

E-3717/112

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XV, N° 9

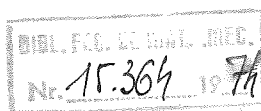
1970

HOMMAGE À
G. VRANCEANU
POUR SON 70^e ANNIVERSAIRE

TIRAGE À PART



EDITIONS DE L'ACADEMIE DE LA REPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE



LA DIFFÉRENCE DIVISÉE D'UNE FONCTION DE TROIS VARIABLES ET SA REPRÉSENTATION PAR UNE INTÉGRALE TRIPLE

PAR

D. V. IONESCU

(Cluj)

On généralise la formule d'intégration par parties pour les intégrales doubles, donnée par l'Acad. M. Nicolescu, à des intégrales triples. La formule trouvée est utilisée à définir la différence divisée d'une fonction de trois variables et à donner sa représentation par une intégrale triple.

La formule classique d'intégration par parties a été étendue par l'Acad. M. Nicolescu [5] à des intégrales doubles en 1952. Nous avons utilisé cette extension dans nos travaux sur une classe de formules de cubature [1], [2].

Le but de ce travail est de donner une nouvelle extension de la formule d'intégration par parties à des intégrales triples et même multiples en général et de faire une application qui nous conduira par un problème aux limites à une extension de la notion de différence divisée d'ordre n , d'une fonction, bien connue dans le cas d'une seule variable [3], au cas de trois variables et à sa représentation par une intégrale triple.

Dans cette note nous donnons seulement les résultats de ce travail.

§ 1. L'EXTENSION DE LA FORMULE D'INTÉGRATION PAR PARTIES

1.1. La formule d'intégration par parties pour une intégrale double donnée par l'Acad. M. Nicolescu sera écrite dans ce travail sous la forme

$$(1.1) \quad \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy = \varphi(x, y) f(x, y) \Big|_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} - \\ - \sum \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, y) f(x, y) \Big|_{y_1}^{y_2} dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} f dx dy$$

avec les hypothèses faites dans le travail déjà cité et avec les notations suivantes

$$\begin{aligned}
 F(x, y) \Big|_{x_1}^{x_2} &= F(x_2, y) - F(x_1, y) \\
 (1.2) \quad F(x, y) \Big|_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} &= \left(F(x, y) \Big|_{x_1}^{x_2} \right) \Big|_{y_1}^{y_2} = F(x_2, y_2) + F(x_1, y_1) - \\
 &\quad - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) \\
 \sum \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} f \Big|_{y_1}^{y_2} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, y) f(x, y) \Big|_{y_1}^{y_2} dx + \\
 &\quad + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} (x, y) f(x, y) \Big|_{x_1}^{x_2} dy.
 \end{aligned}$$

1.2. Considérons les fonctions f et φ de trois variables x, y, z , définie dans le rectangle défini par

$$\Delta: \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2, \quad z_1 \leq z \leq z_2.$$

Nous supposons les fonctions f et φ continues sur Δ , avec leurs dérivées partielles

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad &\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \\
 &\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z}
 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, nous avons la formule d'intégration par parties pour les intégrales triples

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad &\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \varphi \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz = \varphi(x, y, z) f(x, y, z) \Big|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} - \\
 &- \sum \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, y, z) f(x, y, z) \Big|_{y_1, z_1}^{y_2, z_2} dx + \\
 &+ \sum \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (x, y, z) f(x, y, z) \Big|_{z_1}^{z_2} dx dy - \\
 &- \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z} f dx dy dz
 \end{aligned}$$

où les notations sont analogues aux notations (1.2).

Nous avons donné aussi l'extension de la formule (1.4) au cas des intégrales multiples en général. Pour les applications qu'on a en vue dans ce travail, nous nous contentons de la formule (1.4).

1.3. On peut déduire de la formule (1.4) la formule d'intégration par parties généralisée pour les intégrales multiples. Supposons que les fonctions f et φ soient continues sur Δ , avec leurs dérivées partielles

