

FORMULA LUI BOOLE

de

D. V. IONESCU

1. Se cunoaște formula de cuadratură a trapezului

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + \int_a^b \varphi_1(x) f''(x) dx$$

unde $\varphi_1(x)$ este integrala ecuației diferențiale $\varphi_1''(x) = 1$, care se anulează în punctele a și b . Curba $y = \varphi_1(x)$ este simetrică față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$.

Mai general, dacă $p(x)$ este o funcție integrabilă și pozitivă în intervalul $[a, b]$, putîndu-se anula în punctele a și b și dacă curba $y = p(x)$ este simetrică față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$, avem formula

$$(2) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = A [f(a) + f(b)] + \int_a^b \varphi_1(x) f''(x) dx,$$

unde $\varphi_1(x)$ este integrala ecuației diferențiale $\varphi_1''(x) = p(x)$ care se anulează în punctele a și b . Curba $y = \varphi_1(x)$ este simetrică față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$, avem $\varphi_1(x) < 0$, în intervalul (a, b) , iar coeficientul A este dat de formula

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b (s-a) p(s) ds$$

Fie $f(x)$ o funcție care are derivate succesive în intervalul $[a, b]$ pînă la ordinul $2n+2$, derivata $f^{(2n+2)}(x)$ fiind continuă în acest interval. Aplicînd la integrala din membrul al doilea al formulei (1) formula (2) și repetînd apoi de mai multe ori această operație, se obține formula de cuadratură

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = A_0 [f(a) + f(b)] + A_1 [f'(a) + f'(b)] + \dots \\ + A_n [f^{(2n)}(a) + f^{(2n)}(b)] + \int_a^b \varphi_{n+1}(x) f^{(2n+2)}(x) dx$$

Funcția $\varphi_{n+1}(x)$ din această formulă este integrala ecuației diferențiale $\varphi_{n+1}^{(2n+2)}(x) = 1$, care satisface la condițiile

$$(4) \quad \varphi_{n+1}(a) = \varphi_{n+1}'(a) = \dots = \varphi_{n+1}^{(2n)}(a) = 0 \\ \varphi_{n+1}(b) = \varphi_{n+1}'(b) = \dots = \varphi_{n+1}^{(2n)}(b) = 0$$

Se arată că funcția $\varphi_{n+1}(x)$ este dată de formula

$$(5) \quad \varphi_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{2n+2}}{(2n+2)!} + B_1 \frac{(x-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots + B_{n+1} \frac{x-a}{1!}$$

unde coeficienții $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ sînt dați de sistemul de ecuații liniare.

$$(5') \quad B_1 \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} + B_2 \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + B_{n+1} \frac{b-a}{1!} = - \frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ B_1 \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + B_n \frac{b-a}{1!} = - \frac{(b-a)^{2n}}{(2n)!} \\ \dots \dots \dots B_1 \frac{b-a}{1!} = - \frac{(b-a)^2}{2!}$$

Se arată că curba $y = \varphi_{n+1}(x)$ este simetrică față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$

și că $\varphi_{n+1}(x)$ are semnul lui $(-1)^{n+1}$ în intervalul (a, b) .

Coeficienții $A_0, A_1, \dots, A_n$ din formula de cuadratură (3) se leagă de coeficienții $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ din formula (5) prin relațiile

$$A_0 = -A_1, A_1 = -B_2, \dots, A_n = -B_{n+1}$$

2. Dacă în formula de cuadratură (3) se înlocuiește $f(x)$ cu $F'(x)$, se obține formula lui Boole [1].

$$(6) \quad F(b) - F(a) = A_0 [F'(a) + F'(b)] + A_1 [F''(a) + F''(b)] + \dots \\ + A_n [F^{(2n+1)}(a) + F^{(2n+1)}(b)] + \int_a^b \varphi_{n+1}(x) F^{(2n+3)}(x) dx$$

Este important de observat că formula lui Boole s-a obținut ca o consecință a formulei de cuadratură a trapezului și că pe această cale s-a determinat și restul ei.

3. Procedul de a se obține formula (3) se poate aplica integralei

$$\int_a^b p(x) f(x) dx,$$

unde $p(x)$ este o funcție integrabilă și pozitivă în intervalul $[a, b]$ putîndu-se anula în punctele a și b și care este astfel încît curba $y = p(x)$ este simetrică față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$. Se obține formula de cuadratură

$$(7) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = A_0 [f(a) + f(b)] + A_1 [f'(a) + f'(b)] + \dots \\ + A_n [f^{(2n)}(a) + f^{(2n)}(b)] + \int_a^b \varphi_{n+1}(x) f^{(2n+2)}(x) dx$$

unde $\varphi_{n+1}(x)$ este integrala ecuației diferențiale $\varphi_{n+1}^{(2n+2)}(x) = p(x)$ care satisface la condițiile (4).

