

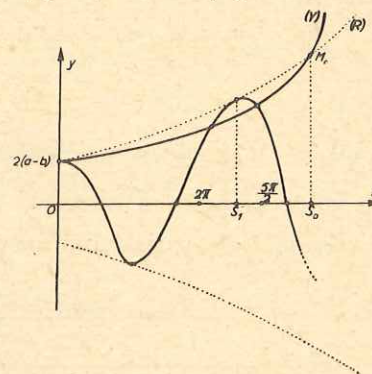


Fig. 1.

Să considerăm acum ecuațiile

$$(4.1) \quad \sigma_k(s) = s + \alpha(s) - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Evident că oricare ar fi $k = 1, 2, \dots$, ecuația $\sigma_k(s) = 0$, are cel puțin o rădăcină reală pozitivă, întrucît $\sigma_k(0) < 0$, iar $\sigma_k(\infty) = \infty$. Să notăm cu s_k o rădăcină pozitivă oarecare a ecuației (4.1). Se verifică cu ușurință că s_k satisface inegalitățile

$$(4.2) \quad 2k\pi < s_k < 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma$$

** S-ar putea ca în intervalul $(0, s_0)$, curba $y = \Phi(s)$ să mai taie axa Os , în puncte în care însă să nu traverseze această axă. Aceste puncte o să reprezinte zerouri multiple ale funcției $\Phi(s)$ și deci ale funcției $\varphi(s)$.

Într-adevăr, ținând seama de inegalitățile (3.4), rezultă că

$$(4.3) \quad \sigma_k(2k\pi) < 0$$

Apoi,

$$\begin{aligned} \sigma_k\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma\right) &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma + \alpha\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \\ &= \alpha\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma\right) - \gamma \end{aligned}$$

și în baza inegalităților (3.4), rezultă că ultima expresie este pozitivă și deci

$$(4.4) \quad \sigma_k\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma\right) > 0$$

Din (4.3) și (4.4) rezultă inegalitățile (4.2).

Referindu-ne la fig. 1, rădăcinile s_k reprezintă abscisele punctelor de tangență a curbelor de ecuație $y = R(s)$ și $y = R(s) \sin[s + \alpha(s)]$.

Fie mai departe ecuațiile

$$(4.5) \quad \sigma_k^*(s) = s + \alpha(s) - (2k+1)\pi = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(4.6) \quad \sigma_k^{**}(s) = s + \alpha(s) - 2k\pi = 0; \quad k = 1, 2, \dots$$

Se poate demonstra întocmai ca mai sus că aceste ecuații au rădăcini respectiv s_k^* , s_k^{**} , satisfăcând inegalitățile

$$(4.7) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} < s_k^* < 2k\pi + \pi - \gamma$$

$$(4.8) \quad (2k-1)\pi + \frac{\pi}{2} < s_k^{**} < 2k\pi - \gamma$$

Referindu-ne la fig. 1, rădăcinile s_k^* și s_k^{**} reprezintă abscisele punctelor de intersecție a curbei de ecuație $y = R(s) \sin[s + \alpha(s)]$ cu axa Os . Evident că între rădăcinile s_k , s_k^* , s_k^{**} , are loc relația

$$(4.9) \quad s_k^{**} < s_k < s_k^*; \quad k = 1, 2, \dots$$

Ne propunem acum să demonstrăm următoarea

Lema 3. Dacă ecuația $F(s) = 0$ are o rădăcină pozitivă $\bar{s}$, care satisface o inegalitate de forma $\bar{s} \geq s_n$, unde s_n reprezintă o rădăcină a ecuației $\sigma_n(s) = 0$, atunci ecuația $F(s) = 0$ admite rădăcini în fiecare din intervalele $[2k\pi, s_k]$ și $[s_k, s_k^*]$, unde $k = 1, 2, \dots, n$.

Demonstrație. Prin ipoteză $F(\bar{s}) = Y(\bar{s}) - R(\bar{s}) \sin[\bar{s} + \alpha(\bar{s})] = 0$ și $\bar{s} > 0$. De aici rezultă inegalitatea $Y(\bar{s}) - R(\bar{s}) \leq 0$. De aici, ținând seama de lema 2, rezultă că $\bar{s} \leq s_0$, unde prin s_0 s-a notat abscisa punctului situat la dreapta axei Oy , în care curbele (Y) și (R) se traversează. Tot din lema 2 rezultă că în intervalul $(0, s_0)$ și deci și în subintervalul $(0, \bar{s}]$, are loc inegalitatea $Y(s) - R(s) \leq 0$. Această inegalitate va fi satisfăcută în particular pentru $s = s_k$, unde $k = 1, 2, \dots, n$, întrucît $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < \dots < s_n \leq \bar{s}$. Putem deci scrie inegalitățile

$$(4.10) \quad Y(s_k) - R(s_k) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ținând seama de faptul că s_k este o rădăcină a ecuației $\sigma_k(s) = 0$, adică că s_k satisface relația $s_k + \alpha(s_k) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, rezultă că

$$(4.11) \quad F(s_k) = Y(s_k) - R(s_k) \sin[s_k + \alpha(s_k)] = Y(s_k) - R(s_k)$$