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^{3p-2} f}{\partial x^p \partial y^{p-1} \partial z^{p-1}}, \frac{\partial^{3p-2} f}{\partial x^{p-1} \partial y^p \partial z^{p-1}}, \frac{\partial^{3p-2} f}{\partial x^{p-1} \partial y^{p-1} \partial z^p}, \frac{\partial^{3p-1} f}{\partial x^{p-1} \partial y^p \partial z^p}, \\ & \frac{\partial^{3p-1} f}{\partial x^p \partial y^{p-1} \partial z^p}, \frac{\partial^{3p-1} f}{\partial x^p \partial y^p \partial z^{p-1}}, \frac{\partial^{3p} f}{\partial x^p \partial y^p \partial z^p}; \\ & \frac{\partial^{3p-2} \varphi}{\partial x^p \partial y^{p-1} \partial z^{p-1}}, \frac{\partial^{3p-2} \varphi}{\partial x^{p-1} \partial y^p \partial z^{p-1}}, \frac{\partial^{3p-2} \varphi}{\partial x^{p-1} \partial y^{p-1} \partial z^p}, \frac{\partial^{3p-1} \varphi}{\partial x^{p-1} \partial y^p \partial z^p}, \\ & \frac{\partial^{3p-1} \varphi}{\partial x^p \partial y^{p-1} \partial z^p}, \frac{\partial^{3p-1} \varphi}{\partial x^p \partial y^p \partial z^{p-1}}, \frac{\partial^{3p} \varphi}{\partial x^p \partial y^p \partial z^p} \end{aligned}$$

pour $p = 1, 2, \dots, n$.

Alors on a la formule d'intégration par parties généralisée

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \varphi \frac{\partial^{3n} f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} dx dy dz = \\ & = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \frac{\partial^{3(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} \Big|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} - \\ & - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \sum \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^{3(n-r-1)+1} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} \Big|_{y_1, z_1}^{y_2, z_2} + \\ & + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \sum \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^{3(n-r-1)+2} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} \Big|_{z_1}^{z_2} dx dy + \\ & + (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^{3n} \varphi}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} f dx dy dz. \end{aligned}$$

1.4. Considérons le parallélépipède D , défini par les inégalités

$$D: \quad x_0 \leq x \leq x_n; \quad y_0 \leq y \leq y_n; \quad z_0 \leq z \leq z_n$$

et le réseau de nœuds $M_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$, où

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n; \quad y_0 < y_1 < \dots < y_n; \quad z_0 < z_1 < \dots < z_n.$$

Nous désignons par D_{ijk} le parallélépipède défini par les inégalités

$$D_{ijk}: x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}, \quad z_k \leq z \leq z_{k+1},$$

où $i, j, k = 0, 1, \dots, n-1$.

A chaque parallélépipède D_{ijk} associons une fonction φ_{ijk} continue sur D_{ijk} avec ses dérivées partielles qui figurent sur la suite (1.5). De même au parallélépipède D , nous associons une fonction f continue sur D avec ses dérivées partielles qui figurent sur la suite (1.5). Alors on peut appliquer à chaque parallélépipède D_{ijk} et aux fonctions f, φ_{ijk} la formule fondamentale (1.6). En ajoutant toutes ces formules membre à membre, l'on obtient la formule

$$(1.7) \quad \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \iiint_{D_{ijk}} \varphi_{ijk} \frac{\partial^3 f}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} dx dy dz = \mathcal{P}[f] + (-1)^n \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \iiint_{D_{ijk}} \frac{\partial^3 \varphi_{ijk}}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} f dx dy dz$$

où nous avons désigné par $\mathcal{P}[f]$ la somme suivante

$$(1.8) \quad \mathcal{P}[f] = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \frac{\partial^{3(n-r-1)} \varphi_{ijk}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} (x, y, z) \times \\ \times \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y, z) \Big|_{x_i, y_j, z_k}^{x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1}} - \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \times \\ \times \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-2} \varphi_{ijk}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} (x, y, z) \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y, z) \Big|_{y_j, z_k}^{y_{j+1}, z_{k+1}} dx - \\ - \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-2} \varphi_{ijk}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} (x, y, z) \times \\ \times \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y, z) \Big|_{x_i, z_k}^{x_{i+1}, z_{k+1}} dy - \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \times \\ \times \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-2} \varphi_{ijk}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r}} (x, y, z) \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y, z) \Big|_{x_i, y_j}^{x_{i+1}, y_{j+1}} dz + \\ + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-1} \varphi_{ijk}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r}} (x, y, z) \times \\ \times \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y, z) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} dy dz + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-1} \varphi_{ijk}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r}} (x, y, z) \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y, z) \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} dx dz + \\
& + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-1} \varphi_{ijk}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} (x, y, z) \times \\
& \times \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y, z) \Big|_{z_k}^{z_{k+1}} dx dy.
\end{aligned}$$