Șirul $\{\varphi_n(x)\}$ poate fi definit prin recurență în modul următor. Avem

$$(8) \quad \varphi_1''(x) = p(x) \\ \varphi_1(a) = 0, \varphi_1(b) = 0$$

și în general

$$(9) \quad \varphi_{n+1}''(x) = \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(a) = 0, \varphi_{n+1}(b) = 0$$

pentru $n = 1, 2, \dots$

Se demonstrează că $|\varphi_n(x)| \rightarrow 0$ în mod uniform în intervalul (a, b) cînd $b-a < 4\sqrt{\frac{3}{5}}$.

4. Să notăm cu R_n restul din formula (7), adică

$$R_n = \int_a^b \varphi_{n+1}(x) f^{(2n+2)}(x) dx$$

Dacă $R_n \rightarrow 0$, cînd $n \rightarrow +\infty$, atunci seria cu termenul general

$$A_n [f^{(2n)}(a) + f^{(2n)}(b)]$$

este convergentă și putem scrie

$$(10) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [f^{(2n)}(a) + f^{(2n)}(b)]$$

Avem următoarea teoremă: dacă funcția $f(x)$ are derivate de orice ordin în intervalul $[a, b]$ și dacă derivatele de ordin par $f^{(2n)}(x)$ sînt astfel încît $|f^{(2n)}(x)| < M$ pentru orice $x \in [a, b]$ și $n > N$, iar $b-a < 4\sqrt{\frac{3}{5}}$, atunci avem formula (10).

Ca aplicație să presupunem în formula (10) $p(x) = 1$, și $f(x) = F'(x)$ Avem următoarea teoremă: dacă funcția $F(x)$ are derivate de orice ordin

în intervalul $[a, b]$ și dacă derivatele de ordin impar $F^{(2n+1)}(x)$ sînt astfel încît $|f^{(2n+1)}(x)| < M$, pentru orice $x \in [a, b]$ și $n > N$, iar $b - a < 4\sqrt{\frac{3}{5}}$ atunci din formula lui Boole se deduce seria lui Boole.

$$F(b) - F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [F^{(2n+1)}(a) + F^{(2n+1)}(b)]$$

5. Seria lui Boole se poate scrie sub forma

$$(11') \quad F(b) - F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+2} [F^{(2n+1)}(a) + F^{(2n+1)}(b)]$$

Se arată că coeficienții $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ sînt coeficienții din dezvoltarea funcției $\operatorname{tg} u$ după puterile lui u . Se știe că aceștia sînt legați de numerele lui Bernoulli, astfel încît în seria lui Boole (11') avem

$$(12) \quad \lambda_n = (-1)^n \frac{4^{2n+2} - 2^{2n+2}}{(2n+2)!} B_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

unde B_n sînt numerele lui Bernoulli.

§ 2. Formulă analoagă cu formula lui Boole.

6. Să considerăm integrala

$$\int_a^b p(x) f(x) dx$$

unde $p(x)$ este o funcție care îndeplinește același condiții ca și funcția $p(x)$ de la No. 1, iar $f(x)$ este o funcție cu derivate succesive în intervalul $[a, b]$, pînă la ordinul $4n$, derivata $f_n^{(4n)}(x)$ fiind continuă în acest interval.

În acest caz avem formula de cuadratură care generalizează formula lui Simpson

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = A f(a) + C f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A f(b) + \int_a^b \varphi_1(x) f^{(4)}(x) dx$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide cu funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ definite în intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ și care sînt integralele ecuațiilor diferențiale

$$(14) \quad \varphi_1^{(4)}(x) = p(x), \quad \varphi_2^{(4)}(x) = p(x)$$

și satisface la condițiile

(14')

$$\varphi_1(a) = 0, \quad \varphi_1'(a) = 0, \quad \varphi_1''(a) = 0$$

$$\varphi_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi_1\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \varphi_2'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi_1'\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \varphi_2''\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi_1''\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\varphi_2(b) = 0, \quad \varphi_2'(b) = 0, \quad \varphi_2''(b) = 0$$

Se demonstrează că $\varphi(x) < 0$ în intervalul (a, b) și că curba $y = \varphi(x)$ este simetrică față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$.

