

8-3717/55

МАТЕМАТИКА

Д. В. ИОНЕСКУ

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ СИМПСОНА,
 НЬЮТОНА И МИЛНА

(Представлено академиком Ш. Е. Микеладзе 10.11.1963)

Рассмотрим квадратурные формулы вида

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = A_0[f(x_0) + f(x_n)] + A_1[f(x_1) + f(x_{n-1})] + \dots + A_{p-1}[f(x_{p-1}) + f(x_{n-p+1})] + A_p[f(x_p) + f(x_{p+1}) + \dots + f(x_{n-p})] + R \quad (1)$$

и

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = A'_1[f(x_1) + f(x_{n-1})] + A'_2[f(x_2) + f(x_{n-2})] + \dots + A'_p[f(x_p) + f(x_{n-p})] + A'_{p+1}[f(x_{p+1}) + f(x_{p+2}) + \dots + f(x_{n-p-1})] + R' \quad (2)$$

где узлы $x_0=a, x_1, \dots, x_n=b$ образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной h ; A_p и A'_p — коэффициенты, которые определяются таким образом, чтобы погрешность от отбрасывания остаточных членов R и R' этих формул имела относительно h порядок ≥ 1 .

Если только формулы (1), (2) существуют, то они будут новыми, обобщающими широко известные формулы. Так, формула (1) при $n=2p$ и $n=2p+1$ приводит к формулам Котеса [1], а из формулы (2) при $n=2p+2$ и $n=2p+3$ получаются формулы Ж. Ф. Стефенсена [1].

В настоящей заметке рассматриваются формулы (1), (2) для $p=0$ и $p=1$. Для других значений p формулы (1), (2) будут изучены в специальной работе. Здесь же даются выражения остаточных членов R и R' в интегральной форме и некоторые оценки их в предположении непрерывности $f^{(2p+2)}(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$.

Получены следующие результаты:

1. Квадратурную формулу (1), имеющую точность h , можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{b-a}{n+1} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)] + R_n \quad (n \geq 1), \quad (3)$$

9161

69

где

$$R_n = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx, \quad (4)$$

а функция $\varphi(x)$ совпадает на отрезках $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ соответственно с многочленами второй степени $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, являющимися решениями дифференциальных уравнений

$$\varphi''(x) = 1, \quad \varphi_1''(x) = 1, \dots, \varphi_n''(x) = 1 \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0) &= 0, & \varphi_1'(x_0) &= -\frac{nh}{n+1}, \\ \varphi_k(x_k) &= \varphi_{k+1}(x_k), & \varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k) &= \frac{nh}{n+1}, \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \\ \varphi_n(x_n) &= 0, & \varphi_n'(x_n) &= \frac{nh}{n+1}. \end{aligned}$$

Показывается, что

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= \frac{(x-x_{p-1})^2}{2} - \frac{n-p+1}{n+1} h(x-x_{p-1}) - \\ &- (p-1) \frac{n-p+1}{n+1} \frac{h^2}{2}, \quad (p=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

и доказывается, что $\varphi(x) < 0$ в промежутке (x_0, x_n) . Отсюда получается

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n} f''(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_n)$. Следовательно,

$$|R_n| \leq k_n M_2, \quad M_2 = \sup_{[x_0, x_n]} |f''(x)|, \quad k_n = \frac{(b-a)^3}{12n}.$$

Формула (3) обобщает формулу трапеции, вытекающую из нее при $n=1$. Величина k_n , фигурирующая в оценке $|R_n|$, обратно пропорциональна n .

2. Формула (2) с порядком точности h имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{b-a}{n-1} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] + R'_n \quad (n \geq 2). \quad (6)$$

Остаточный член R'_n может быть представлен в виде (4), где $\varphi(x)$ совпадает на отрезках $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ соответственно с многочленами второй степени $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, являющимися решениями дифференциальных уравнений (5) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0) &= 0, & \varphi_1'(x_0) &= 0, \\ \varphi_k(x_k) &= \varphi_{k+1}(x_k), & \varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k) &= \frac{nh}{n-1}, \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \\ \varphi_n(x_n) &= 0, & \varphi_n'(x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Показывается, что

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})^2}{2} - \frac{(p-1)h}{n-1} (x-x_{p-1}) + (p-1) \frac{n-p+1}{n-1} \frac{h^2}{2} \quad (p=1, 2, \dots, n),$$

и доказывается, что $\varphi(x) > 0$ в промежутке (x_0, x_n) .