On peut aussi ordonner de la manière suivante les termes de $\mathcal{P}[f]$

$$\begin{aligned}
(1.9) \quad \mathcal{P}[f] = & \sum_{i,j,k=0}^n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \frac{\partial^{3(n-r-1)}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [(\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j-1,k} - \\
& - \varphi_{i,j-1,k} - \varphi_{i-1,j,k}) - (\varphi_{i,j,k-1} + \varphi_{i-1,j-1,k-1} - \varphi_{i,j-1,k-1} - \varphi_{i-1,j,k-1})] \times \\
& \times \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x_i, y_j, z_k) + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} \times \\
& \times [\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k-1} - \varphi_{i,j,k-1} - \varphi_{i,j-1,k}]_{x, y_j, z_k} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x, y_j, z_k) dx + \\
& + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} \times \\
& \times [\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k-1} - \varphi_{i,j,k-1} - \varphi_{i-1,j,k}]_{x_i, y, z_k} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x_i, y, z_k) dy + \\
& + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r}} \times \\
& \times [\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j-1,k} - \varphi_{i,j-1,k} - \varphi_{i-1,j,k}]_{x_i, y_j, z} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x_i, y_j, z) dz + \\
& + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r}} \times \\
& \times [\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}]_{x_i, y, z} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r} (x_i, y, z) dy dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r}} \times \\
& \times [\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j-1,k}]_{x,y,z} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r}(x, y, z) dx dz + \\
& + \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} \times \\
& \times [\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j,k-1}]_{x,y,z_k} \frac{\partial^{3r} f}{\partial x^r \partial y^r \partial z^r}(x, y, z_k) dx dy,
\end{aligned}$$

en faisant la convention de considérer la fonction $\varphi_{i,j,k}$ comme étant nulle lorsque au moins un des indices i, j, k est négatif ou égal à n .

§ 2. PROBLÈME AUX LIMITES ET DIFFÉRENCES DIVISÉES D'UNE FONCTION DE TROIS VARIABLES

2.1. Relativement à la formule (1.7) et à l'expression (1.9) de $\mathcal{P}[f]$ nous traiterons un problème aux limites qui va nous conduire à la différence divisée d'ordre n d'une fonction f de trois variables x, y, z et à sa représentation par une intégrale triple, lorsque la fonction f satisfait aux conditions qui ont été précisées dans l'alinéa 1.3.

Problème aux limites. Déterminer les solutions des équations aux dérivées partielles

$$(2.1) \quad \frac{\partial^{3n} \varphi_{ijk}}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n} = 0,$$

pour $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ satisfaisant aux conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad & \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r}} [\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}]_{x_i,y,z} = 0, \\
& \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r}} [\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j-1,k}]_{x,y,z_k} = 0, \\
& \frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j,k-1}]_{x,y,z_k} = 0.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k-1} - \varphi_{i,j,k-1} - \varphi_{i,j-1,k}]_{x,y,z_k} = 0,$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k-1} - \varphi_{i-1,j,k} - \varphi_{i,j,k-1}]_{x_i,y,z_k} = 0,$$

$$\frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j-1,k} - \varphi_{i,j-1,k} - \varphi_{i-1,j,k}]_{x_i,y_j,z} = 0.$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial^{3(n-r-1)}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [(\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j-1,k} - \varphi_{i,j-1,k} - \varphi_{i-1,j,k}) -$$

$$- (\varphi_{i,j,k-1} + \varphi_{i-1,j-1,k-1} - \varphi_{i,j-1,k-1} - \varphi_{i-1,j,k-1})]_{x_i,y_j,z_k} = \begin{cases} C_{ijk} & \text{si } r=0, \\ 0 & \text{si } r \neq 0, \end{cases}$$

pour $i, j, k, = 0, 1, \dots, n-1$ et $r=0, 1, \dots, n-1$.