Coeficienții A și C sînt dați de formulele

(15)

$$A = \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - s\right)^2 p(s) ds, \quad C = \frac{8}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (s-a)(b-s) p(s) ds$$

La integrala din membrul al doilea al formulei (13) se poate aplica din nou aceeași formulă de cuadratură, și se repetă această operație de mai multe ori. Se obține formula de cuadratură

$$(16) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} [A_k f^{(4k)}(a) + C_k f^{(4k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_k f^{(4k)}(b)] + \int_a^b \varphi_n(x) f^{(4n)}(x) dx$$

care este analoagă cu formula (7).

În această formulă funcția $\varphi_n(x)$ se determină prin recurență utilizînd proprietățile funcției $\varphi(x)$ din formula (13); coeficienții A_k și C_k se determină utilizînd formulele (15).

Se demonstrează că șirul de funcții $\{\varphi_n(x)\}$ este uniform convergent în intervalul $[a, b]$ și are limita zero dacă $b - a < 2\sqrt[4]{72}$.

Dacă restul din formula (16) tinde către zero cînd $n \rightarrow +\infty$, avem formula

$$(17) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k f^{(4k)}(a) + C_k f^{(4k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_k f^{(4k)}(b)]$$

Se demonstrează că dacă funcția $f(x)$ are derivate succesive de orice ordin în intervalul $[a, b]$ și dacă derivatele $f^{(4n)}(x)$ sînt astfel încît să avem $|f^{(4n)}(x)| < M$ pentru $n > N$ și $x \in [a, b]$ atunci restul din formula (16) $\rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow +\infty$ dacă $b - a < 2\sqrt[4]{72}$, și prin urmare avem formula (17).

În particular formula (17) are loc pentru $p(x) = 1$. Înlocuind în acest caz pe $f(x)$ cu $F'(x)$, unde $F(x)$ este o funcție care are derivate succesive

de orice ordin în intervalul $[a, b]$, derivatele $F^{(2n+1)}(x)$ fiind astfel încît să avem $|F^{(2n+1)}(x)| < M$ pentru $n > N$ și $x \in [a, b]$ obținem seria

$$(18) \quad F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (b-a)^{4k+1} [\lambda_k F^{(4k+1)}(a) + \mu_k F^{(4k+1)}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda_k F^{(4k+1)}(b)]$$

care este analoagă cu seria lui Boole (11') și este valabilă cînd $b - a < 2\sqrt[4]{72}$.

Se arată că coeficienții λ_k și μ_k din seria (18) sînt identici cu coeficienții λ_k și μ_k din dezvoltările în serie după puterile lui u , ale funcțiilor

$$(19) \quad \frac{sh \frac{u}{2} - \sin \frac{u}{2}}{u \left(ch \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} \right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k u^{4k}$$

$$\frac{2 \left(\sin \frac{u}{2} ch \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} sh \frac{u}{2} \right)}{u \left(ch \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} \right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k u^{4k}$$

§ 3. Ameliorarea gradului de exactitate al formulelor de cuadratură.

7. Formula de cuadratură

$$(20) \quad \int_a^b f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + R$$

unde restul R este nul pentru $f(x) = 1$, $x, \dots, x^{n-1}$ și este diferit de zero pentru $f(x) = x^n$ are gradul de exactitate $n - 1$. Restul în formula (20) în general se pune sub forma

$$(21) \quad R = \int_a^b \varphi(x) f^{(n)}(x) dx$$

În multe cazuri, cum sînt formulele trapezului, formula lui Simpson, formula lui Newton, formula lui Gauss, unele formule cu noduri interioare distribuite simetric față de mijlocul intervalului (a, b) , funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul (a, b) și curba $y = \varphi(x)$ este simetrică față de dreapta $x = \frac{a+b}{2}$.

A ameliora gradul de exactitate al formulei de cuadratură (20), înseamnă a extrage din expresia restului R , o parte de forma

$$B_1 f^{(n_1)}(x'_1) + B_2 f^{(n_2)}(x'_2) + \dots + B_p f^{(n_p)}(x'_p)$$

unde $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ sînt anumite noduri, iar $n_1, n_2, \dots, n_p$ sînt numere întregi pozitive sau nule, astfel alese încît scriind formula de cuadratură

$$(22) \quad \int_a^b f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + B_1 f^{(n_1)}(x'_1) + B_2 f^{(n_2)}(x'_2) + \dots + B_p f^{(n_p)}(x'_p) + R_1$$

gradul ei de exactitate să fie $m > n - 1$.

