

SUR QUELQUES CLASSES DE SURFACES RÉGLÉES DE L'ESPACE
LOBATCHEVSKI—BOLYAI

(Résumé)

L'étude s'occupe des surfaces droites des cônes à sommet asymptotique de l'espace Lobatchevski—Bolyai, des surfaces dont les génératrices forment des angles constants avec un plan, des surfaces réglées pouvant être développées sur un plan et des plus importantes propriétés de toutes celles-là. L'auteur démontre que les surfaces réglées de l'espace Lobatchevski—Bolyai pouvant être développées se composent de parties appartenant à deux types. Les directrices voisines du premier type s'intersectent dans les points de la courbe de support, tandis que celles du deuxième type sont les cas-limites des superparallèles. L'auteur définit la ligne de striction des surfaces pouvant être développées et il démontre que les asymptotiques de la courbe de support et de la ligne de striction sont communes.

Dans la deuxième partie il démontre que dans l'espace Lobatchevski—Bolyai il y a des droites à deux transversales normales. De cette façon l'affirmation comme quoi „il n'y a point de quadrilatères non-plans ayant seulement des angles droits” est équivalente à l'axiome d'Euclide.

Finalement l'auteur démontre que le théorème de projection sur une droite est un théorème absolu.

DESPRE POLINOAMELE LUI CEBÎŞEV ALE
MUÎTIMILOR FINITE DE PUNCTE DIN PLAN (III)

de

G. CĂLUGĂREANU

Să notăm cu E o mulțime finită formată din N puncte c_v , $v = 1, 2, \dots, N$. Notînd cu $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ un polinom oarecare de gradul n în z , normat prin condiția ca termenul său de gradul n în z să aibă coeficientul 1, să formăm *media ponderată* de ordinul $2q$

$$(1) \quad J_{2q}(\mu) = \left(\sum_{v=1}^N \mu_v |P(c_v)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}}$$

unde numerele μ_v verifică condițiile $\sum_{v=1}^N \mu_v = 1$; $\mu_v \geq 0$, $v = 1, 2, \dots, N$.

Într-o notă¹ apărută în 1949 am considerat media simetrică ce corespunde cazului $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_N$. Notînd atunci cu j_{2q} minimul mediei J_{2q} cînd coeficienții $a_1, a_2, \dots, a_n$ variază independent luînd valori complexe oarecare, am arătat că există un singur polinom $P_q(z)$ pentru care minimul j_{2q} este atins și, gradul n rămînînd fix, avem

$$\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(z) = T_n(z; E), \quad \lim_{q \rightarrow \infty} j_{2q} = M_n = \max_{z \in E} |T_n(z; E)|$$

unde $T_n(z; E)$ este polinomul Cebîșev corespunzător mulțimii E .

Pe baza acestei proprietăți am arătat în aceeași notă că polinomul $T_n(z; E)$ se poate pune sub forma specială

$$(2) \quad T_n(z; E) = \frac{\sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_n} (z - c_{v_1})(z - c_{v_2}) \dots (z - c_{v_n}) |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}{\sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_n} |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}$$

¹ G. Călugăreanu, *Asupra polinoamelor lui Cebîșev ale mulțimilor plane mărginite și închise* (II). Buletinul științific Acad. R.P.R., T. II. 1950, p. 7.

Aci numerele K_v , $v=1, 2, \dots, N$ sînt nenegative, iar $V(\)$ reprezintă determinantul Vandermonde al numerelor scrise în paranteză. Sumațiile se extind la toate valorile $v_i = 1, 2, \dots, N$.

În cele ce urmează vom indica rezultatele ce se obțin considerînd, în locul mediei simetrice de ordinul $2q$, o medie ponderată de forma (1).

