

E-3717/115

ANALELE ȘTIINȚIFICE
ALE
UNIVERSITĂȚII „AL.I.CUZA”
DIN IAȘI
(SERIE NOUĂ)
SECȚIUNEA I

a) **Matematică**

TOMUL XVIII, ANUL 1972

Fasc. 1

E X T R A S

LA DIFFÉRENCE DIVISÉE D'ORDRE n D'UNE
FONCTION DE p VARIABLES ET SA
REPRÉSENTATION PAR UNE
INTÉGRALE MULTIPLE

PAR

D. V. IONESCU

BIBL. FIC. MATH. JAC.
Nr. 15.367 74

LA DIFFÉRENCE DIVISÉE D'ORDRE n D'UNE FONCTION DE p VARIABLES ET SA REPRÉSENTATION PAR UNE INTÉGRALE MULTIPLE

PAR

D. V. IONESCU

On sait que G. Peano [3] et L. Tchakaloff [6] ont montré que la différence divisée d'ordre n d'une fonction g d'une seule variable, sur les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_n$, où $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ peut être représentée par une intégrale définie lorsque $g \in C^n[x_0, x_n]$. Nous avons retrouvé cet important théorème par un problème aux limites qui conduit d'une manière simple à la fois à la définition de la différence divisée et à sa représentation intégrale [1]. On a

$$(1) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; g] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) g^{(n)}(s) ds$$

où la fonction φ est la fonction „B-spline“ d'après I. J. Schoenberg [5] définie par

$$(2) \quad \varphi(x) = \lambda_0 \frac{(x - x_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_1 \frac{(x - x_1)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \lambda_n \frac{(x - x_n)_+^{n-1}}{(n-1)!},$$

les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant donnés par la formule

$$(3) \quad [x_0, x_1, \dots, x_n; g] = (-1)^n \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i).$$



Les conditions du problème aux limites ont permis de démontrer que

la fonction φ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n) et que $\int_{x_0}^{x_n} \varphi ds = \frac{1}{n!}$.

Dans ce travail nous étendons aux fonctions f de p variables $x_1, x_2, \dots, x_p$ la formule (1) pour les différences divisées d'ordre n sur un réseau de noeuds.

1. T. Popoviciu [4] a défini la différence d'ordre n de la fonction f de deux variables (x, y) sur un réseau de noeuds $M_{ik}(x_i, y_k)$, où $i, k = 0, 1, \dots, n$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ et $y_0 < y_1 < \dots < y_n$, qu'il a désignée par

$$(4) \quad \begin{bmatrix} x_0, x_1, \dots, x_n \\ y_0, y_1, \dots, y_n \end{bmatrix} ; f,$$

par la formule

$$(5) \quad \begin{bmatrix} x_0, x_1, \dots, x_n \\ y_0, y_1, \dots, y_n \end{bmatrix} ; f = [x_0, x_1, \dots, x_n ; [y_0, y_1, \dots, y_n ; f]].$$

Nous allons étendre en premier lieu cette définition au cas des fonctions de p variables.

Considérons une fonction f de variables $x_1, x_2, \dots, x_p$ et prenons sur l'axe Ox_h correspondant à la variable x_h , les noeuds $x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \dots, x_h^{(n)}$ de manière que

$$x_h^{(0)} < x_h^{(1)} < \dots < x_h^{(n)}.$$

En donnant à h les valeurs $1, 2, \dots, p$ nous obtenons un réseau de noeuds $M_{i_1 i_2 \dots i_p}$ de coordonnées $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_p^{(i_p)})$, les indices $i_1, i_2, \dots, i_p$ prenant des valeurs de l'ensemble des nombres entiers $1, 2, \dots, n$.

Alors nous donnons la définition suivante:

Définition. La différence divisée d'ordre n de la fonction f de variables $x_1, x_2, \dots, x_p$ sur le réseau de noeuds $M_{i_1 i_2 \dots i_p}$ que nous désignons par la notation

$$(6) \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{bmatrix} ; f$$

est définie par la formule de récurrence

$$(7) \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{bmatrix} ; f = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} ; \\ \begin{bmatrix} x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)} \\ x_3^{(0)}, x_3^{(1)}, \dots, x_3^{(n)} \\ \dots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{bmatrix} ; f \end{bmatrix}$$

pour $p = 2, 3, \dots, p$.