Отсюда вытекает, что

$$R'_n = \frac{(b-a)^3}{12n} f''(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_n)$, и что

$$|R'_n| \leq k'_n M_2, \quad k'_n = \frac{(b-a)^3}{12n}.$$

Формула (6) обобщает вторую формулу трапеции, получающуюся из нее при $n=2$. Величина k'_n оценки $|R'_n|$ обратно пропорциональна n .

3. Формула вида (1) с погрешностью порядка h^2 такова:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{b-a}{2(n+1)} [f(x_0) + f(x_n)] + \\ &+ \frac{n(b-a)}{n^2-1} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] + R_n \quad (n \geq 2). \quad (7) \end{aligned}$$

Показывается, что остаточный член R_n может быть представлен в виде

$$R_n = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(4)}(x) dx, \quad (8)$$

где функция $\varphi(x)$ совпадает на отрезках $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ с многочленами четвертой степени $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, являющимися решениями дифференциальных уравнений

$$\varphi_1^{(4)}(x) = 1, \quad \varphi_2^{(4)}(x) = 1, \dots, \varphi_n^{(4)}(x) = 1 \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(\lambda)}(x_0) &= 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2), & \varphi_1'''(x_0) &= -\frac{nh}{2(n+1)}, \\ \varphi_k^{(\lambda)}(x_k) &= \varphi_{k+1}^{(\lambda)}(x_k) \quad (\lambda = 0, 1, 2), & \varphi_k'''(x_k) - \varphi_{k+1}'''(x_k) &= \frac{n^2 h}{n^2-1}, \\ \varphi_n^{(\lambda)}(x_n) &= 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2), & \varphi_n'''(x_n) &= \frac{nh}{2(n+1)}, \end{aligned}$$

где, например, $\varphi_k^{(0)}(x_k)$ означает значение самой функции $\varphi_k(x)$ в точке $x=x_k$.

Доказывается, что

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & \frac{(x-x_{p-1})^4}{4!} - \frac{n^3-n^2+2(p-1)}{2(n^2-1)} \frac{h(x-x_{p-1})^3}{3!} + \\ & + (p-1) \frac{n-p+1}{n^2-1} \frac{h^2}{2} \frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} - (p-1) \frac{(n-p+1)(n-2p+2)}{2(n^2-1)} \times \\ & \times \frac{h^3}{3!} (x-x_{p-1}) - (p-1)^2 \frac{(n-p+1)^2}{n^2-1} \frac{h^4}{4!} \quad (p=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Доказывается также, что функция $\varphi(x)$ симметрична относительно центра промежутка $[x_0, x_n]$, обозначаемого ниже через x' , и отрицательна в промежутке (x_0, x_n) . Для доказательства показывается, что уравнение $\varphi''(x)=0$ имеет действительные корни x'_{p-1} , x''_{p-1} , определенные соотношениями

$$x'_{p-1} = x_{p-1} + \frac{p-1}{n-1} h, \quad x''_{p-1} = x_{p-1} + \frac{n-(p-1)}{n+1} h,$$

расположенные в промежутке (x_{p-1}, x_p) . Это показывает, что $\varphi'(x) < 0$ в промежутке (x_0, x') и, следовательно,

$$R_n = -\frac{4}{n^2} \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_n)$. Значит,

$$|R_n| \leq k_n M_4, \quad M_4 = \sup_{[x_0, x_n]} |f^{(4)}(x)|, \quad k_n = \frac{4}{n^2} \frac{(b-a)^5}{2880}. \quad (10)$$

Формула (7) обобщает квадратурные формулы Ньютона и Симпсона, получающиеся из нее при $n=2$ и $n=3$. Величина k_n , фигурирующая в оценке (10), обратно пропорциональна n^2 .