Din (4.10) și (4.11) deducem

$$(4.12) \quad F(s_k) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Pe de altă parte, ținând seama de expresia (3.1) a funcției $F(s)$, avem:

$$(4.13) \quad F(2k\pi) = (a-b) [e^{2ak\pi} + e^{-2bk\pi} - 1 - e^{2(a-b)k\pi}]$$

Vom arăta că această expresie este pozitivă pentru $k = 1, 2, \dots$. Într-adevăr, utilizînd expresia (1.5) a funcției $f(s)$, se deduce cu ușurință egalitatea

$$(4.13_1) \quad f(2k\pi) = (a-b) (e^{2ak\pi} - 1) (1 - e^{2bk\pi})$$

și de aici că

$$(4.14) \quad \operatorname{sgn} f(2k\pi) = -\operatorname{sgn} b$$

Întrucît s-a presupus $b > 0$, rezultă din egalitatea precedentă că $f(2k\pi) < 0$, pentru $k = 1, 2, \dots$. Ținînd acum seama de relația (3.1), rezultă inegalitatea

$$(4.15) \quad F(2k\pi) > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Din inegalitățile (4.12) și (4.15) rezultă că ecuația $F(s) = 0$ admite cel puțin o rădăcină în intervalul $(2k\pi, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Apoi ținînd seama de (4.12) precum și de faptul că $F(s_k^*) = Y(s_k^*) > 0$ rezultă că ecuația $F(s) = 0$ admite rădăcini reale în fiecare din intervalele $[s_k, s_k^*)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Cu aceasta, lema este demonstrată.

Consecință. Din lema precedentă și din lema 1 rezultă că oricare ar fi a și b satisfăcînd inegalitățile $0 < a < b$, dacă ecuația $f(s) = 0$ admite rădăcini reale pozitive, atunci notînd cu r_m cea mai mică dintre ele, au loc inegalitățile

$$2\pi < r_m \leq s_1$$

unde s_1 este rădăcina ecuației $\sigma_1(s) = 0$ din (4.1).

Se poate obține îndată o delimitare mai comodă însă mai puțin bună decât cea dată mai sus, — dacă se ține seamă de (4.2).

Astfel se obține delimitarea

$$2\pi < r_m < \frac{5\pi}{2} - \gamma$$

$$\text{unde } \gamma = \arctg \frac{a-b}{1+ab}$$

Observări. O condiție suficientă ca ecuația $f(s) = 0$ să aibe rădăcini reale pozitive este ca $s_0 \geq s_1$, adică ținând seamă de lema 2 ca $\Phi(s_1) \leq 0$, unde s_1 reprezintă cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $\sigma_1(s) = 0$. Din figura 1 și din inegalitatea $2\pi < \gamma_m$ se vede că o condiție suficientă ca ecuația $f(s) = 0$ să nu aibe rădăcini reale pozitive, este ca $s_0 < 2\pi$, adică ținând seama de lema 2, ca $\Phi(2\pi) > 0$. A fortiori ecuația $f(s) = 0$ nu va avea rădăcini reale pozitive, dacă $\Phi(6) > 0$. Dacă se ține seamă de expresia (3.6) a funcției $\Phi(s)$, această ultimă condiție se scrie:

$$\Phi(6) = g(a, b) = (a-b)^2 e^{12a} + (a-b)^2 e^{-12b} - [(a-b)^2 + (1+ab)^2] e^{12(a-b)} + 2(1+ab)^2 e^{6(a-b)} - (a-b)^2 - (1+ab)^2 > 0$$

$$\text{Un calcul simplu ne arată că } g|_{a=b} = \frac{\partial g}{\partial a}|_{a=b} = 0, \text{ și că } \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}|_{a=b} = 2(e^{12b} + e^{-12b}) - 144b^2(1 + \frac{1}{2}b^2) - 76$$

Dacă se presupune că $b > \frac{1}{2}$, atunci $\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}|_{a=b} > 0$. Rezultă în definitiv că ori care ar fi $b > \frac{1}{2}$, va exista un interval de forma $(b, b + \epsilon)$, astfel încât dacă a este cuprins în acest interval, atunci $g(a, b) > 0$ și deci funcția $f(s)$ să nu aibe rădăcini reale pozitive.