En plus, les fonctions $\varphi_{i,j,k}$ doivent satisfaire à des conditions supplémentaires sur les faces $x = x_n, y = y_n, z = z_n$ du parallélépipède D , que nous désignons par $[x_n, y_j, z_k; r], [x_i, y_n, z_k; r], [x_i, y_j, z_n; r]$. Les conditions $[x_n, y_j, z_k; r]$ sont

$$\frac{\partial^{3(n-r)-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r}} [\varphi_{n-1,j,k}]_{x_n,y,z} = 0,$$

$$\frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial z^{n-r-1} \partial y^{n-r} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{n-1,j,k-1} - \varphi_{n-1,j,k}]_{x_n,y,z_k} = 0,$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial^{3(n-r)-2}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r}} [\varphi_{n-1,j-1,k} - \varphi_{n-1,j,k}]_{x_n,y_j,z} = 0,$$

$$\frac{\partial^{3(n-r-1)}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1} \partial z^{n-r-1}} [\varphi_{n-1,j-1,k} + \varphi_{n-1,j,k-1} - \varphi_{n-1,j,k} -$$

$$- \varphi_{n-1,j-1,k-1}]_{x_n,y_j,z_k} = \begin{cases} C_{njk} & \text{si } r=0, \\ 0 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$$

pour $j, k = 0, 1, \dots, n$ et $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Il résulte de ces systèmes que

$$(2.14) \quad C_{ijk} = (-1)^{i+j+k} H V(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) V(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) V(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n),$$

où H est une constante et $V(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \dots$, sont des déterminants de Vandermonde.

Si l'on remplace dans la formule (1.9) $\varphi_{i,j,k}$ par la solution du problème (P_{ijk}) , nous avons

$$(2.15) \quad \mathcal{P}[f] = (-1)^n \sum_{i,j,k=0}^n C_{ijk} f(x_i, y_j, z_k)$$

et en remplaçant C_{ijk} par les formules (2.14) et en écrivant que $\mathcal{P}[x^n y^n z^n] = 1$ nous avons une équation qui donne

$$(2.16) \quad H = V^{-1}(x_0, \dots, x_n) V^{-1}(y_0, \dots, y_n) V^{-1}(z_0, \dots, z_n).$$

Finalement on a l'expression de la différence divisée (2.10) par la formule

$$(2.17) \quad \begin{bmatrix} x_0, x_1, \dots, x_n \\ y_0, y_1, \dots, y_n; f \\ z_0, z_1, \dots, z_n \end{bmatrix} = (-1)^{3n} \sum_{i,j,k=0}^n \lambda_i \mu_j \nu_k f(x_i, y_j, z_k),$$

avec

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \lambda_i &= (-1)^i \frac{V(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{V(x_0, x_1, \dots, x_n)}; \\ \mu_j &= (-1)^j \frac{V(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)}{V(y_0, y_1, \dots, y_n)}; \\ \nu_k &= (-1)^k \frac{V(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)}{V(z_0, z_1, \dots, z_n)}. \end{aligned}$$

2.4. Les formules (2.14) montrent que

$$(2.19) \quad C_{ijk} = \lambda_i \mu_j \nu_k,$$

pour $i, j, k = 0, 1, \dots, n$ et les formules (2.12) montrent alors que l'on a

$$\begin{aligned}
 \varphi_{i,j,k} &= \left[\lambda_0 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \lambda_i \frac{(x-x_i)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \times \\
 (2.20) \quad &\times \left[\mu_0 \frac{(y-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \mu_j \frac{(y-y_j)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \times \\
 &\times \left[\nu_0 \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \nu_k \frac{(z-z_k)^{n-1}}{(n-1)!} \right].
 \end{aligned}$$

Les formules (2.19) et (2.20) montrent une étroite liaison entre la représentation de la différence divisée (2.17) d'une fonction de trois variables par une intégrale triple et la représentation intégrale des fonctions d'une variable.

Considérons les fonctions $u \in C^n[x_0, x_n]$, $v \in C^n[y_0, y_n]$, $w \in C^n[z_0, z_n]$ et les formules qui donnent leurs différences divisées sur les nœuds $x_0, x_1, \dots, x_n$; $y_0, y_1, \dots, y_n$; $z_0, z_1, \dots, z_n$ par des intégrales définies.

$$\begin{aligned}
 [x_0, x_1, \dots, x_n; u] &= (-1)^n [\lambda_0 u(x_0) + \dots + \lambda_n u(x_n)] = \\
 &= \int_{x_0}^{x_n} \psi(x) u^{(n)}(x) dx, \\
 [y_0, y_1, \dots, y_n; v] &= (-1)^n [\mu_0 v(y_0) + \dots + \mu_n v(y_n)] = \\
 (2.21) \quad &= \int_{y_0}^{y_n} \theta(y) v^{(n)}(y) dy, \\
 [z_0, z_1, \dots, z_n; w] &= (-1)^n [\nu_0 w(z_0) + \dots + \nu_n w(z_n)] = \\
 &= \int_{z_0}^{z_n} \chi(z) w^{(n)}(z) dz.
 \end{aligned}$$

