

ANALYSE NUMÉRIQUE. — *Sur une classe de formules de cubature.*

Note (*) de M. DUMITRU V. JONESCU, transmise par M. Henri Cartan.

On connaît les belles méthodes de J. Radon ⁽¹⁾ et A. Ghizzelli ⁽¹⁾ pour construire des formules de quadrature et de cubature. Nous avons appliqué systématiquement ces méthodes dans nos travaux, depuis 1950 ⁽²⁾. Le but de cette Note est de donner une extension de ces méthodes pour construire, par un problème aux limites, une classe de formules de cubature.

1. Considérons le rectangle D, défini par les inégalités $x_0 \leq x \leq x_{n+1}$, $y_0 \leq y \leq y_{n+1}$, et les nœuds $M_{i,k}(x_i, y_k)$ où $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$, $y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1}$. On désigne par $D_{i,k}$ le rectangle défini par les inégalités $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $y_k \leq y \leq y_{k+1}$, où $i, k = 0, 1, \dots, n$. Nous attachons au rectangle D la fonction f continue, avec les dérivées partielles $\partial^{2p-1} f / \partial x^p \partial y^{p-1}$, $\partial^{2p-1} f / \partial x^{p-1} \partial y^p$, $\partial^{2p} f / \partial x^p \partial y^p$ pour $p = 1, 2, \dots, n$ et aux rectangles $D_{i,k}$ les fonctions $\varphi_{i,k}$ continues avec les dérivées partielles $\partial^{2p-1} \varphi_{i,k} / \partial x^p \partial y^{p-1}$, $\partial^{2p-1} \varphi_{i,k} / \partial x^{p-1} \partial y^p$, $\partial^{2p} \varphi_{i,k} / \partial x^p \partial y^p$, pour $p = 1, 2, \dots, n$. En appliquant une formule générale d'intégration par parties pour les intégrales doubles ⁽³⁾ à chaque couple de fonctions $f, \varphi_{i,k}$ et sur $D_{i,k}$ et en faisant la somme de toutes les formules écrites, on obtient la formule

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{i,k=0}^n \iint_{D_{i,k}} \varphi_{i,k} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dx dy \\
 &= \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ \left(\frac{\partial^{2r} \varphi_{0,0}}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_0, y_0)} + \left(\frac{\partial^{2r} \varphi_{n,n}}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_{n+1}, y_{n+1})} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\partial^{2r} \varphi_{0,n}}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_0, y_{n+1})} - \left(\frac{\partial^{2r} \varphi_{n,0}}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_{n+1}, y_0)} \right\} \\
 &+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial^{2r} (\varphi_{i,0} - \varphi_{i-1,0})}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_i, y_0)} \right. \\
 &\quad - \left(\frac{\partial^{2r} (\varphi_{i,n} - \varphi_{i-1,n})}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_i, y_{n+1})} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial^{2r} (\varphi_{0,k} - \varphi_{0,k-1})}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_0, y_k)} \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\partial^{2r} (\varphi_{n,k} - \varphi_{n,k-1})}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_{n+1}, y_k)} \right\} \\
 &+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^{2r} (\varphi_{i-1,k-1} + \varphi_{i,k} - \varphi_{i,k-1} - \varphi_{i-1,k})}{\partial x^r \partial y^r} \frac{\partial^{2(n-r-1)} f}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \right)_{(x_i, y_k)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{i,0}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{(x, y_0)} dx \\
& - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{i,n}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{(x, y_{n+1})} dx \\
& + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} (\varphi_{i,k} - \varphi_{i,k-1})}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{(x, y_k)} dx \\
& + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^n \int_{y_k}^{y_{k+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{0,k}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{(x_0, y)} dy \\
& - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^n \int_{y_k}^{y_{k+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{n,k}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{(x_{n+1}, y)} dy \\
& + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^n \int_{y_k}^{y_{k+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} (\varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{(x_i, y)} dy \\
& + \sum_{i,k=0}^n \iint_{D_{i,k}} \frac{\partial^{2n} \varphi_{i,k}}{\partial x^n \partial y^n} f dx dy.
\end{aligned}$$

2. Relativement à la formule générale (1), nous nous posons le

Problème aux limites. — Déterminer les solutions des équations aux dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{\partial^{2n} \varphi_{i,k}}{\partial x^n \partial y^n} = 1,$$

où $i, k = 0, 1, \dots, n$, satisfaisant aux conditions aux limites :

$$1^\circ \quad \left(\frac{\partial^{2n-1} \varphi_{0,k}}{\partial x^{n-1} \partial y^n} \right)_{(x_0, y)} = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2n-1} (\varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-1} \partial y^n} \right)_{(x_i, y)} = -\lambda_i, \quad \left(\frac{\partial^{2n-1} \varphi_{n,k}}{\partial x^{n-1} \partial y^n} \right)_{(x_{n+1}, y)} = 0$$

pour $k = 0, 1, \dots, n$ et $i = 1, 2, \dots, n$.