În concluzie, ținând seama de enunțurile lemelor 1 și 3, precum și de consecința acestora din urmă, se poate enunța următoarea

Teorema 1. În cazul $0 < b < a$ și $ab \geq 1$, ecuația $f(s) = 0$ nu are nici o rădăcină reală pozitivă, de unde rezultă că în acest caz $L = \infty$.

În cazul $0 < b < a$ și $ab < 1$, ecuația $f(s) = 0$ poate avea rădăcini reale pozitive. În cazul când ea admite astfel de rădăcini, atunci notînd cu r_m pe cea mai mică dintre ele, are loc inegalitatea $2\pi < r_m \leq s_1$, unde s_1 este cea mai mică rădăcină reală pozitivă a ecuației $\sigma_1(s) = 0$ din (4.1). Pentru valori convenabil alese ale parametrilor a și b , rădăcina r_m poate fi oricît de aproape de numărul 2π . Rezultă deci că în cazul când L este finit, el satisface neapărat inegalitățile $2\pi < L \leq s_1$, putînd însă să ia valori oricît de aproape de numărul 2π , pentru valori convenabil alese ale parametrilor a și b .

§ 5. Studiul ecuației $f(s) = 0$ în cazul $b < 0$.

După cum s-a menționat la sfîrșitul paragrafului 1, putem presupune ca $a > 0$. Vom demonstra următoarea

Lema 4. Dacă $b < 0 < a$, atunci funcția $f(s)$ din formula (1.5), se anulează în intervalul $[0, \infty)$ pentru o infinitate de valori $s = \tau_n$, $n = 1, 2, \dots$ care sunt astfel încît

$$(5.1) \quad \tau_0 = 0; \quad n\pi < \tau_n < (n+1)\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

iar în intervalul (τ_n, τ_{n+1}) , are loc egalitatea

$$\operatorname{sgn} f(s) = (-1)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstratia acestei leme se poate face alcătuiind tabloul de variație al funcției $f(s)$ în intervalul $[0, \infty)$. În acest scop observăm întîi că relația (2.1) se menține și în cazul $b < 0 < a$. Din egalitatea (2.3) rezultă că valorile extreme ale funcției $f_1(s)$ în intervalul $(0, \infty)$, corespund unor numere de forma $s = k\pi$ unde $k = 1, 2, \dots$; pentru valori $a = 2p\pi$, $p = 1, 2, \dots$ funcția $f_1(s)$ ia valori maxime, iar punctele $s = (2p+1)\pi$, $p = 1, 2, \dots$, constituie pentru această funcție, puncte de minim. Să cercetăm acum semnul acestor valori extreme ale funcției $f_1(s)$.

Obținem îndată

$$(5.2) \quad f_1(2p\pi) = (1+a)^2 e^{-2bp\pi} - (1+b^2) e^{-2ap\pi} - a^2 + b^2 = \\ = a^2 (e^{-2bp\pi} - 1) + b^2(1 - e^{-2ap\pi}) + e^{-2bp\pi} - e^{-2ap\pi} > 0$$

Se arată cu ușurință că

$$(5.3) \quad f_1[(2p+1)\pi] < 0 \text{ pentru } p = 0, 1, 2, \dots$$

Într-adevăr, să notăm cu $f_{9,p}(b)$, funcția definită precum urmează:

$$f_{9,p}(b) = f_1[(2p+1)\pi] = -[(1+a^2) e^{-(2p+1)\pi b} - (1+b^2) e^{-(2p+1)\pi a}] - (a^2 - b^2)$$

Avem

$$f'_{9,p}(b) = (2p+1)\pi(1+a^2) e^{-(2p+1)\pi b} + 2b[1 + e^{-(2p+1)\pi a}] \\ f''_{9,p}(b) = -(2p+1)^2\pi^2(1+a^2) e^{-(2p+1)\pi b} + 2[1 + e^{-(2p+1)\pi a}] \\ f'''_{9,p}(b) = (2p+1)^3\pi^3(1+a^2) e^{-(2p+1)\pi b} > 0$$

Considerăm acum funcția de variabila a :

$$f_{10,p}(a) = f'_{9,p}(b)|_{b=0} = -(2p+1)^2\pi^2(1+a^2) + 2[1 + e^{-(2p+1)\pi a}]$$