4. Формулой вида (2), имеющей степень точности h^2 , является

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = & \frac{(3n-4)(b-a)}{2(n-1)(n-2)} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ & + \frac{(n^2-6n+6)(b-a)}{(n-1)(n-2)(n-3)} [f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-2})] + R'_n \quad (n \geq 4). \quad (11) \end{aligned}$$

Показывается, что остаточный член R'_n может быть представлен в виде (8), где $\varphi(x)$ совпадает на отрезках $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ соответственно с многочленами четвертой степени $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, являющимися решениями дифференциальных уравнений (9) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0) = 0, & \quad \varphi'_1(x_0) = 0, & \quad \varphi''_1(x_0) = 0, \\ \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), & \quad \varphi'_1(x_1) = \varphi'_2(x_1), & \quad \varphi''_1(x_1) = \varphi''_2(x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_k) = \varphi_{k+1}(x_k), & \quad \varphi'_k(x_k) = \varphi'_{k+1}(x_k), & \quad \varphi''_k(x_k) = \varphi''_{k+1}(x_k), \quad (k=2, 3, \dots, n-2), \\ \varphi_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi_n(x_{n-1}), & \quad \varphi'_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi'_n(x_{n-1}), & \quad \varphi''_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi''_n(x_{n-1}), \\ \varphi_n(x_n) = 0, & \quad \varphi'_n(x_n) = 0, & \quad \varphi''_n(x_n) = 0, \end{aligned}$$

$$\varphi'''_1(x_0) = 0,$$

$$\varphi'''_1(x_1) - \varphi'''_2(x_1) = \frac{n(3n-4)h}{2(n-1)(n-2)},$$

$$\varphi'''_k(x_k) - \varphi'''_{k+1}(x_k) = \frac{n(n^2-6n+6)h}{(n-1)(n-2)(n-3)}, \quad (k=2, 3, \dots, n-2),$$

$$\varphi'''_{n-1}(x_{n-1}) - \varphi'''_n(x_{n-1}) = \frac{n(3n-4)h}{2(n-1)(n-2)},$$

$$\varphi'''_n(x_n) = 0.$$

Доказывается, что

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)^4}{4!}, \quad \varphi_n(x) = \frac{(x-x_n)^4}{4!},$$

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & \frac{(x-x_{p-1})^4}{4!} - \frac{U_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} h \frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} + \\ & + \frac{V_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2!} \frac{(x-x_{p-1})^2}{2!} + \\ & + \frac{W_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^3}{3!} (x-x_{p-1}) + \frac{Z_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^4}{4!}, \end{aligned}$$

где

$$U_p(n) = n^3 - n^2 - 10(p-1)n + 12(p-1),$$

$$V_p(n) = n^3 - [5(p-1) + 1]n^2 + [5(p-1)(p-2) + 11(p-1)]n - 6(p-1)^2,$$

$$\begin{aligned} W_p(n) = & [5(p-1) - 3]n^3 - [15(p-1)(p-2) + 15(p-1) - 3]n^2 + \\ & + [10(p-1)(p-2)(p-3) + 48(p-1)(p-2) + 22(p-1)]n - \\ & - [12(p-1)(p-2)(p-3) + 36(p-1)(p-2) + 12(p-1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_p(n) = & [5(p-1)(p-2) - (p-1) + 2]n^3 - [10(p-1)(p-2)(p-3) + \\ & + 30(p-1)(p-2) + 4(p-1) + 2]n^2 + [5(p-1)(p-2)(p-3)(p-4) + \\ & + 42(p-1)(p-2)(p-3) + 65(p-1)(p-2) + 11(p-1)]n - \\ & - [6(p-1)(p-2)(p-3)(p-4) + 36(p-1)(p-2)(p-3) + \\ & + 42(p-1)(p-2) + 6(p-1)]. \end{aligned}$$

