

MÉTHODES PRATIQUÉES POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

D. Ionescu

(Note présentée par L. Tchakaloff, membre de l'Académie, le 20. II. 1963)

1. Considérons l'équation différentielle

(1) $y' = f(x, y)$
dont la solution $y(x)$ qui satisfait à la condition $y(x_0) = y_0$, existe sur l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$. Nous supposons que la fonction $f(x, y)$ a des dérivées partielles par rapport à x et à y , jusqu'au $(n+1)^{\text{ème}}$ ordre, continues dans le domaine D , défini par les inégalités

$$D: x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b.$$

Dans ces conditions, en prenant dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a]$ les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, nous avons donné [1], une généralisation de la formule d'intégration numérique d'Adams, pour le calcul de $y(x_{n+1})$, en supposant que la solution $y(x)$ a été calculée au préalable sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$.

D'après nos hypothèses, nous avons

$$(2) \quad y'' = f_1(x, y), y''' = f_2(x, y), \dots, y^{(n+2)} = f_{n+1}(x, y)$$

les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ étant continues dans le domaine D . Nous avons démontré que le reste de la formule généralisée d'intégration numérique d'Adams peut être mis sous la forme

$$(3) \quad R_n = (-1)^{n+1} \int_{x_0}^{x_{n+1}} \varphi(x) f_{n+1}[x, y(x)] dx$$

où la fonction $\varphi(x)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ dans l'intervalle (x_0, x_{n+1}) . Il résulte une évaluation de la valeur absolue du reste.

Dans le cas des noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ en progression arithmétique dont la raison est $h = x_1 - x_0$, nous avons démontré que le reste R est de l'ordre de h^{n+2} , ce qui généralise un résultat de W. Tollmien [6].

Dans le cas $n=5$, de la formule proprement dite d'Adams, nous avons démontré que

$$(4) \quad |R_5| \leq \frac{19087}{60480} F_6 h^7 < 0,3156 F_6 h^7$$

et dans le cas $n=6$, nous avons

$$(5) \quad |R_6| \leq \frac{36799}{120960} F_7 h^8 < 0,3043 F_7 h^8$$

où nous avons désigné en général par F_n une borne supérieure de la valeur absolue de $f_n(x, y)$ dans le domaine D .

2. La formule d'Adams est une formule de dérivation numérique qui n'est ni la plus simple, ni la plus pratique. Parmi les formules de dérivation numérique, il y a la formule qui exprime une différence divisée d'une fonction d'une variable sur les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ généralement multiples, par une intégrale définie. Nous avons donné cette formule dans notre travail [2], indépendamment de L. Tchakaloff [4] qui a été le premier à trouver cette formule et l'a fait connaître dans une note présentée au Congrès International des Mathématiciens à Oslo en 1936 et l'a développée dans le travail [6].

En appliquant la formule de dérivation numérique

$$(6) \quad [x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_5, x_6; y] = \int_{x_0}^{x_6} \theta(\lambda) y^{(12)}(\lambda) dx$$

nous avons été conduits à une formule d'intégration numérique [3], de l'équation différentielle (1). En supposant que la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (1) qui satisfait à la condition $y(x_0) = y_0$ a été calculée au préalable sur les noeuds x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et que y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sont les valeurs correspondantes de y , nous avons obtenu la formule d'intégration numérique pour le calcul de $y(x_6)$ où $x_6 = x_5 + h$.

$$(7) \quad y(x_6) = 28,4 y_0 + 426 y_1 + 825 y_2 - 400 y_3 - 750 y_4 - 128,4 y_5 + 6h [f(x_0, y_0) + 30 f(x_1, y_1) + 150 f(x_2, y_2) + 200 f(x_3, y_3) + 75 f(x_4, y_4) + 6 f(x_5, y_5)] + R$$

où le reste R est donné par la formule

$$(8) \quad R = \int_{x_0}^{x_6} \theta(x) f_{11}[x, y(x)] dx$$

et nous avons l'évaluation

$$(9) \quad |R| \leq \frac{1}{924} h^{12} F_{11} < 0,001083 h^{12} F_{11}.$$

3. Dans cette note nous reprenons les calculs précédents, en supposant que la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (1), qui satisfait à la condition $y(x_0) = y_0$, a été calculée au préalable sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_6$ et nous présentons la formule suivante, pour le calcul de $y(x_7)$, où $x_7 = x_6 + h$,

$$(10) \quad y(x_7) = 35,3 y_0 + 803,6 y_1 + 3013,5 y_2 + 1225 y_3 - 3062,5 y_4 - 1822,8 y_5 - 191,1 y_6 + 7h [f(x_0, y_0) + 42 f(x_1, y_1) + 315 f(x_2, y_2) + 700 f(x_3, y_3) + 525 f(x_4, y_4) + 126 f(x_5, y_5) + 7 f(x_6, y_6)] + R$$

où le reste R est donné par la formule

$$(11) \quad R = \int_{x_0}^{x_7} \varphi(\lambda) f_{13}[x, y(\lambda)] dx$$

d'où il résulte l'évaluation

$$(12) \quad |R| \leq \frac{1}{3432} h^{14} F_{13} < 0,0002914 h^{14} F_{13}.$$

Nous donnerons prochainement d'autres résultats concernant les formules d'intégration numérique de la forme (7) ou (10) et spécialement, pour améliorer encore l'ordre du reste R , par rapport à h .

ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д. Ионеску

РЕЗЮМЕ

При численном решении обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, автор применяет интегральные формулы ньютоновских частных, полученных в 1936 г. Л. Чакаловым и позже самим автором независимо от Л. Чакалова. Примененный метод приводит к довольно точной оценке верхнего предела погрешности при приближенном интегрировании.

BIBLIOGRAPHIE

¹ Д. В. Ионеску. Ж. выч. мат. и мат. физики. 2, 1962, 154—157. ² D. V. Ionescu. Cuadraturi numerice. București, Edit. Tehn. 1957, cap. III. ³ D. V. Ionescu. Studii și cercetări mat. Acad. RPR. XII, 1961, 257—280. ⁴ L. Tchakaloff. Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendung. Congrès International des Mathématiciens, Oslo, 1936. ⁵ Л. Чакалов. Годишник Соф. у-т. Физ.-мат. ф-т, XXXIV, 1938, № 1, 353—405. ⁶ W. Tollmien. Z. angew. Math. und Mech. 18, 1938, 83—90.