Aceasta este evident descrescătoare cînd variabila a crește dela 0 la ∞ . Dar $f_{10,p}(0) = 4 - (2p+1)^2\pi^2 < 0$. De aici rezultă că $f_{10,p}(a) < 0$, pentru $a \geq 0$. Se deduce dar din tabelul 7 că $f_1[(2p+1)\pi] < 0$ pentru $p = 0, 1, 2, \dots$ ceea ce demonstrează relația (5.3)

Apoi din (4.14) avem :

$$(5.4) \quad \operatorname{sgn} f(2p\pi) = -\operatorname{sgn} b$$

b	$-\infty$			0
$f_{9,p}^{(3)}(b)$	+	+	+	+
$f_{9,p}''(b)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	< 0
$f_{9,p}'(b)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	> 0
$f_{9,p}(b)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-(1+2a^2) + e^{-(2p+1)\pi a}$	< 0

Tabelul 7.

Întrucît verifică condițiile (5.1), iar în intervalul (τ_n, τ_{n+1}) , are loc egalitatea $\operatorname{sgn} f(s) = \operatorname{sg}(-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

În cele ce urmează vom căuta să precizăm mai mult poziția rădăcinilor reale pozitive ale ecuației $f(s) = 0$, în cazul considerat adică în cazul $b < 0$ (și $a > 0$).

Lema 2'. Dacă $a > 0$, $b < 0$ atunci în întreg intervalul $(0, \infty)$, are loc inegalitatea $\Phi(s) < 0$, adică $Y(s) < R(s)$, (fig. 2).

Demonstrație. Se observă că și în acest caz $\Phi(0) = 0$. Apoi notînd $-b = \beta$ ($\beta > 0$), avem :

$$-\frac{\Phi'(s)}{2(a+\beta)} = [(a+\beta)^2 + (1-a\beta)^2]e^{2(a+\beta)s} - a(a+\beta)e^{2as} - \beta(a+\beta)e^{2\beta s} - (1-a\beta)^2e^{(a+\beta)s} = \Psi(s)$$

Prin calcule elementare se obține

$$\Psi(0) = 0; \quad \left. \frac{d\Psi}{ds} \right|_{s=0} = (a+\beta)(1+a\beta)^2 > 0$$

De aici se deduce că în vecinătatea punctului $s = 0$ și la dreapta acestuia funcția $\Psi(s)$ este pozitivă. Apoi ținînd seamă de expresia acestei funcții, se observă că dacă pentru o valoare oarecare s_0 are loc inegalitatea $\Psi(s_0) \geq 0$ atunci are loc și inegalitatea $\Psi(s_0 + h) > 0$, oricare ar fi numărul $h > 0$. Într-adevăr, se constată îndată că dacă $\Psi(s_0) \geq 0$, atunci are loc inegalitatea $\Psi(s_0 + h) > e^{2(a+\beta)h} \cdot \Psi(s_0)$, de unde rezultă proprietatea enunțată.

Dar s-a arătat că $\Psi(s)$ este pozitivă într-o vecinătate a originii. Rezultă că $\Psi(s)$ este pozitivă în $(0, \infty)$ și deci că $\frac{d\Phi}{ds}$ este negativă în acest interval. Deoarece $\Phi(0) = 0$, rezultă că $\Phi(s)$ este negativă în întreg intervalul $(0, \infty)$.

Ținînd seamă de relațiile (2.1), (2.3), (5.2), (5.3) și (5.4), precum și de relația evidentă $f[(2p+1)\pi] < 0$, se alcătuieste tabelul 8 din care rezultă că ecuația $f(s) = 0$ are o infinitate de rădăcini $s = \tau_n$, care sunt ast-

Vom distinge trei subcazuri după cum produsul $|ab|$ este mai mic, mai mare sau egal cu unitatea. Considerăm întîi

Subcazul 1. $b < 0 < a$ și $|ab| < 1$

În acest subcaz, formulele (3.1), (3.2), (3.3) rămîn valabile. Funcția $\alpha(s)$ va continua să rămînă descrescătoare în $(0, \infty)$.

Lema 5. În ipoteza că $b < 0 < a$ și $|ab| < 1$, ecuația $f(s) = 0$ are o infinitate de rădăcini reale pozitive. În fiecare din intervalele (s_k^{**}, s_k) și (s_k, s_k^*) , $k = 1, 2, \dots$, se află cel puțin cîte o rădăcină reală, (fig. 2).

