

L'extension d'une équation fonctionnelle de D. Pompeiu à l'aide d'une formule de dérivation numérique*

par D. V. IONESCU (Cluj)

1. On peut étendre l'équation fonctionnelle de Pompeiu [2]

$$(1) \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$$

de manière convenable, à l'aide d'une formule de dérivation numérique. Remarquons qu'on peut écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad [x_0, x_1; f] = f'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$$

et considérons la différence divisée

$$(3) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; f]$$

de la fonction $f \in C^n[a, b]$ sur les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_n$ où $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$.

Tchakaloff [3] a donné la représentation de la différence divisée (3) par une intégrale définie

$$(4) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) f^{(n)}(s) ds$$

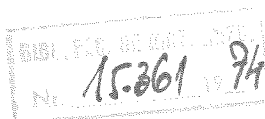
et nous avons retrouvé cette formule en déterminant la fonction φ par un problème aux limites [1]. Nous avons démontré que la fonction φ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n) et que

$$(5) \quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) ds = 1/n!.$$

2. Cela étant rappelé, considérons l'intégrale définie

$$(6) \quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) g(s) ds$$

* Communication au Colloque sur les équations fonctionnelles de Zakopane 9-13 Octobre 1967.



avec le poids $\varphi(s)$ de la formule (4) et la fonction $\psi \in C^1[x_0, x_n]$. En prenant un noeud $x \in (x_0, x_n)$, nous avons la formule de quadrature

$$(7) \quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) g(s) ds = \frac{g(x)}{n!} - \int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) g'(s) ds,$$

où pour le noeud donné x , le noyau $\psi(x, s)$ coïncide sur les intervalles $[x_0, x]$, $[x, x_n]$, avec les fonctions

$$\psi_1(x, s) = \int_{x_0}^s \varphi(t) dt, \quad \psi_2(x, s) = \int_{x_n}^s \varphi(t) dt.$$

Ce noyau a le point $s = x$, pour point de discontinuité et l'on a

$$\psi_1(x, x) - \psi_2(x, x) = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) ds = \frac{1}{n!};$$

la fonction $\psi_1(x, s)$ est négative sur l'intervalle $(x_0, x]$ et la fonction $\psi_2(x, s)$ est positive sur l'intervalle $[x, x_n)$.

3. Si l'on suppose que $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$ et si dans la formule (7) on remplace la fonction g , par $f^{(n)}$, nous aurons d'après la formule (4), une formule de dérivation numérique

$$(8) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} - \int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) f^{(n+1)}(s) ds.$$

Cette formule a la degré d'exactitude, au moins égal à n , car si l'on remplace la fonction f par $1, x, \dots, x^n$ le reste est nul. Le degré d'exactitude de la formule (8), dépend de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) ds.$$

Si l'on remplace dans la formule (8) la fonction $f(s)$ par

$$(s - x_0)(s - x_1) \dots (s - x_n) = s^{n+1} - (x_0 + x_1 + \dots + x_n)s^n + \dots$$

on en déduit que

$$(9) \quad \int_{x_0}^{x_n} \psi(x, s) ds = \frac{1}{n!} \left(x - \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1} \right).$$

Donc si

$$x \neq \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1},$$

la formule de dérivation numérique (8), a le degré d'exactitude égal à n .

Mais si

$$x = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1},$$

alors dans la formule de dérivation numérique (8), le reste R est nul aussi lorsque la fonction f est remplacée par x^{n+1} . Nous dirons que le noeud

$$\xi = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1}$$

est un noeud exceptionnel et que la formule de dérivation numérique (8), correspondante, est une *formule exceptionnelle*.

Nous déterminerons le reste de la formule exceptionnelle

$$(10) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + R$$

en supposant que $f \in C^{n+2}[x_0, x_n]$.

Posons pour abréger l'écriture $f^{(n)}(s) = g(s)$ et considérons de nouveau la formule de quadrature (7), pour $x = \xi$. On démontre que dans ce cas on a la formule de quadrature

$$(11) \quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) g(s) ds = \frac{g(\xi)}{n!} + \int_{x_0}^{x_n} \psi(s) g''(s) ds$$

où la fonction $\psi(s)$ coïncide sur les intervalles $[x_0, \xi]$, $[\xi, x_n]$ avec les fonctions

$$(12) \quad \psi_1(s) = \int_{x_0}^s (s-t)\varphi(t) dt, \quad \psi_2(s) = \int_{x_n}^s (s-t)\varphi(t) dt.$$

En remplaçant dans la formule (11), la fonction $g(s)$ par $f^{(n)}(s)$, et en tenant compte de la formule (4), nous sommes conduits à la formule exceptionnelle de dérivation numérique

$$(13) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + \int_{x_0}^{x_n} \psi(s) f^{(n+2)}(s) ds.$$

On démontre que la fonction $\psi(s)$ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n) , d'où il résulte que la *formule de dérivation numérique* (13), a le degré d'exactitude égal à $n+1$.

4. Cela étant, considérons l'équation fonctionnelle

$$(14) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)} \left(\frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1} \right)$$

qui est une extension de l'équation fonctionnelle de D. Pompeiu; pour $n = 1$, cette équation se réduit bien à l'équation (2).

Il est évident que l'équation (14) est vérifiée par tout polynôme de degré $n+1$, quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ où $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, puisque la formule de dérivation numérique (13) a le degré d'exactitude égal à $n+1$.

Inversement, toute solution $f \in C^{n+2}[x_0, x_n]$ de l'équation fonctionnelle (14), quels que soient les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ est un polynôme quelconque de degré $n+1$.

En effet en remplaçant dans la formule de dérivation numérique la fonction f par la solution f de l'équation fonctionnelle on doit avoir

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(s) f^{(n+2)}(s) ds = 0$$

et la fonction $\psi(s)$ étant positive sur l'intervalle (x_0, x_n) quels que soient x_0, x_n , il résulte que $f^{(n+2)}(s) = 0$, ce qui veut dire que f est un polynôme quelconque de degré $n+1$. Ainsi la solution f la plus générale de l'équation fonctionnelle (14) telle que $f \in C^{n+2}[x_0, x_n]$, quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ est un polynôme de degré $n+1$.

Travaux cités

- [1] D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Editura Tehnica, Bucuresti 1957.
- [2] D. Pompeiu, *Sur une équation fonctionnelle*, C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris, Tome 190 (1930), p. 1107.
- [3] L. Tchakaloff, *Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendung*, Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936.

Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1968



0,25