Urmînd întocmai metoda utilizată la punctul 2 din nota citată, vom determina polinomul $P_q(z)$ care face minimă media ponderată $J_{2q}(\mu)$, anulînd derivatele parțiale ale sumei $\sum \mu_v P^q(c_v) \overline{P^q(c_v)}$ în raport cu coeficienții a_v . Avem

$$\sum_{v=1}^N \mu_v P^q(c_v) \overline{P^{q-1}(c_v)} \overline{c_v}^{n-k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Tratînd acest sistem de ecuații întocmai ca și în cazul mediei simetrice, găsim că polinomul $P_q(z)$ satisface acum ecuația funcțională

$$(3) \quad P(z) = \frac{\sum \mu_{v_1} \mu_{v_2} \dots \mu_{v_n} |P(c_{v_1}) \dots P(c_{v_n})|^{2p-2} (z - c_{v_1})(z - c_{v_2}) \dots (z - c_{v_n}) |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}{\sum \mu_{v_1} \mu_{v_2} \dots \mu_{v_n} |P(c_{v_1}) \dots P(c_{v_n})|^{2p-2} |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}$$

Se observă că în cazul $p = 1$, deci cînd se pleacă de la media pătratică ponderată

$$J_2(\mu) = \left(\sum_{v=1}^N \mu_v |P(c_v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

formula (3) determină polinomul $P_{(\mu)}(z)$ sub forma

$$(4) \quad P_{(\mu)}(z) = \frac{\sum \mu_{v_1} \mu_{v_2} \dots \mu_{v_n} (z - c_{v_1})(z - c_{v_2}) \dots (z - c_{v_n}) |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}{\sum \mu_{v_1} \mu_{v_2} \dots \mu_{v_n} |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}$$

stabilind și unicitatea lui. În plus, se vede că $P_{(\mu)}(z)$ are forma specială (3) pe care o ia și polinomul Cebîșev $T_n(z; E)$. Însă, pe cînd în formula (3) constantele K_v au valori determinate univoc, afară de un factor pozitiv arbitrar, de un sistem algebric a cărui formație a fost indicată în nota citată, în formula (4) constantele μ_v sînt cele ce apar în media patrată ponderată $J_2(\mu)$.

Se pune problema de a caracteriza sistemul de valori $\{\mu_v\}$ care corespund egalității $P_{(\mu)}(z) = T_n(z; E)$. (În adevăr, în formula (2) putem impune constantelor K_v condiția $\sum_{v=1}^N K_v = 1$). Vom arăta că aceasta este posibil în cazul cînd E este o mulțime „de la Vallée—Poussin” E_{VP} , adică o mulțime astfel că avem pentru orice punct $c_v \in E$, $|T_n(c_v; E)| = M_n$.

În adevăr, avem

$$j_2^2(\mu) = \min_{a_n, \dots, a_1} \sum_{v=1}^N \mu_v |P(c_v)|^2 \leq \sum_{v=1}^N \mu_v |T_n(c_v; E)|^2 \leq M_n^2$$

deci $j_2(\mu) \leq M_n$ pentru orice mulțime finită E și orice sistem $\{\mu_v\}$. Să notăm $j_2 = \max_{\{\mu_v\}} j_2(\mu) \leq M_n$. Avem, pentru orice sistem $\{\mu_v\}$

$$\sum_{v=1}^N \mu_v |P_{(\mu)}(c_v)|^2 = j_2^2(\mu)$$

iar pentru $\mu_v = K_v$, deoarece $P_{(K)}(z) = T_n(z; E)$,

$$j_2^2(K) = \sum_{v=1}^N K_v |T_n(c_v; E)|^2 = M_n^2 \text{ deci } j_2(K) = M_n = j_2'$$

în cazul cînd E este o mulțime E_{VP} .

Așa dar, în cazul unei mulțimi E_{VP} , determinarea polinomului $T_n(z; E)$ și a numărului M_n revine la următoarea problemă normală de maximum legat. Pentru a evita inegalitățile $K_v \geq 0$ să punem $K_v = h_v^2$. Avem

$$j_2^2(h) = \sum_{v=1}^N h_v^2 \left| \frac{\sum h_{v_1}^2 \dots h_{v_n}^2 (c_v - c_{v_1}) \dots (c_v - c_{v_n}) |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_n})|^2}{\sum h_{v_1}^2 \dots h_{v_n}^2 |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_n})|^2} \right|^2$$

Deoarece $j_2' = M_n$, determinarea valorii M_n revine la aceea a maximumului funcției $j_2^2(h)$, care e rațională în variabilele $h_1, \dots, h_n$ cu legătura $\sum h_v^2 = 1$. Apoi $\{h_v^2\}$ fiind un sistem convenabil de valori corespunzătoare acestui maxim, punînd $K_v = h_v^2$ în formula (2), obținem polinomul Cebîșev $T_n(z; E)$ corespunzător mulțimii E .