Demonstrația este asemănătoare cu cea dată în cazul lemei 3. Anume, ținînd seama de semnificația numerelor s_k, s_k^*, s_k^{**} , precum și de expresia (3.2) a funcției $F(s)$, se obține :

$$F(s_k) = Y(s_k) - R(s_k) < 0; \quad F(s_k^{**}) = Y(s_k^{**}) > 0; \quad F(s_k^*) = Y(s_k^*) > 0, \text{ etc.}$$

Lema 6. În ipoteza că $b < 0 < a$ și $|ab| < 1$, cea mai mică rădăcină reală pozitivă a ecuației $f(s) = 0$ este situată în intervalul (s_1^{**}, s_1) , unde s_1^{**} și s_1 sunt respectiv rădăcinile ecuațiilor (4.6) și (4.1). De aici rezultă că în cazul considerat, numărul L satisface inegalitățile $s_1^{**} < L < s_1$, sau mai puțin precis, inegalitățile $\frac{3\pi}{2} < L < \frac{5\pi}{2} - \gamma$, unde $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}$ (evident că $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$).

Demonstrație. Vom arăta întîi că în ipoteza mai generală $b < 0$, funcția $s + \alpha(s)$ ce intervine ca argument al funcției sinus în formula (3.2), este crescătoare în raport cu variabila independentă s , în intervalul $(-\infty, \infty)$. Într-adevăr, un calcul elementar ne arată că

$$\frac{d}{ds} [s + \alpha(s)] = 1 + \frac{d\alpha}{ds} = \frac{(1+ab)^2 [e^{(a-b)s} - 1]^2 + (a-b)^2 [e^{(a-b)s} + 1]^2 - 2(1+ab)(a-b)^2 e^{(a-b)s}}{(1+ab)^2 [e^{(a-b)s} - 1]^2 + (a-b)^2 [e^{(a-b)s} + 1]^2}$$

Întrucît prin ipoteza $b < 0 < a$, rezultă că $1 + ab < 1$, și deci că

$$(5.5) \quad \frac{d}{ds} [s + \alpha(s)] > 0, \quad (-\infty < s < \infty)$$

Din această constatare rezultă că ecuațiile (4.1), (4.5) și (4.6) au cîte o singură rădăcină respectiv în intervalele $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma)$

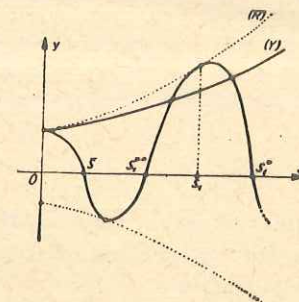


Fig. 2.

$\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi - \gamma\right)$ și $\left((2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi - \gamma\right)$. Aceste rădăcini au fost notate respectiv cu s_k, s_k^*, s_k^{**} . Să mai considerăm ecuația

$$(5.6) \quad \bar{\sigma}(s) = s + \alpha(s) - \pi = 0$$

Se observă ținând seamă de expresia funcției $\alpha(s)$ din (3.3), că

$$\bar{\sigma}(0) = \alpha(0) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} < 0$$

$$\bar{\sigma}(\pi) = \pi + \alpha(\pi) - \pi > 0$$

Cum $\bar{\sigma}(s)$ este o funcție crescătoare în raport cu s , conform inegalității (5.5), rezultă că ecuația $\bar{\sigma}(s)$ admite o rădăcină și una singură $\bar{s}$, satisfăcând inegalitățile

$$(5.7) \quad 0 < \bar{s} < \pi^*)$$

Referindu-ne la figura 2, și ținând seamă de forma ecuației (5.6), precum și de faptul că funcția $R(s)$ din (3.3) este crescătoare în raport cu s , se constată că rădăcina $\bar{s}$ corespunde primului punct de intersecție situat la dreapta originii, a curbei $y = R(s) \cdot \sin[s + \alpha(s)]$ cu axa Os . Se constată apoi, ținând seama de faptul că funcția $s + \alpha(s)$ este crescătoare, — că dacă $s \in (\bar{s}, s_1^{**})$, atunci $\pi < s + \alpha(s) < 2\pi$ și deci că funcția $y = R(s) \cdot \sin[s + \alpha(s)]$, ia valori negative, în intervalul $(\bar{s}, s_1^{**})$. Din figura 2, se constată că în acest interval, diferența $Y(s) - R(s) \sin[s + \alpha(s)]$ va fi pozitivă și ținând seamă de (3.2), — că în intervalul $(\bar{s}, s_1^{**})$ are loc inegalitatea strictă $f(s) < 0$. Pe de altă parte, din lema 4, rezultă că și în intervalul $(0, \pi)$, funcția $f(s)$ ia valori negative. Cum însă $0 < \bar{s} < \pi$, după cum ne arată inegalitățile (5.7), rezultă în definitiv că în intervalul $(0, s_1^{**})$ funcția $f(s)$ nu se anulează, luând valori negative. De aici și din lema 5 rezultă că cea mai mică rădăcină reală pozitivă a ecuației $f(s) = 0$, rădăcină pe care am notat-o cu r_m , satisface inegalitățile