V. I. Krîlov [2], a dat un procedeu interesant de ameliorare a gradului de exactitate a formulelor de cuadratură.

Integrala (21) fiind de forma integralelor studiate în această lucrare, îi putem aplica formulele de cuadratură (7) și (16) și vom obține astfel un nou procedeu de ameliorare a gradului de exactitate a formulelor de cuadratură, diferit de procedeuul lui V. I. Krîlov.

Vom avea formula de cuadratură

$$(23) \quad \int_a^b f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + \sum_{i=0}^{k-1} B_i [f^{(n+2i)}(a) + f^{(n+2i)}(b)] + \int_a^b \varphi_k(x) f^{(n+2k)}(x) dx.$$

al cărui grad de exactitate este $n + 2k - 1$ față de gradul de exactitate $n - 1$ al formulei de cuadratură (20).

Deasemenea avem formula de cuadratură

$$(24) \quad \int_a^b f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + \sum_{i=0}^{k-1} [B_i f^{(n+4i)}(a) + C_i f^{(n+4i)}\left(\frac{a+b}{2}\right) + B_i f^{(n+4i)}(b)] + \int_a^b \varphi_k(x) f^{(n+4k)}(x) dx.$$

analoagă cu formula precedentă și care are gradul de exactitate $n + 4k - 1$ față de gradul de exactitate $n - 1$ al formulei (20).

Formulele de cuadratură (7) și (16) studiate în această lucrare au astfel aplicații și la ameliorarea gradului de exactitate al formulelor de cuadratură.

Catedra de ecuații diferențiale
Universitatea „V. I. Babeș”

BIBLIOGRAFIE

- 1 J. Bertrand. Calcul différentiel 1864, p. 333.
- 2 V. I. Krîlov. Doklady Akad. Nauk. 1954, Tom. 96, p. 429 - 432.

ФОРМУЛА БУЛЯ

(Краткое содержание)

В настоящей статье автор доказал формулу квадратуры (3), из которой вытекает формула Буля, с её остатком, исходя из формулы квадратуры (1) трапеции и из формулы (2). Обобщая формулу (3), автор получил формулу квадратуры (7). Исследование последовательности функции $\{\varphi_n(x)\}$ позволило автору дать теорему сходимости ряда (10) и ряда Буля (11) или (11'). Коэффициенты λ_n ряда Буля (11), даны формулами (12), в которых являются числами Бернулли.

Во второй части автор доказал формулу квадратуры (16), аналогичную с формулой квадратуры (7), исходя из формулы квадратуры (13), обобщающей формулу Симпсона. Исследование последовательности функции $\{\varphi_n(x)\}$ позволило автору дать теорему сходимости последовательности (17), из которой вытекает теорема о сходимости ряда (18), аналогичной ряду Буля.

В третьей части автор показывает, что формулы квадратуры (7) и (16) применимы также и к улучшению степени точности формул квадратуры (20), в которых остаток R , выраженный в форме (21), позволяет применить формулы (9) и (16). Таким образом, автор получил формулы квадратуры (23) и (24), которые имеют степени точности $n + 4K - 1$ и $n + 4K - 1$, степень точности формулы (20) будучи $n - 1$.

LA FORMULE DE BOOLE

(Résumé)

Dans cet article nous avons démontré la formule de quadrature (3) d'où résulte la formule de Boole avec son reste, en partant de la formule de quadrature (1) du trapèze et de la formule (2). En généralisant la formule (3) nous avons obtenu la formule de quadrature (7). L'étude de la suite des fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ nous a permis de donner un théorème de convergence de la série (10) et de la série de Boole (11) ou (11'). Les coefficients λ_n de la série de Boole (11') sont donnés par les formules (12) où B_n sont les nombres de Bernoulli.

Dans le § 2 on a démontré la formule de quadrature (16) analogue à la formule de quadrature (7) en partant de la formule de quadrature (13) qui généralise la formule de Simpson. L'étude de la suite des fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ nous a permis d'établir un théorème de convergences de la série

(17), d'où il résulte un théorème sur la convergence de la série (18) qui est analogue à la série de Boole.

Dans le § 3, nous avons montré que les formules de quadrature (7) et (16) sont utiles aussi dans le problème de l'amélioration du degré d'exactitude des formules de quadrature (20) où le reste R mis sous la forme (21) permet d'appliquer les formules (9) et (16). On a obtenu ainsi les formules de quadrature (23) et (24), qui ont le degré d'exactitude $n + 2k - 1$ et $n + 4k - 1$, le degré d'exactitude de la formule (20) étant $n - 1$.