De altfel, condiția $j_2' = M_n$ caracterizează mulțimile E_{VP} . În adevăr, în cazul unei mulțimi E pentru care avem $|T_n(c_v; E)| < M_n$ în unele puncte $c_v \in E$, vom avea $\sum \mu_v |T_n(c_v; E)|^2 = M_n^2 - \alpha$, unde $\alpha > 0$ și inegalitățile (5) ne arată că $j_2^2(\mu) \leq M_n^2 - \alpha$, deci $j_2 < M_n$.

Catedra de teoria funcțiilor
Universitatea „V. Babeș”

О МНОГОЧЛЕНАХ ЧЕБЫШЕВА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ПЛОСКОСТИ (III).

(Краткое содержание)

Возвращаясь к методу, использованному в прежней статье (I) автор исследует свойства многочлена $P(z)$, делающий минимальной весенную среднюю (I), где $P(z) = z + \dots$ многочлен степени n с произвольными коэффициентами, а c_v , $v = 1, 2, \dots, N$ образует конечное множество точек плоскости E . Указывается, что многочлен P единственный и в случае $q = I$ он совпадает с многочленом Чебышева $T_n(z; E)$, для подходящего

выбора постоянных. Определение этих постоянных так, чтобы получить $P(z) = T(z; E)$ относится к обычной задаче максимума со связью когда E является Валле-Пуссенским множеством E т. е. множеством для которого имеется $|T^n(c_v; E)| = M_n$ для каждого $c_v \in E$. Автор выводит характеристику множеств E .

SUR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEV DES ENSEMBLES FINIS DE POINTS DU PLAN (III)

(Résumé)

En reprenant la méthode utilisée dans la note antérieure (1) de l'auteur, on étudie les propriétés du polynôme $P(z)$ qui rend minima la moyenne pondérée (1), où $P(z) = z^n + \dots$, polynôme du degré n en z à coefficients arbitraires, et où c_v , $v = 1, 2, \dots, N$ forme un ensemble E fini de points du plan. On montre que le polynôme P est unique, et que dans le cas $q=1$ il coïncide avec le polynôme de Tchebychev $T_n(z; E)$, pour un choix convenable des constantes μ_v . La détermination de ces constantes de façon à avoir $P_1(z) \equiv T_n(z; E)$ revient à un problème normal de maximum avec une liaison dans le cas où E est un ensemble de Ch. de la Vallée-Poussin E_{vp} , c'est à dire un ensemble pour lequel on a $|T_n(c_v; E)| = M_n$ pour tout $c_v \in E$. On en déduit une caractérisation des ensembles E_{vp} .

SUPRAFETELE DE CURBURA PROIECTIVĂ NULĂ

de

TIBERIU MIHĂILESCU

Unei suprafețe din spațiul proiectiv cu trei dimensiuni, raportată la un reper asimptotic, i se asociază o formă diferențială patratică invariantă numită forma asimptotică.

Curbura acestei forme patratică binare este un invariant proiectiv finit care se numește curbura proiectivă a suprafeței.

Suprafețele a căror curbura proiectivă este nulă au un mare grad de generalitate.

Prezentăm, în această notă, două proprietăți caracteristice ale acestor suprafețe.

1.

Se consideră o suprafață neriglată (S), definită ca mulțime a punctelor M ale căror coordonate proiective față de un reper proiectiv fix sînt funcțiuni analitice de două argumente

$$X_i = X_i(t_1, t_2) \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

care nu sînt soluții ale unei aceleiași ecuații Pfaff de forma

$$dX + \omega X = 0$$

ω fiind o formă Pfaff.

Argumentele t_1, t_2 nu sînt definite decît în afară de o substituție reversibilă

$$t_i = t_i(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \quad (i = 1, 2)$$

Unui punct arbitrar A_0 al suprafeței i se asociază un reper proiectiv local format cu punctul A_0 , cu punctul A_3 în care prima dreaptă a lui Wilczynski intersectează quadrica lui Lie asociată punctului A_0 și cu punctele A_1, A_2 comune celei de a doua drepte a lui Wilczynski și tangentelor asimptotice.