

E. 3717/59

ANALYSE NUMÉRIQUE. — *Extension de la formule de quadrature de Gauss à une classe de formules de cubature.* Note (*) de M. DUMITRU V. IONESCU, transmise par M. Henri Cartan.

1. On sait que pour une formule de quadrature avec les nœuds fixes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, où $\alpha < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \beta$, de la forme

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f dx = A_1 f(\xi_1) + A_2 f(\xi_2) + \dots + A_n f(\xi_n) + R[f],$$

on peut déterminer les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$ de manière que $R[x^i] = 0$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$. Alors si $f \in C^n[\alpha, \beta]$, on peut mettre le reste $R[f]$ sous la forme

$$(2) \quad R[f] = (-1)^n \int_{\alpha}^{\beta} \chi(x) f^{(n)}(x) dx,$$

où la fonction χ est une fonction monospline, définie par

$$(3) \quad \chi(x) = \frac{(x-\alpha)^n}{n!} - A_1 \frac{(x-\xi_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \dots - A_n \frac{(x-\xi_n)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La fonction χ coïncide sur les intervalles $[\alpha, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_n, \beta]$ avec les polynômes

$$(3') \quad \begin{cases} \chi_1(x) = \frac{(x-\alpha)^n}{n!}, \\ \chi_2(x) = \frac{(x-\alpha)^n}{n!} - A_1 \frac{(x-\xi_1)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \dots, \\ \chi_n(x) = \frac{(x-\alpha)^n}{n!} - A_1 \frac{(x-\xi_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \dots - A_n \frac{(x-\xi_n)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{cases}$$

On sait également que si l'on regarde dans la formule (1) les nœuds $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ comme indéterminés, on peut les déterminer de manière que $R[x^i] = 0$, pour $i = 0, 1, \dots, 2n-1$. Alors la formule (1) devient la formule de quadrature de Gauss, dont les nœuds sont les zéros du polynôme de Legendre de degré n attaché à l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et si $f \in C^{2n}[\alpha, \beta]$, on peut mettre son reste sous la forme

$$(4) \quad R[f] = \int_{\alpha}^{\beta} \chi(x) f^{(2n)}(x) dx,$$

où la fonction χ est donnée par la formule

$$(5) \quad \chi(x) = \frac{(x-\alpha)^{2n}}{(2n)!} - A_1 \frac{(x-\xi_1)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \dots - A_n \frac{(x-\xi_n)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

La fonction χ est positive sur l'intervalle (α, β) .

inv. 10.785/971

2. Nous avons étendu la formule de quadrature (1), à une classe de formules de cubature (1) de la forme

$$(6) \quad \iint f dx dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_0}^{y_{n+1}} f(x_i, y) dy + \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x, y_k) dx - \sum_{i,k=1}^n \nu_{ik} f(x_i, y_k) + R[f]$$

relativement au rectangle D ($x_0 \leq x \leq x_{n+1}$, $y_0 \leq y \leq y_{n+1}$), en supposant que la fonction f soit continue sur D, ainsi que ses dérivées partielles $\partial^{2p-1} f / \partial x^{p-1} \partial y^p$, $\partial^{2p-1} f / \partial x^p \partial y^{p-1}$, $\partial^{2p} f / \partial x^p \partial y^p$ pour $p = 1, 2, \dots, n$.

Nous avons démontré la formule (6), en déterminant une fonction φ par un problème aux limites, de manière que le reste $R[f]$ soit de la forme

$$(7) \quad R[f] = \iint_D \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n} \partial y^{2n}} dx dy.$$

Dans ce cas les λ_i et μ_k sont égaux aux coefficients de la formule de quadrature (1), correspondant à $\alpha = x_0$, $\beta = x_{n+1}$ et à $\alpha = y_0$, $\beta = y_{n+1}$.

On a démontré aussi que $\nu_{ik} = \lambda_i \mu_k$ pour $i, k = 1, 2, \dots, n$.

En désignant par $R_1[g]$ et $R_2[h]$ les restes des formules (1) pour $\alpha = x_0$, $\beta = x_{n+1}$ et $\alpha = y_0$, $\beta = y_{n+1}$, et en supposant que $g \in C^n[x_0, x_{n+1}]$ et $h \in C^n[y_0, y_{n+1}]$, on a

$$(8) \quad R_1[g] = (-1)^n \int_{x_0}^{x_{n+1}} \psi(x) g^{(n)}(x) dx, \quad R_2[h] = (-1)^n \int_{y_0}^{y_{n+1}} \theta(y) h^{(n)}(y) dy,$$

où nous avons noté par ψ et θ la fonction correspondante χ de la formule (4).

