

ANALYSE NUMÉRIQUE. — *Extension d'une formule de quadrature de type Gauss à une classe de formules de cubature.* Note (*) de M. DUMITRU V IONESCU, transmise par M. Henri Cartan.

Dans une Note récente (1) nous avons donné une formule de cubature qui est une extension de la formule de quadrature de Gauss. Dans la présente Note nous donnons une extension d'une formule de quadrature qu'on appelle généralement la formule de quadrature de type Gauss.

1. Soit g une fonction de la classe $C^{2n+s}[x_0, x_{n+1}]$ et considérons, pour une telle fonction, la formule de quadrature de type Gauss

$$(1) \quad \int_{x_0}^{x_{n+1}} g(x) dx = \lambda_0^{(0)} g(x_0) - \lambda_0^{(1)} g'(x_0) + \dots + (-1)^{s-1} \lambda_0^{(s-1)} g^{(s-1)}(x_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i) + R_1,$$

où le reste R_1 est donné par la formule

$$(2) \quad R_1 = (-1)^{2n+s} \int_{x_0}^{x_{n+1}} \psi(x) g^{(2n+s)}(x) dx.$$

On sait (2) que les coefficients $\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(s-1)}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et les nœuds x_1, x_2, \dots, x_n sont liés par les équations

$$(3) \quad \lambda_0^{(0)} x_0^j + j \lambda_0^{(1)} x_0^{j-1} + \dots + j(j-1) \dots 1 \lambda_0^{(j-1)} + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j = \frac{x_{n+1}^{j+1} - x_0^{j+1}}{j+1}$$

pour $j = 0, 1, \dots, s-1$ et

$$(4) \quad \lambda_0^{(0)} x^j + j \lambda_0^{(1)} x^{j-1} + \dots + j(j-1) \dots (j-s+2) \lambda_0^{(s-1)} x_0^{s-j+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j = \frac{x_{n+1}^{j+1} - x_0^{j+1}}{j+1}$$

pour $j = s, s+1, \dots, s+2n-1$.

Les nœuds x_1, x_2, \dots, x_n de la formule (1) sont les zéros réels, distincts et compris entre x_0 et x_{n+1} , du polynôme de Jacobi qui diffère par un facteur constant du polynôme

$$(5) \quad J_n(x) = (x-x_0)^{-s} \frac{d^n}{dx^n} [(x-x_0)^{n+s} (x_{n+1}-x)^n].$$

La fonction $\psi(x)$ de la formule (2) est donnée par la formule

$$(6) \quad \psi(x) = \frac{(x-x_0)^{2n+s}}{(2n+s)!} - \lambda_0^{(0)} \frac{(x-x_0)^{2n+s-1}}{(2n+s-1)!} + \dots + (-1)^s \lambda_0^{(s-1)} \frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{(x-x_i)_+^{2n+s-1}}{(2n+s-1)!}$$

et l'on démontre qu'elle est positive sur l'intervalle (x_0, x_{n+1}) .

inv. 10.784/1972

On peut considérer une formule de quadrature de type Gauss pour une fonction h de la classe $C^{2n+s}[y_0, y_{n+1}]$, c'est-à-dire une formule de la forme

$$(7) \quad \int_{y_0}^{y_{n+1}} h(y) dy = \mu_0^{(0)} h(y_0) - \mu_0^{(1)} h'(y_0) + \dots \\ + (-1)^{s-1} \mu_0^{(s-1)} h^{(s-1)}(y_0) + \sum_{k=1}^n \mu_k h(y_k) + R_2,$$

où le reste R_2 est donné par la formule

$$(8) \quad R_2 = (-1)^{2n+s} \int_{y_0}^{y_{n+1}} \theta(y) h^{(2n+s)}(y) dy.$$

Les coefficients $\mu_0^{(0)}, \mu_0^{(1)}, \dots, \mu_0^{(s-1)}, \mu_1, \dots, \mu_n$ et les nœuds y_1, y_2, \dots, y_n de la formule (7) sont liés par les équations (3') et (4') analogues aux équations (3) et (4), où les $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}, \lambda_0^{(0)}, \dots, \lambda_0^{(s-1)}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont remplacés par $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}, \mu_0^{(0)}, \dots, \mu_0^{(s-1)}, \mu_1, \dots, \mu_n$. Les nœuds y_1, y_2, \dots, y_n sont les zéros réels distincts et compris entre y_0 et y_{n+1} du polynôme de Jacobi (5') qu'on obtient en remplaçant x, x_0, x_{n+1} par y, y_0, y_{n+1} . En ce qui concerne la fonction $\theta(y)$, elle est donnée par une formule analogue à la formule (6), c'est-à-dire

$$(9) \quad \theta(y) = \frac{(y - y_0)^{2n+s}}{(2n+s)!} - \mu_0^{(0)} \frac{(y - y_0)^{2n+s-1}}{(2n+s-1)!} + \dots \\ + \mu_0^{(s-1)} \frac{(y - y_0)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{(y - y_k)^{2n+s-1}}{(2n+s-1)!}.$$

On démontre que la fonction θ est positive sur l'intervalle (y_0, y_{n+1}) .

2. L'extension de la formule de quadrature (1) ou (7) à des formules de cubature pour les fonctions de deux variables se fait de la manière suivante :

Considérons une fonction f continue sur le rectangle $D(x_0 \leq x \leq x_{n+1}, y_0 \leq y \leq y_{n+1})$ et supposons que ses dérivées partielles $\partial^{2p-1} f / \partial x^{p-1} \partial y^p, \partial^{2p-1} f / \partial x^p \partial y^{p-1}, \partial^{2p} f / \partial x^p \partial y^p$ soient continues sur D pour $p = 1, 2, \dots, 2n + s$.