5. Функция $\varphi(x)$, фигурирующая в выражении (8) остаточного члена формулы (11), положительна в промежутке (x_0, x_n) . Чтобы доказать это, достаточно заметить, что на отрезке $[x_0, x']$, где $x' = \frac{x_0 + x_n}{2}$, верны следующие утверждения:

1°. Каково бы ни было число n , имеем $\varphi''(x_1) = 0,5 h^2$. Кроме того, при $n=4, 5, 6$ выполняется неравенство

$$\varphi''(x_2) = \frac{V_3(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2!} < 0,$$

в то время как $\varphi''(x_2) > 0$ для $n \geq 7$. В общем случае

$$\varphi''(x_{p-1}) = \frac{V_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2}$$

и у многочлена $V_p(x)$ все корни действительные, так как

$$V_p(-\infty) < 0, \quad V_p(1, 2) = 0,288 > 0, \\ V_p(2p-1) = -(p-1)(p-2)(2p+1) < 0, \quad V_p(+\infty) > 0.$$

Далее, для всякого p будем иметь $V_p(n) > 0$ при $n > n'_p$ и $V_p(n) < 0$ при $n < n'_p$, где n'_p — наибольший корень уравнения $V_p(x) = 0$.

2°. Обозначим через x_{p-1} и $\varphi''(x_{p-1})$ координаты произвольной точки L_{p-1} параболы

$$y = \frac{1}{2(n-1)(n-2)(n-3)} \left[(5n-6)(x-x')^2 - \frac{n^2-2n^2}{4} h^2 \right],$$

вершина и точка L_1 которой при фиксированном n расположены соответственно под и над осью Ox .

Тогда, если существует такое $x_{p'-1}$, что $\varphi''(x_{p'-1}) \geq 0$, то при любом x_p из промежутка $[x_1, x_{p'-1}]$ имеет место неравенство $\varphi''(x_p) > 0$. Если же для некоторого $x_{p'}$ имеем $\varphi''(x_{p'}) \leq 0$, то $\varphi''(x_p) < 0$ при любом x_p из промежутка $[x_{p'}, x']$.

3°. Заметим, что при $n \geq 7$ производная $\varphi'_2(x) > 0$ на отрезке $[x_1, x_2]$; поэтому найдется такое число ξ , обращающее в нуль функцию $\varphi'''_2(x)$, что для него

$$\varphi'''_2(\xi) = \frac{n(3n-4)(n^2-8n+2)}{8(n-1)^2(n-2)^2} h^3 > 0.$$

4°. При $n \geq 11$ производная $\varphi'_3(x)$ положительна на отрезке $[x_2, x_3]$. Это следует из того факта, что мы можем написать

$$\varphi'_3(x) = \frac{(x-x_2)^3}{3!} + \frac{3U_3(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} h \frac{h^2-(x-x_2)^2}{3!} + \\ + \frac{V_3(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2!} (x-x_2) + \frac{T_3(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^3}{3!},$$

где $T_3(n) = W_3(n) - 3U_3(n)$. Доказывается, что при $n \geq 11$ многочлены $U_3(n)$, $V_3(n)$, $T_3(n)$ положительны.

5°. Если при каком-нибудь значении индекса p справедливо неравенство $\varphi''_p(x_p) > 0$, то $\varphi'_p(x) > 0$ на отрезке $[x_{p-1}, x_p]$.

Это следует из соотношения

$$\varphi'_p(x) = \frac{(x-x_{p-1})^3}{3!} + \frac{U_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} h \frac{h^2-(x-x_{p-1})^2}{3!} + \\ + \frac{V_p(n)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^2}{2!} (x-x_{p-1}) + \frac{T_p(n)}{2(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{h^3}{3!}, \quad (12)$$