Dans les seconds membres, les fonctions ψ, θ, χ sont les *fonctions splines*, définies par les formules

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \lambda_0 \frac{(x-x_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \lambda_n \frac{(x-x_n)_+^{n-1}}{(n-1)!}, \\
 (2.22) \quad \theta(y) &= \mu_0 \frac{(y-y_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \mu_n \frac{(y-y_n)_+^{n-1}}{(n-1)!}, \\
 \chi(z) &= \nu_0 \frac{(z-z_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \nu_n \frac{(z-z_n)_+^{n-1}}{(n-1)!}.
 \end{aligned}$$

$\mathcal{C} = \{Z_2^2, \{E_\alpha\}_{\alpha=0,1,2,3}, \theta\}$, la fonction θ étant définie par

$$(3) \quad E_1^2 = -E_2^2 = E_3^2 = E_0 \quad (\text{ou } -E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_0), \quad E_3 = E_1 E_2 = -E_2 E_1.$$

Les résultats concernant les graduations spéciales des formes réelles de Jordan sont :

Dans le cas du type A , $\Gamma_0 = \Gamma$ et donc les graduations spéciales sont justement les graduations *maximales*. Les graduations maximales des formes réelles de Jordan de type A_I sont, à une R -équivalence [9] près, $\mathcal{A}_I^{(v)}$ et $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{(v-1)})_I$, ($v \geq 1$) [2]¹.

Dans le cas des types B, C ou D , les résultats sont [3] :

- les graduations de type B_I sont : $(\mathcal{A}_I^{(v)}, \Gamma_1)$ et $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{A}^{(v-1)})_I, \Gamma_1$, ($v \geq 1$);
- les graduations de type B_{II} sont : $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{(v-1)})_I, \Gamma_1$, ($v \geq 1$);
- les graduations de type C_I sont : $(\mathcal{A}_I^{(v)}, \Gamma_3)$, ($v > 1$);
- les graduations de type C_{II} sont :

$$((\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{(v-1)})_I, \Gamma_3) \text{ et } ((\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{A}^{(v-2)})_I, \Gamma_3) \quad (v > 1),$$

où nous avons noté

$$\Gamma_1 = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2v-1}, \alpha_{2v}) \in Z_2^{2v}, \alpha_1 \alpha_2 + \dots + \alpha_{2v-1} \alpha_{2v} - \text{pair}\},$$

$$\Gamma_3 = \{\alpha \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 + \dots + \alpha_{2v-1} \alpha_{2v} - \text{pair}\}.$$

LEMME 1. Les graduations $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, ainsi que tous les produits tensoriels formés avec ces graduations ont la propriété suivante :

$$\theta(\alpha + \gamma, \beta + \delta) = \theta(\alpha, \beta) \theta(\alpha, \delta) \theta(\gamma, \beta) \theta(\gamma, \delta).$$

Démonstration. On peut vérifier aisément que les graduations $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ont cette propriété et après, utilisant la définition de θ pour le produit tensoriel [9], le lemme devient évident.

q.e.d.

Considérons les formes réelles de Jordan de type A . On peut établir aisément le

LEMME 2. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont la propriété suivante : quels que soient $i, j \in Z_2^2$ ($i, j, i + j \neq 0$), nous avons $\theta(i, j) + \theta(j, i) = 0$. $\mathcal{A}^{(v)}$ et $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{(v-1)}$ ($v > 1$) n'ont pas cette propriété.

Nous avons [2] le

THÉORÈME 1.² Les seules graduations maximales riemannniennes (dont les connexions sont riemannniennes) des formes réelles de Jordan de

¹ Les graduations maximales des formes réelles de Jordan de type A_{II} ont été déterminées par I. Popovici [6], à l'aide des algèbres de Clifford généralisées.