$$2^\circ \quad \left(\frac{\partial^{2n-1} \varphi_{i,0}}{\partial x^n \partial y^{n-1}} \right)_{(x, y_0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2n-1} (\varphi_{i,k} - \varphi_{i,k-1})}{\partial x^n \partial y^{n-1}} \right)_{(x, y_k)} = -\mu_k, \quad \left(\frac{\partial^{2n-1} \varphi_{i,n}}{\partial x^n \partial y^{n-1}} \right)_{(x, y_{n+1})} = 0$$

pour $i = 0, 1, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
3^\circ \quad & \left(\frac{\partial^{2(n-1)} \varphi_{0,0}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_0, y_0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2(n-1)} \varphi_{0,n}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_0, y_{n+1})} = 0, \\
& \left(\frac{\partial^{2(n-1)} \varphi_{n,0}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_{n+1}, y_0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2(n-1)} \varphi_{n,n}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_{n+1}, y_{n+1})} = 0, \\
& \left(\frac{\partial^{2(n-1)} (\varphi_{i,0} - \varphi_{i-1,0})}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_i, y_0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2(n-1)} (\varphi_{i,n} - \varphi_{i-1,n})}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_i, y_{n+1})} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \\
& \left(\frac{\partial^{2(n-1)} (\varphi_{0,k} - \varphi_{0,k-1})}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_0, y_k)} = 0, \quad \left(\frac{\partial^{2(n-1)} (\varphi_{n,k} - \varphi_{n,k-1})}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_{n+1}, y_k)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \\
& \left(\frac{\partial^{2(n-1)} (\varphi_{i-1,k-1} + \varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k} - \varphi_{i,k-1})}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \right)_{(x_i, y_k)} = \nu_{i,k} \quad (i, k=1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

On démontre que la solution du problème aux limites est donnée par les formules

$$(5) \quad \frac{\partial^{2(n-r)} \varphi_{j,l}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r}} = \frac{1}{(r!)^2} (x-x_0)^r (y-y_0)^r \\ - \frac{1}{(r-1)! r!} \{ [\mu_1(y-y_1)^{r-1} + \dots + \mu_l(y-y_l)^{r-1}] (x-x_0)^r \\ + [\lambda_1(x-x_1)^{r-1} + \dots + \lambda_j(x-x_j)^{r-1}] (y-y_0)^r \} \\ + \frac{1}{[(r-1)!]^2} \sum_{h=1}^l [\nu_{1,h}(x-x_1)^{r-1} + \dots + \nu_{j,h}(x-x_j)^{r-1}] (y-y_h)^{r-1}$$

pour $j, l = 1, 2, \dots, n$ et $r = 1, 2, \dots, n$.

4. En remplaçant dans la formule (1) les fonctions $\varphi_{i,k}$ par la solution du problème aux limites, nous sommes conduits à la formule de cubature

$$(6) \quad \iint_D f dx dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_0}^{y_{n+1}} f(x_i, y) dy + \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x, y_k) dx \\ - \sum_{i,k=1}^n \nu_{i,k} f(x_i, y_k) + \iint_D \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dx dy$$

qui fait l'objet de cette Note, où la fonction φ coïncide avec les fonctions $\varphi_{i,k}$ sur les rectangles $D_{i,k}$.

On rencontre les systèmes d'équations (3) dans la théorie des formules de quadrature. Les formules (6) forment une classe spéciale de formules de cubature dont le reste est exprimé par

$$(7) \quad R = \iint_D \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dx dy,$$

où intervient la $n^{\text{ième}}$ dérivée totale de la fonction f .

De la formule (6), on peut déduire par partage une formule d'approximation pour calculer une intégrale double, avec une erreur aussi faible que possible.

Le rapprochement que nous avons fait entre les formules de quadrature et les formules de cubature de la forme (6) pose de nouveaux problèmes, que nous traiterons dans d'autres travaux.

Nous avons communiqué la formule de cubature (6) au Colloque sur la théorie de l'approximation des fonctions de Cluj, 15-20 septembre 1967.

(*) Séance du 5 juin 1968.

(1) A. GHIZZETTI, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, 1960, p. 237-268.

(2) D. V. JONESCU, *Sur une formule de quadrature* (*Lucrarile sesiunei generale stiintifice*, 2-12 Junie 1950, Bucarest, Acad. de la R. P. R., p. 238-243); *Quadratures numériques*, Editura tehnica, Bucarest, 1957; *Mathematica*, Cluj, 3, 1961, p. 59-78 et 230-271.

(3) M. NICOLESCU, *Contribulini la o analiza de tip hiperbolic a planului* (*Studii și cercetari matematice*, Bucarest, 1952, p. 7-51).

(4) J. RADON, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 1935, p. 389-396.

(Institut de Calcul,
Cluj, République Socialiste de Roumanie.)



0,50