где

$$T_p(n) = W_p(n) - 3U_p(n).$$

Пусть

$$I_p(n) = T_p(n) - (5p-11)V_{p+1}(n), \quad J_p(n) = U_p(n) - V_{p+1}(n).$$

Вычисляя, убеждаемся, что $I_p(x)$ и $J_p(x)$ являются многочленами второй степени, причем $I_p(x)$ обращается в нуль в точках

$$\xi'_p = 1, 2, \quad \eta'_p = \frac{3p^3-5p^2-12p+8}{3(p^2-2p-2)},$$

а $J_p(x)$ имеет корни

$$\xi''_p = 1, 2, \quad \eta''_p = \frac{p^2+2p-2}{p}.$$

Кроме того, принимая

$$V_p(n) = V_{p+1}(n) + K_p(n),$$

находим, что $K_p(n)$ также является многочленом второй степени с корнями $\xi'_p = 1, 2$ и $\eta''_p = 2p-1$. Оказывается, что

$$V_{p+1}(1, 2) = 0,288 > 0$$

и

$$V_{p+1}(\eta'_p+1) = -\frac{p-1}{8(p^2-2p-2)^3} [3(p-3)^8 + 90(p-3)^7 + 893(p-3)^6 + \\ + 4120(p-3)^5 + 9589(p-3)^4 + 10722(p-3)^3 + \\ + 4775(p-3)^2 + 876(p-3) + 56] < 0,$$

а $\eta'_p > \eta''_p$, $V_{p+1}(\eta''_p) < 0$.

Из предыдущего следует, что для тех значений n , при которых $\varphi''_p(x_p) > 0$ или $V_{p+1}(n) > 0$, многочлены $U_p(n)$, $V_p(n)$, $T_p(n)$ положительны, а из уравнения (12) вытекает неравенство $\varphi'_p(x) > 0$, справедливое на отрезке $[x_{p-1}, x_p]$.

6°. Обозначим через $[x_{p'-1}, x_{p'}]$ промежуток, в котором выполняются неравенства

$$\varphi''_{p'}(x_{p'-1}) \geq 0 \quad \text{и} \quad \varphi''_{p'}(x_{p'}) < 0,$$

а через ξ — пересечение параболы $y = \varphi''_{p'}(x)$ с осью Ox .

Производная $\varphi'_p(x)$ всегда положительна в промежутке $(x_0, x_{p'-1}]$, так что функция возрастает в этом промежутке. При этом она продолжает возрастать на отрезке $[x_{p'-1}, \xi]$, оставаясь положительной на нем, и убывает на отрезке $[\xi, x']$ до тех пор, пока в точке x' не обратится в нуль.

Следовательно, функция $\varphi(x)$ положительна в промежутке $(x_0, x']$, т. е. она положительна в промежутке (x_0, x_n) .

6. Показывается, что

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx = \frac{n^2(\zeta n - 6)}{720} h^5 = \frac{4(\zeta n - 6)}{n^3} \frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Отсюда

$$R'_n = \frac{4(\zeta n - 6)}{n^3} \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_n)$. Таким образом, справедлива оценка

$$|R'_n| \leq k'_n M_4, \quad M_4 = \sup_{[x_0, x_n]} |f^{(4)}(x)|, \quad (13)$$

где

$$k'_n = \frac{4(\zeta n - 6)}{n^3} \frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Формула (11) обобщает квадратурную формулу Милна, получающуюся из нее при $n=4$. Величина k'_n , фигурирующая в формуле (13), пропорциональна $\frac{4(\zeta n - 6)}{n^3}$. В случае формулы Милна, $k'_4 = 0,875 \frac{(b-a)^5}{2880}$.

Академия наук
Румынской Народной Республики
Клужский вычислительный
институт

(Поступило в редакцию 10.11.1963)

მათემატიკა

დ. იონესკუ

სიმფსონის, ნიუტონისა და მილნის კვადრატურული ფორმულების
ერთი განზოგადება

რეზიუმე

ამ შრომაში გამოყვანილია კვადრატურული ფორმულები (3), (6), (7) და (11), რომლებიდანაც გამომდინარეობენ სიმფსონის, ნიუტონისა და მილნის კვადრატურული ფორმულები.

დამოწმებული ლიტერატურა—ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа. М., 1953, 316, 322.