² En notations analogues à celles utilisées pour $\mathcal{A}$, la graduation maximale $\mathcal{A}^0$ est donnée par

$$E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_0, \quad E_3 = iE_1 E_2 = -iE_2 E_1,$$

et la graduation maximale $\mathcal{A}^1$ est donnée par

$$E_1^2 = -E_2^2 = -E_3^2 = E_0, \quad E^2 = iE_1 E_2 = -iE_2 E_1.$$

type A sont $\mathcal{A}_J^0$, $\mathcal{A}_J^1$, $\mathcal{A}_J$, $\mathcal{B}_J$, les métriques correspondantes étant données, à un facteur constant près, par

$$(4) \quad \begin{aligned} ds^2 &= e^{-2x}(dx^2 - dy^2 - dz^2 - dt^2), \\ ds^2 &= e^{-2x}(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2), \\ ds^2 &= e^{-2x}(dx^2 + dy^2 - dz^2 - dt^2), \\ ds^2 &= e^{-2x}(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2). \end{aligned}$$

Démonstration. La première partie de ce théorème, notamment celle qui se réfère au type A_{II} (resp. aux premières deux métriques) a été établie par I. Popovici et A. Turtoi dans [8]. La seconde partie du théorème, qui se réfère au type A_I (resp. aux dernières deux métriques) a été démontrée dans [2]. Dans ce qui suit nous rappelons brièvement les étapes de la démonstration, parce que, pour les démonstrations des théorèmes 2 et 3 on renverra à ces étapes.

Soit $\mathcal{Q} = \mathcal{A}^{[v]}$ ou $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{[v-1]}$. Considérons le tenseur symétrique covariant $\varepsilon_{ij} = \theta(i, i) \delta_{ij}$ et la matrice $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ associée. Utilisant le lemme 1, on montre facilement que le tenseur $A_{ijkl} = \varepsilon_{ip} \Gamma_{jkl}^p$ est antisymétrique en i et j . Donc nous avons [8]

$$\varepsilon M_{kl} + M_{kl} \varepsilon = 0.$$

Soit V l'espace de la connexion affine [4]

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \delta_{j+k}^i [\theta(j, k) - \theta(k, j)].$$

Supposons que V est riemannien et soit a_{ij} son tenseur métrique. En tenant compte du fait que le système des opérateurs associés au tenseur de courbure est irréductible sur le sous-espace des matrices à trace nulle (voir le corollaire de la fin du [4]), on obtient [8]

$$(5) \quad a_{ij} = a_i \delta_{ij} \quad (a_i \neq 0, \quad i \in \mathbb{Z}_2^{2v}).$$

Le tenseur métrique a_{ij} a la dérivée covariante nulle. De (5) nous obtenons les conditions suivantes

$$(6) \quad \begin{aligned} 2\delta_{i+j}^0 \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + \delta_{i+j+k}^0 \{ [\theta(i, k) + \theta(k, i)] a_j + \\ + [\theta(j, k) + \theta(k, j)] a_i \} = 0. \end{aligned}$$

On distingue deux cas

1. $i + j = 0$. Les conditions (3) nous donnent

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^k} + \delta_k^0 [\theta(i, k) + \theta(k, i)] a_i = 0.$$

La démonstration s'obtient de même que celle pour le théorème 2, donc par l'adaptation de la démonstration du théorème 1. A la fin il faut trouver les graduations spéciales, dont les systèmes caractéristiques Γ_3 ont la propriété qu'ils ne contiennent aucune paire (i, j) telle que: $i, j, i + j \neq 0, i, j, i + j \in \Gamma_3$.

Soit $v = 2$. Alors $\Gamma_3 = \{\alpha \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4 - \text{pair}\}$.

En considérant tous les cas possibles on constate facilement qu'il n'existe aucune paire (i, j) avec la propriété ci-dessus. Donc les graduations spéciales

$$(11) \quad (\mathcal{A}_j^{[2]}, \Gamma_3), ((\mathcal{B} \otimes \mathcal{A})_j, \Gamma_3) \text{ et } ((\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})_j, \Gamma_3)$$

sont riemanniennes.

Soit $v > 2$. Alors $\Gamma_3 = \{\alpha \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4 + \dots - \text{pair}\}$.

En prenant $i = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et $j = (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, nous avons: $i, j, i + j \neq 0, i, j, i + j \in \Gamma_3$.

Par conséquent, les seules graduations spéciales riemanniennes sont (11).

