

8-3717/47

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ
и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

Том 2

№ 1

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1962

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ФОРМУЛЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ АДАМСА

Д. В. ИОНЕСКУ

(Клуж, Румыния)

1. Известно, что остаточный член в формуле численного интегрирования Адамса имеет порядок h^2 (см. [1]). Известно также, что формула численного интегрирования Адамса получается при помощи квадратурной формулы, найденной интегрированием интерполяционного многочлена Ньютона, с узлами, расположенными вне промежутка интегрирования (см. [2]).

В рамках этой идеи мы определим остаточный член в формуле численного интегрирования Адамса, являющийся наиболее общим, и дадим оценку его абсолютного значения при помощи остаточного члена соответствующей квадратурной формулы.

2. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, x_{n+1}]$ и принадлежит классу $C^{(n+1)}$ на этом промежутке. Если взять в промежутке (x_0, x_{n+1}) узлы $x_1, x_2, \dots, x_n$

такие, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, то имеем квадратурную формулу

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = k_0 f(x_n) + k_1 [x_{n-1}, x_n; f] + \dots + k_n [x_0, x_1, \dots, x_n; f] + R_n, \quad (1)$$

которую можно получить, интегрируя интерполяционный многочлен Ньютона, соответствующий функции $f(x)$ и узлам $x_0, x_1, \dots, x_n$.

В формуле (1) $[x_{n-1}, x_n; f], [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n; f], \dots$ суть разделенные разности функции $f(x)$, а коэффициенты $k_0, k_1, \dots, k_n$ даны формулами

$$k_0 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx, \quad (2)$$

$$k_l = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-l+1}) dx \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Интерес представляет и коэффициент k_{n+1} , получающийся при $l = n + 1$. Остаточный член квадратурной формулы (1) допускает следующую оценку:

$$|R_n| \leq \frac{k_{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad (3)$$

где M_{n+1} — верхняя граница $|f^{(n+1)}(x)|$ на интервале (x_0, x_{n+1}) .

Мы написали остаточный член в виде определенного интеграла (см. [3])

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{x_{n+1}} \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx, \quad (4)$$

где функция $\varphi(x)$ совпадает на отрезках $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, x_{n+1}]$ с многочленами $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x)$, являющимися решениями дифференциальных уравнений

$$\varphi_1^{(n+1)}(x) = 0, \dots, \varphi_n^{(n+1)}(x) = 0, \varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = 1 \quad (5)$$

и удовлетворяющими граничным условиям

$$\varphi_1^{(r)}(x_0) = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1), \quad (6)$$

$$\varphi_{k+1}^{(r)}(x_k) = \varphi_k^{(r)}(x_k) \quad (r = 0, 1, \dots, n-1; k = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$\varphi_{n+1}^{(r)}(x_{n+1}) = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1, n). \quad (8)$$

Можно доказать, что функция $\varphi(x)$ имеет знак $(-1)^{n+1}$ в промежутке (x_0, x_{n+1}) ; отсюда вытекает оценка (3).

Если узлы $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию с шагом h , то квадратурная формула (1) принимает вид

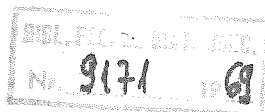
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = h [f(x_n) + J_1 \Delta^1 f(x_{n-1}) + \dots + J_n \Delta^n f(x_0)] + R_n, \quad (9)$$

где $\Delta^1 f(x_{n-1}), \Delta^2 f(x_{n-2}), \dots, \Delta^n f(x_0)$ — конечные разности функции $f(x)$, а коэффициенты J_l даны формулами

$$J_l = \frac{1}{l!} \int_0^1 u(u+1) \dots (u+l-1) du \quad (l = 1, 2, \dots, n \text{ и } l = n+1). \quad (10)$$

Тогда оценка (3) принимает вид

$$|R_n| \leq h^{n+2} J_{n+1} M_{n+1}. \quad (11)$$



3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (12)$$

и предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{|x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$ вместе с частными производными до порядка $n + 1$.