La fonction φ de la formule (7) coïncide sur le rectangle D_{ik} ($x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $y_k \leq y \leq y_{k+1}$) avec le polynôme $\varphi_{ik}(x, y)$ et nous ajoutons dans cette Note que

$$(9) \quad \varphi_{ik}(x, y) = \psi_i(x) \theta_k(y),$$

ce qui permet d'étudier le signe de la fonction φ sur le rectangle D.

3. Dans la présente Note nous donnons une extension de la formule de quadrature de Gauss à des formules de cubature de la forme (6).

Supposons que la fonction f soit continue sur D, ainsi que ses dérivées partielles $\partial^{2p-1} f / \partial x^{p-1} \partial y^p$, $\partial^{2p-1} f / \partial x^p \partial y^{p-1}$, $\partial^{2p} f / \partial x^p \partial y^p$ pour $p = 1, 2, \dots, 2n$ et que les x_i , y_k soient des indéterminées. On se propose de déterminer les x_i , y_k , λ_i , μ_k , ν_{ik} de manière que la formule de cubature (6), avec son reste, soit de la forme

$$(10) \quad \iint_D f dx dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_0}^{y_{n+1}} f(x_i, y) dy + \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x, y_k) dx - \sum_{i,k=1}^n \nu_{ik} f(x_i, y_k) + \iint_D \varphi \frac{\partial^{4n} f}{\partial x^{2n} \partial y^{2n}} dx dy.$$

Nous dirons que (10) est la *formule de cubature de Gauss*, dans la classe des formules de cubature de la forme (6). Nous avons démontré la formule (10) en déterminant la fonction φ par un problème aux limites, en employant la même méthode que nous avons donnée dans notre Note (1). Les résultats obtenus sont les suivants :

1° Les λ_i et x_i de la formule (10) sont les coefficients et les nœuds de la formule de quadrature de Gauss

$$(11) \quad \int_{x_0}^{x_{n+1}} g \, dx = \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) + \dots + \lambda_n g(x_n) + \int_{x_0}^{x_{n+1}} \psi(x) g^{(2n)}(x) \, dx$$

que nous avons écrite avec son reste lorsque $g \in C^{2n}[x_0, x_{n+1}]$. Il résulte que les nœuds x_i sont les zéros du polynôme de Legendre de degré n , attaché à l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$ et que les coefficients λ_i sont positifs.

2° De même, les μ_k et y_k de la formule (10) sont les coefficients et les nœuds de la formule de quadrature de Gauss

$$(12) \quad \int_{y_0}^{y_{n+1}} h \, dy = \mu_1 h(y_1) + \mu_2 h(y_2) + \dots + \mu_n h(y_n) + \int_{y_0}^{y_{n+1}} \theta(y) h^{(2n)}(y) \, dy$$

que nous avons écrite avec son reste correspondant à $h \in C^{2n}[y_0, y_{n+1}]$. Il résulte que les nœuds y_k sont les zéros du polynôme de Legendre de degré n , attaché à l'intervalle $[y_0, y_{n+1}]$ et que les coefficients μ_k sont positifs.

3° Les coefficients ν_{ik} de la formule (10) sont donnés par les formules

$$(13) \quad \nu_{ik} = \lambda_i \mu_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

et ils sont positifs.

4° Les fonctions ψ , θ et φ coïncident sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $[y_k, y_{k+1}]$ et sur le rectangle $D_{ik} (x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1})$ avec les polynômes $\psi_i(x)$, $\theta_k(y)$ et $\varphi_{ik}(x, y)$. Nous avons démontré grâce aux formules (13), qu'on a

$$(14) \quad \varphi_{i,k}(x, y) = \psi_i(x) \theta_k(y) \quad (i, k = 0, 1, \dots, n).$$

Les formules (14) sont importantes et elles démontrent que dans la formule de cubature (10) de Gauss, la fonction φ est positive sur le rectangle ouvert D .

(*) Séance du 6 octobre 1969.

(1) DUMITRU V. IONESCU, *Comptes rendus*, 266, série A, 1968, p. 1155.