On introduit les indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n et y_1, y_2, \dots, y_n , où

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}, \quad y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1},$$

et à chaque rectangle $D_{ik}(x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_k \leq y \leq y_{k+1})$ on attache une fonction φ_{ik} , telle que $\partial^{2(2n+s)} \varphi_{ik} / \partial x^{2n+s} \partial y^{2n+s} = 1$, où $i, k = 0, 1, \dots, n$. On applique à chaque couple de fonctions (f, φ_{ik}) et au rectangle D_{ik} la formule d'intégration par parties généralisée comme dans nos travaux [(1) et (3)] et on ajoute toutes ces formules. On peut déterminer les φ_{ik} et les nœuds $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ par des problèmes aux limites de manière que la somme de toutes ces formules ait une forme simple. C'est de cette manière qu'on arrive à la formule de cubature qu'on a

en vue dans cette Note et qui a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \iint_0 f dx dy = & \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{y_0}^{y_{i+1}} f(x_i, y) dy + \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{x_0}^{x_{k+1}} f(x, y_k) dx \\
 & - \sum_{i,k=1}^n \nu_{ik} f(x_i, y_k) - \sum_{i=1}^n \lambda_{i0} f(x_i, y_0) \\
 & - \sum_{k=1}^n \mu_{0k} f(x_0, y_k) - \sum_{j=0}^{s-1} \gamma_{00}^{(j)} \frac{\partial^{2j} f}{\partial x^j \partial y^j} (x_0, y_0) \\
 & + \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j \mu_0^{(j)} \left[\int_{x_0}^{x_1} p_1^{(s-j-1)}(x) \frac{\partial^{2j} f}{\partial x^j \partial y^j} (x, y_0) dx \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_{1,i}^{(s-j-1)}(x) \frac{\partial^{2j} f}{\partial x^j \partial y^j} (x, y_0) dx \right] \\
 & + \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j \lambda_0^{(j)} \left[\int_{y_0}^{y_1} p_2^{(s-j-1)}(y) \frac{\partial^{2j} f}{\partial x^j \partial y^j} (x_0, y) dy \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{y_k}^{y_{k+1}} q_{2,k}^{(s-j-1)}(y) \frac{\partial^{2j} f}{\partial x^j \partial y^j} (x_0, y) dy \right] + R.
 \end{aligned}$$

Les éléments qui entrent dans la formule (10) sont les suivants :

1° Les nœuds x_i et y_k sont les nœuds x_i de la formule de type Gauss (1) et les nœuds y_k de la formule de type Gauss (7).

2° Les coefficients λ_i et μ_k sont les coefficients λ_i de la formule (1) et les coefficients de la formule (7).

3° On a $\nu_{ik} = \lambda_i \mu_k$ pour $i, k = 1, 2, \dots, n$.

4° Les coefficients λ_{i0} , μ_{0k} , $\gamma_{00}^{(j)}$ de la formule (10) sont liés aux coefficients $\lambda_0^{(0)}, \dots, \lambda_0^{(s-1)}$ de la formule (1) et aux coefficients $\mu_0^{(0)}, \dots, \mu_0^{(s-1)}$ de la formule (7) par les relations

$$(11) \quad \lambda_{i0} = \lambda_i \mu_0^{(0)}; \quad \mu_{0,k} = \lambda_0^{(0)} \mu_k; \quad \gamma_{00}^{(j)} = \lambda_0^{(j)} \mu_0^{(j)}$$

pour $i, k = 1, 2, \dots, n$ et $j = 0, 1, \dots, s-1$.

5° Les fonctions $p_1(x)$, $p_2(y)$ et $q_{1,i}(x)$, $q_{2,k}(y)$ sont données par les formules

$$(12) \quad \begin{cases} p_1(x) = \frac{(x-x_0)^{s-1}}{(s-1)!} - \lambda_0^{(0)} \frac{(x-x_0)^{s-2}}{(s-2)!} + \dots + (-1)^{s-1} \lambda_0^{(s-2)}, \\ p_2(y) = \frac{(y-y_0)^{s-1}}{(s-1)!} - \mu_0^{(0)} \frac{(y-y_0)^{s-2}}{(s-2)!} + \dots + (-1)^{s-1} \mu_0^{(s-2)} \end{cases} \quad \begin{matrix} \zeta = 2 \\ \zeta = 2 \end{matrix}$$

et

$$(13) \quad q_{1,i}(x) = \frac{(x-x_i)^{s-2}}{(s-2)!}; \quad q_{2,k}(y) = \frac{(y-y_k)^{s-2}}{(s-2)!}.$$

En ce qui concerne le reste R de la formule (10), on a

$$(14) \quad R = \iint_D \varphi \frac{\partial^{2(2n+s)} f}{\partial x^{2n+s} \partial y^{2n+s}} dx dy,$$

où la fonction φ coïncide sur chaque rectangle D_{ik} avec la fonction correspondante φ_{ik} . Les problèmes aux limites qui déterminent φ_{ik} montrent que

$$(15) \quad \varphi_{ik}(x, y) = \psi_i(x) \theta_k(y),$$

ce qui implique que la fonction φ est positive sur le rectangle ouvert D .

Les formules de cubature (10) forment une classe pour lesquelles le reste R a la forme (14).

(*) Séance du 21 septembre 1970.

(1) D. V. IONESCU, *Comptes rendus*, 266, série A, 1968, p. 1155.

(2) D. V. IONESCU, *Studii și cerc. știunț. Acad. R. P. R. Cluj*, 1951, II, p. 16.

(3) D. V. IONESCU, *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 655.

(Université Babeș-Bolyai,
Cluj,
République Socialiste de Roumanie.)