Maintenant il faut déterminer les métriques des graduations (11). Soit la graduation $(\mathcal{A}_j^{[2]}, \Gamma_3)$ et e_1, e_2, e_3, e_4 les générateurs de $\mathcal{A}^{[2]}$. Nous avons $e_\alpha = e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} e_3^{\alpha_3} e_4^{\alpha_4}$ et $e_\alpha^2 = (-1)^{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4} e_0$. En prenant tous les $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \Gamma_3, (\alpha_i \in \mathbb{Z}_2)$ et en calculant, successivement, $(-1)^{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4}$ nous obtenons pour $\theta(\alpha, \alpha)$ les signes: $+++- -+$, ce qui nous donne pour la métrique les signes: $+- -++-$. Soit la graduation $((\mathcal{B} \otimes \mathcal{A})_j, \Gamma_3)$ et e_1, e_2, e_3, e_4 les générateurs de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$. Parce que $e_\alpha^2 = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4} e_0$, il résulte que $e_\alpha^2 = e_0$ quel que soit $\alpha \in \Gamma_3$ et donc, la métrique aura les signes: $+- - - -$.

Enfin, en considérant la graduation $((\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})_j, \Gamma_3)$, e_1, e_2, e_3, e_4 étant les générateurs de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, nous avons $e_\alpha^2 = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4} e_0$, ce qui nous donne, pour la métrique, les signes: $++ - +++$.

q.e.d.

REMARQUE. On voit donc, que les graduations spéciales riemanniennes de type B épuisent la classe des espaces de Wagner non isotropes³⁾ trois-dimensionnels avec $p = -1$, celles de type A épuisent la classe des espaces de Wagner non isotropes 4-dimensionnels avec $p = -1$, et celles de type C nous donnent des espaces de Wagner non isotropes 6-dimensionnels avec $p = -1$ et à métriques ayant un nombre impair de "+" (le nombre des "+" étant 1, 3, 5 et celui des "-" resp. 5, 3, 1).

Les formes réelles de Jordan de type D ont été traitées, au point de vue de l'existence des métriques, par voie directe [11], sans faire appel aux graduations, car même en leur définition est explicitée une base.

Ainsi, on a montré que tous les espaces à connexion affine constante associés aux formes réelles de Jordan de type D sont riemanniens et

³⁾ On sait [14] que dans les métriques de type Wagner intervient un vecteur constant. Nous avons dénommé un espace de Wagner *isotrope* ou *non isotrope*, selon que ce vecteur est isotrope ou non isotrope.

épuisent la classe des espaces de Wagner non isotrope avec $p = -1$, donc ayant des métriques de la forme :

$$ds^2 = e^{-2\alpha^0} [(dx^0)^2 + \eta^1(dx^1)^2 + \eta^2(dx^2)^2 + \dots + \eta^n(dx^n)^2]$$

$$\eta^i = \pm 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

REMARQUE. Les espaces de Riemann mis en évidence plus haut sont réductibles (au sens que le système des opérateurs $X_{\kappa i}$ [4] est réductible), certains n'ayant ni la métrique définie, mais comme nous avons vu, leur métrique est déterminée par la connexion, à un facteur constant près.

Donc ce sont des exemples d'espaces de Riemann qui ne satisfont pas aux hypothèses des théorèmes des professeurs G. Vrănceanu [12] et C. Teleman [10] (ils satisfont à des hypothèses plus larges), mais ont la propriété d'avoir la métrique déterminée par la connexion, à un facteur constant près. Ces espaces offrent donc la possibilité de généraliser les résultats de [10], [12].

Un important aspect géométrique est la construction des géodésiques ou des courbes auto-parallèles. Ainsi, dans [2] nous avons donné la construction des géodésiques pour le type A_I . Dans [8] ont été données les géodésiques pour le type A_{II} et dans [11] ont été données les géodésiques pour le type D . Voici le résultat global : les géodésiques des métriques associées aux formes réelles de Jordan des types $A - D$ s'obtiennent des géodésiques des espaces à connexion affine constante associés aux algèbres des nombres complexes, duaux et paraboliques par l'application de certains groupes de mouvement (orthogonaux ou pseudo-orthogonaux) associés aux métriques respectives.

Remarquons que la dernière métrique (4) correspond à l'algèbre des quaternions. F. Amato [1] a étudié cette connexion au point de vue des courbes auto-parallèles.

Reçu le 4 mai 1970

Institut de Mathématiques de l'Académie
Bucarest, Roumanie

BIBLIOGRAPHIE

1. AMATO, F., *Curve autoparallele associate all'algebra dei quaternioni*. Rev. roum. math. pures et appl., 1969, 5, 601—613.
2. IORDĂNESCU R., *Géométrie différentielle sur les formes réelles de Jordan de type A_I* . Boll. Un. Mat. It. (Bologna) (sous presse).
3. — *Sur les graduations spéciales réelles simples*. Rev. roum. Math. pures et appl. (sous presse).
4. — *L'étude des opérateurs infinitésimaux associés aux algèbres de Jordan simples*. Anal. Univ. București (sous presse).
5. JACOBSON, F. D., JACOBSON, N., *Classification and representation of semi-simple Jordan algebras*. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 65, 141—169.
6. POPOVICI, I., *Graduations maximales normées*. Rev. roum. math. pures et appl., 1969, 8, 1187—1200.