$$(5.8) \quad s_1^{**} < r_m < s_1$$

și ținând seama de inegalitățile (4.2) și (4.8), rezultă că

$$(5.9) \quad \frac{3\pi}{2} < r_m < \frac{5\pi}{2} - \gamma$$

unde $\gamma = \arctg \frac{a-b}{1+ab}$ (evident că $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$)

*) Ținând seamă de faptul că funcția $\alpha(s)$ descrește dela $\frac{\pi}{2}$ la valoarea γ , atunci cînd s crește dela 0 la ∞ , se poate îndată arăta că rădăcina $\bar{s}$, satisface ineg. mai precisă $\frac{\pi}{2} < \bar{s} < \pi$

s	0	π	s_1	τ_1	2π	s_2	τ_2	3π	$\dots$	$2p\pi$	s_{2p}	τ_{2p}	$(2p+1)\pi$	s_{2p+1}	τ_{2p+1}	$(2p+2)\pi$	$\dots$
$f_1(s)$	0	$-$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$\dots$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$\dots$
$f_1(s)$	0	$\nearrow$	$f_1(\pi) \nearrow 0$	$\nearrow$	$f_1(2\pi) \nearrow 0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$f_1(3\pi) \dots f_1(2p\pi) \nearrow 0$	$\nearrow$	$f_1[(2p+1)\pi] \nearrow 0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$f_1[(2p+2)\pi]$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+$	$\dots$
$f(s)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\dots$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\dots$

Tabelul 8

s	0	π	s_1	2π	s_2	τ_2	3π	$\dots$	$2p\pi$	s_{2p}	τ_{2p}	$(2p+1)\pi$	s_{2p+1}	τ_{2p+1}	$(2p+2)\pi$	$\dots$
$f_1(s)$	0	$-$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$\dots$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0
$f_1(s)$	0	$\nearrow$	$f_1(\pi) \nearrow 0$	$\nearrow$	$f_1(2\pi) \nearrow 0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$f_1(3\pi) \dots f_1(2p\pi) \nearrow 0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\dots$
$f(s)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\dots$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\dots$

Tabelul 9

Observare. Referindu-ne la lema 5, putem restrînge mai mult intervalele (s_k^{**}, s_k) , $k = 1, 2, \dots$, în care ecuația $f(s) = 0$ admite cîte o rădăcină. Astfel se poate cu ușurință arăta că rădăcina ecuației $f(s) = 0$, cuprinsă în intervalul (s_k^{**}, s_k) este de fapt situată în intervalul mai restrîns $(s_k^{**}, 2k\pi)$. Întrădevăr, să numerotăm rădăcinile pozitive ale ecuației $f(s) = 0$, dela stînga spre dreapta și să considerăm rădăcina de ordin $2k - 1$. Fie ea τ_{2k-1} . Conform lemei 4, această rădăcină satisface inegalitățile

$$(5.10) \quad (2k - 1)\pi < \tau_{2k-1} < 2k\pi$$

Pe de altă parte, din lema 5, rezultă că această rădăcină satisface inegalitățile

$$(5.11) \quad s_k^{**} < \tau_{2k-1} < s_k$$

Din compararea inegalităților (5.10) și (5.11), rezultă inegalitățile

$$(5.12) \quad s_k^{**} < \tau_{2k-1} < 2k\pi$$

Din (4.2) rezultă că $2k\pi < s_k$ și deci că intervalul $(s_k^{**}, 2k\pi)$ este un subinterval propriu al intervalului (s_k^{**}, s_k) .

Astfel de exemplu, a treia rădăcină pozitivă a ecuației $f(s) = 0$ se va situa în intervalul $(s_2^{**}, 4\pi)$, sau mai puțin precis, în intervalul $\left(3\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi\right)$, etc.