Последовательным дифференцированием обеих частей дифференциального уравнения (12) получаем

$$y'' = f_1(x, y), y''' = f_2(x, y), \dots, y^{(n+2)} = f_{n+1}(x, y), \quad (13)$$

где функции $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_{n+1}(x, y)$ непрерывны в D .

Предположим, что решение дифференциального уравнения (12), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, существует на промежутке $[x_0, x_0 + a]$, где $a \leq \alpha$, и что оно предварительно вычислено в узлах $x_1, x_2, \dots, x_n$, где $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Дадим формулу для вычисления значения решения в узле x_{n+1} , где $x_n < x_{n+1} \leq a$.

С этой целью рассмотрим формулу

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx \quad (14)$$

и применим к интегралу, стоящему во втором члене, квадратурную формулу (1). Обозначая

$$y'(x) = f[x, y(x)] = g(x), \quad (15)$$

получаем наиболее общую формулу численного интегрирования Адамса

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + k_0 g(x_n) + k_1 [x_{n-1}, x_n; g] + \dots + k_n [x_0, x_1, \dots, x_n; g] + R_n, \quad (16)$$

где

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{x_{n+1}} \Phi(x) f_{n+1}[x, y(x)] dx, \quad (17)$$

а функция $\Phi(x)$ определена дифференциальными уравнениями (5) и граничными условиями (6), (7), (8). Поскольку функция $\Phi(x)$ имеет знак $(-1)^{n+1}$ в промежутке (x_0, x_{n+1}) , то остаточный член R_n можно написать также в виде

$$R_n = \frac{k_{n+1}}{(n+1)!} f_{n+1}[\xi, y(\xi)], \quad (18)$$

где $\xi \in (x_0, x_{n+1})$.

Из формулы (18) можно получить оценку $|R_n|$. Обозначая через F_{n+1} верхнюю грань $|f_{n+1}(x, y)|$ в D , имеем

$$|R_n| \leq \frac{k_{n+1}}{(n+1)!} F_{n+1}. \quad (19)$$

Если узлы $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию с шагом h , то формула (16) заменяется на

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h[g(x_n) + J_1 \Delta^1 g(x_{n-1}) + J_2 \Delta^2 g(x_{n-2}) + \dots + J_n \Delta^n g(x_0)] + R_n, \quad (20)$$

где остаточный член R_n дан формулой (17), причем функция $\Phi(x)$ соответствует случаю, когда узлы расположены в арифметической прогрессии. Остаточный член R_n можно еще написать в виде

$$R_n = h^{n+2} J_{n+1} f_{n+1}[\xi, y(\xi)],$$

где $\xi \in (x_0, x_{n+1})$. Отсюда видно, что R_n имеет порядок h^{n+2} .

Имеем следующую оценку для $|R_n|$:

$$|R_n| \leq J_{n+1} F_{n+1} h^{n+2}.$$

4. В целях применений к случаю, когда узлы $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ расположены в арифметической прогрессии, достаточно дать значение коэффициентов J_l из формулы (10). Имеем

$$J_1 = \frac{1}{2}, \quad J_2 = \frac{5}{12}, \quad J_3 = \frac{3}{8}, \quad J_4 = \frac{251}{720}, \quad J_5 = \frac{95}{288}, \\ J_6 = \frac{19087}{60480}, \quad J_7 = \frac{36799}{120960}, \dots$$

В случае $n = 5$, т. е. для формулы численного интегрирования Адамса, имеем

$$|R_5| \leq \frac{19087}{60480} F_6 h^7 < 0,3156 F_6 h^7.$$

При $n = 6$ имеем

$$|R_6| \leq \frac{36799}{120960} F_7 h^8 < 0,3043 F_7 h^8.$$

Поступила в редакцию
10.06.1961

Цитированная литература

1. W. T o l l m i e n. Über die Fehlerabschätzung bei Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. und Mech., 1938, 18, 83—90.
2. G. S a n s o n e. Equazioni differenziali nel campo reale. Pt. sec. Bologna, 1949.
3. D. V. I o n e s c u. Formule de cuadratură cu noduri exterioare. Studii și cercetări mat. Acad RPR, 1958, 9, 45—134.