Proof. First we show that if h is a Hermitian element then the ascent of h is 0 or 1.

Suppose now, that for some u we have $h^2u = 0$ and $hu \neq 0$. Since, if $\|u\| = 1$

$$1 = \|e^{i\alpha h}\| \geq \|e^{i\alpha h}u\| \geq |\langle e^{i\alpha h}u, x^* \rangle| = |\langle u, x^* \rangle + i \langle hu, x^* \rangle|$$

where x^* is an arbitrary linear functional of norm 1. This relation gives $hu = 0$.

Now, we consider the operator

$$H_\lambda = h - \lambda I = h - \lambda$$

and this shows that H_λ has the ascent 0 or 1 for all complex numbers λ . As above,

$$\|e^{i(h+\lambda)}\| = \|e^{i\alpha h} \cdot e^{i\alpha\lambda}\| = \|e^{i\alpha\lambda}\| = e^{-\alpha \operatorname{Im}\lambda}$$

and thus

$$e^{-\alpha \operatorname{Im}\lambda} \geq \|e^{i(h+\lambda)}u\| \geq |\langle u, x^* \rangle + i \langle (h+\lambda)u, x^* \rangle|$$

which also gives $(h+\lambda)u = 0$.

From the theorem in [7] the characterization of $\omega(u)$ is clear.

It is interesting to know if the theorem holds for normal operators on Banach spaces.

3. In this section we apply the theorem in [7] for some classes of operators considered in [4].

Let $\mathfrak{X}$ be a Banach space and suppose that there exists an inner product $\langle, \rangle$ such that for all x

$$\|x\| \leq k|x|$$

where $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ and $| \cdot |$ is the original norm of $\mathfrak{X}$.

An operator T is called quasi-hyponormalizable if there exists $T^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ such that

$$\|T^*x\| \leq \|Tx\|$$

for all $x \in \mathfrak{X}$. Now, it is easy to see that the ascent for T is 0 or 1 and thus we have.

THEOREM 2. *If T is a quasi-hyponormalizable operator then the Weyl spectrum $\omega(T)$ is $\sigma(T)$ except for poles of the resolvent of finite rank.*

Remark. In [4] we have considered a class defined as follows T is quasi-normalizable if

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|, \quad \|x\| = 1$$

and it is clear that the theorem 2 is true for operators with the property : for all complex numbers λ , $T - \lambda I$ is quasi-normalizable.

It is clear that quasi-hyponormalizable operators are in this class.

REMARKS. We are indebted to Professor F.F.Bonsall for calling our attention to a paper of Nirschl and Schneider in Numer. Math., 6(1964), pp. 335—365 where more general results on ascent for eigenvalues are proved and that M.Crabb has proved, very recently, the much deeper result that all eigenvalues on the boundary of the numerical range have ascent 1.

Our proof of these results for Hermitian elements seems to be more simpler, and is included so that the paper should be in a sense, self-contained.

Received June 2, 1970

*Institute of Mathematics of the Academy
Bucharest, Romania
and
Polytechnic Institute
Timișoara Romania*

REFERENCE

1. S. BERBERIAN, *An extension of Weyl's theorem*. Mich. Math. J., 1969, **16**, 273—279.
2. L. COBURN, *Weyl's theorem for non-normal operators*. Mich. Math. J., 1967, **13**, 285—288.
3. V. ISTRĂȚESCU, *Weyl's theorem for a class of operators*. Rev. Roum. Math. Pure et Appl, 1968, **13**, 1103—1105.
4. V. ISTRĂȚESCU and I. ISTRĂȚESCU, *On quasi-normalizable operators*, 1969, **46**, 4, 5, 343—347, 523—525.
5. — *On Hermitian elements in Banach algebras* (to appear).
6. J. NIETO, *On the essential spectrum of symmetrizable operators*. Math. Ann., 1969, **178**, 145—153.
7. K. K. WARNER, *A Note on Theorem of Weyl*. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **23**, 3, 469—471.
8. H. WEYL, *Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist.*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909, **27**, 373—392.