Subcazul 2 $b < 0 < a$ și $|ab| > 1$

În acest subcaz, formulele (3.1) și (3.2) rămîn valabile iar formula (3.3) trebuie modificată astfel:

$$(5.13) \quad \alpha(s) = \pi + \arctg \frac{(a-b)[1 + e^{(a-b)s}]}{(1+ab)[e^{(a-b)s} - 1]}$$

Funcția $\alpha(s)$ va fi în acest subcaz crescătoare, întrucît derivata ei în raport cu variabila s este pozitivă în intervalul $(-\infty, \infty)$. Cînd variabila s crește dela 0 la ∞ , funcția $\alpha(s)$ va crește dela $\frac{\pi}{2}$ la valoarea $\pi + \gamma = \pi + \arctg \frac{a-b}{1+ab}$. Se observă că oricare ar fi $s \in (0, \infty)$, avem:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha(s) < \pi - |\gamma|$$

Enunțurile lemelor 2' și 5, se păstrează cu singura modificare că rădăcinile s_k , s_k^{**} și s_k^* , se vor situa respectiv în intervalele

$$\left(2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - |\gamma|\right), 2k\pi\right), \left((2k-1)\pi + |\gamma|, 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right), \\ \left(2k\pi + |\gamma|, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

De asemeni rămîne valabilă inegalitatea (5.5), precum dealtfel s-a specificat și anterior. Folosindu-ne de faptul că ecuația (5.6) admite și în acest subcaz o rădăcină și una singură $\bar{s}$, care satisface inegalitățile (5.7), se pot reuni rezultatele enunțate în lemele 4 și 5, precum urmează:

Lema 6. În ipoteza $b < 0 < a$ și $|ab| > 1$, cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $f(s) = 0$, este situată în intervalul (s_1^{**}, s_1) , unde s_1^{**} și s_1 reprezintă rădăcinile ecuațiilor (4.6) și (4.1), de aici rezultă că în cazul considerat, numărul L satisface inegalitățile $s_1^{**} < L < s_1$, sau mai puțin precis, inegalitățile $\pi + |\gamma| < L < 2\pi$, unde $\gamma = \arctg \frac{a-b}{1+ab}$.

Întocmai ca în subcazul precedent, se pot aduce unele precizări referitoare la poziția celorlalte rădăcini pozitive ale ecuației $f(s) = 0$.

Subcazul 3. $b < 0 < a$ și $|ab| = 1$.

În acest subcaz, în locul ecuației $f(s) = 0$, considerăm următoarea ecuație, echivalentă, care se obține îndată din (3.1)

$$(5.14) \quad f^*(s) = -\left(a + \frac{1}{a}\right)^{-1} e^{\frac{1}{a}s} f(s) = e^{as} + e^{\frac{1}{a}s} - (1 + e^{(a+\frac{1}{a})s}) \cdot \cos s = \\ = Y^*(s) - R^*(s) \cos s$$

unde s-a notat $Y^*(s) = e^{as} + e^{\frac{1}{a}s}$ iar $R^*(s) = 1 + e^{(a+\frac{1}{a})s}$. Observăm că $Y^*(0) = R^*(0) = 2$. Apoi pentru orice $s \in (0, \infty)$, avem:

$$\frac{dY^*}{ds} = a e^{as} + \frac{1}{a} e^{\frac{1}{a}s} < \left(a + \frac{1}{a}\right) e^{\max\{a, \frac{1}{a}\}s} < \left(a + \frac{1}{a}\right) e^{(a+\frac{1}{a})s} = \frac{dR^*}{ds}$$

Rezultă deci că pentru orice $s \in (0, \infty)$ are loc relația

$$(5.15) \quad 0 < Y^*(s) < R^*(s)$$

Din (5.14) și (5.15) rezultă îndată că ecuația $f(s) = 0$ are o rădăcină cuprinsă în intervalul $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, de unde, în baza lemei 4 rezultă că cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $f(s) = 0$ este situată în intervalul $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Putem deci enunța următoarea

Lema 6''. În ipoteza $b < 0 < a$ și $|ab| = 1$, cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $f(s) = 0$, se situează în intervalul $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. De aici rezultă că în cazul considerat, numărul L satisface inegalitățile

$$\frac{3\pi}{2} < L < 2\pi$$

Observare. Din (5.14) se constată că rădăcinile pozitive ale ecuației $f(s) = 0$, sînt situate respectiv în intervale de forma $\left(2k\pi - \frac{2}{\pi}, 2k\pi\right)$ și $\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 1, 2, \dots$. Aceste intervale separă rădăcinile.

Cazul $b = 0$, $a > 0$.

Se constată că inegalitățile (5.2), (5.3), se mențin și în cazul $b = 0$, dat fiind că $f_1[(2p+1)\pi] = -(1 + 2a^2 - e^{-(2p+1)\pi a}) < 0$. Se deduce din (4.13₁) că $f(2p\pi) = 0$, din (1.5) că $f[(2p+1)\pi] < 0$ iar din (5.2) și (5.3) respectiv inegalitățile $f_1(2p\pi) > 0$, pentru $p = 1, 2, \dots$ și $f_1[(2p+1)\pi] < 0$ pentru $p = 0, 1, 2, \dots$. Cu aceste date, și cu relațiile (2.1) și (2.3) se alcătuiește tabelul 9, din care se deduce că ecuația $f(s) = 0$ are ca rădăcini numerele $2n\pi$ și $s = \tau_{2n}$, ($2n\pi < \tau_{2n} < (2n+1)\pi$; $n = 1, 2, \dots$). De aici rezultă următoarea

Lema 6. În ipoteza $b = 0$, $a > 0$, cea mai mică rădăcină reală pozitivă a ecuației $f(s) = 0$ este egală cu 2π ; de aici rezultă că în acest subcaz are loc egalitatea $L = 2\pi$.

Observare. Se poate arăta utilizînd metode asemănătoare cu cele folosite în subcazurile precedente, că rădăcinile τ_{2n} , $n = 1, 2, \dots$, ale ecuației $f(s) = 0$ sînt cuprinse respectiv în intervalele (s_n, s_n^*) , unde s_n și s_n^* sînt rădăcinile reale ale ecuațiilor (4.1) respectiv (4.5). Se constată îndată că pentru $s > 0$, are loc inegalitatea $\frac{d\alpha}{ds} < 0$, ceea ce arată că dacă variabila s crește de la 0 la ∞ , atunci funcția $\alpha(s)$ descrește de la valoarea $\frac{\pi}{2}$ la valoarea

$\gamma = \arctg a$. Ținînd seamă de aceasta, se constată că rădăcinile s_n și s_n^* satisfac respectiv inegalitățile (4.2) și (4.7), în care s-a luat $k = n$. Aceasta ne arată că intervalul (s_n, s_n^*) , în care se află rădăcina τ_{2n} , este un veritabil subinterval al intervalului $(2n\pi, (2n+1)\pi)$.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Nicoletti. Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie. Atti della R. Acc. Sc. Torino 33 (1897—1898), pp 746—759.
2. O. Aramă. Asupra unor determinanți. (Comunicare prezentată la Soc. Științelor Matem. și Fizice R.P.R., Filiala Cluj, dec. 1956).

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С СОВПАДАЮЩИМИ УЗЛАМИ, ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

(Краткое содержание)

В настоящей статье рассматривается линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами четвертой степени, $E(y) = 0$, характеристический многочлен которого допускает два вещественных и различных корня и два комплексных, и делается попытка определить верхнюю границу L положительных чисел λ имеющих следующее свойство: при любых различных узлах x_1 и x_2 удовлетворяя условию $0 < x_2 - x_1 < \lambda$ и при любых вещественных значениях y_1, y_1', y_2, y_2' рассматриваемое дифференциальное уравнение допускает единственный интеграл, который удовлетворяет условию (1.1).

Предполагая, что корнями характеристического многочлена являются a, b , (вещественные) и $i, -i$, (что всегда можно осуществить), вытекает, что искомое число L , (в случае если оно конечное) — меньший положительный корень уравнения (1.5).

Во второй части статьи исследуется природа и распределение корней этого уравнения.

SUR UN PROBLÈME POLYLOCAL AUX NOEUDS CONFONDUS, POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

(Résumé)

On considère dans cette note des équations différentielles linéaires à coefficients constants du quatrième ordre, $E(y) = 0$, dont les polynômes caractéristiques admettent deux racines réelles et distinctes et deux racines complexes et l'on tente de déterminer la borne supérieure L des nombres positifs λ , lesquels jouissent de la propriété suivante: quels que soient les noeuds distincts x_1 et x_2 satisfaisant à la condition $0 < x_2 - x_1 < \lambda$ et quelles que soient les valeurs réelles y_1, y_1', y_2, y_2' , l'équation différentielle considérée admettra une intégrale et une seule qui satisfasse à la condition (1.1). En supposant que les racines du polynôme caractéristique sont a, b , (réelles) et $i, -i$ (ce qui peut toujours se réaliser), on obtient ce résultat que le nombre cherché L (au cas où il est fini) est la plus petite racine positive de l'équation (1.5). Dans la seconde partie de la note on étudie la nature et la distribution des racines de cette équation.