En désignant par

$$(8) \quad \lambda_h^{(i)} = (-1)^i \frac{V(x_h^{(0)}, \dots, x_h^{(i-1)}, x_h^{(i+1)}, \dots, x_h^{(n)})}{V(x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \dots, x_h^{(n)})}$$

pour $h = 0, 1, \dots, p$ et $i = 0, 1, \dots, n$ on peut écrire encore la différence divisée (6), sous la forme

$$(9) \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{bmatrix} ; f = (-1)^{pn} \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^n \lambda_1^{(i_1)} \lambda_2^{(i_2)} \dots \lambda_p^{(i_p)} f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_p^{(i_p)}).$$

2. On peut donner une représentation intégrale de la différence divisée (6), en faisant sur la fonction f des hypothèses que nous désignons par $(H_p), (H_{p-1}), \dots, (H_1)$.

En considérant le domaine D défini par les inégalités

$$D: x_1^{(0)} \leq x_1 \leq x_1^{(n)}, x_2^{(0)} \leq x_2 \leq x_2^{(n)}, \dots, x_p^{(0)} \leq x_p \leq x_p^{(n)},$$

l'hypothèse (H_p) exprime que toutes les dérivées partielles $\partial^h f / \partial x_p^h$ existent et sont continues dans D , pour $h = 0, 1, \dots, n$.

L'hypothèse (H_{p-1}) exprime que toutes les dérivées partielles $\partial^{h+n} f / \partial x_{p-1}^h \partial x_p^n$ existent et sont continues dans D , pour $h = 0, 1, \dots, n$.

Et ainsi de suite. La dernière hypothèse (H_1) exprime que toutes les dérivées partielles $\partial^{h+(p-1)n} f / \partial x_1^h \partial x_2^n \dots \partial x_p^n$ existent et sont continues dans D , pour $h = 0, 1, \dots, n$.

Pour arriver à la représentation intégrale de la différence divisée (6), nous considérons d'une manière générale la représentation intégrale de la différence divisée d'ordre n de la fonction g de la variable x_h , sur les noeuds $x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \dots, x_h^{(n)}$, lorsque $g \in C^n[x_h^{(0)}, x_h^{(n)}]$, donnée par la formule

$$(10) \quad [x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \dots, x_h^{(n)} ; g] = \int_{x_h^{(0)}}^{x_h^{(n)}} \varphi_n(s) g^{(n)}(s) ds$$

avec la fonction „B-spline“

$$(11) \quad \varphi_h(s) = \lambda_h^{(0)} \frac{(s - x_h^{(0)})_+^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \lambda_h^{(n)} \frac{(s - x_h^{(n)})_+^{n-1}}{(n-1)!},$$

qui est positive sur l'intervalle $(x_h^{(0)}, x_h^{(n)})$.

Nous aurons à considérer dans la suite les fonctions (11) pour $h = 1, 2, \dots, p$.

3. Dans la différence divisée $[x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)}; f]$ regardons la fonction f comme une fonction seulement de la variable x_p . Alors en tenant compte de l'hypothèse (H_p) , nous pouvons écrire

$$(12) \quad [x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)}; f] = \int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_p(s_p) \frac{\partial^n f}{\partial s_p^n}(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, s_p) ds_p.$$

Ensuite écrivons la formule de récurrence

$$\left[\begin{matrix} x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \dots, x_{p-1}^{(n)} \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] = [x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \dots, x_{p-1}^{(n)}; [x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)}; f]]$$

et dans le second membre remplaçons la seconde différence divisée par la formule (12). Nous aurons alors

$$(13) \quad \left[\begin{matrix} x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \dots, x_{p-1}^{(n)} \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] = \int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_p(s_p) \left[x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \dots, x_{p-1}^{(n)} ; \frac{\partial^n f}{\partial s_p^n}(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, s_p) \right] ds_p.$$

Dans le second membre regardons la fonction $\partial^n f / \partial s_p^n(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, s_p)$ comme une fonction seulement de la variable x_{p-1} . En tenant compte de l'hypothèse (H_{p-1}) , nous pouvons écrire alors le second membre de la formule (13) sous la forme

$$(14) \quad \left[\begin{matrix} x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \dots, x_{p-1}^{(n)} \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] = \int_{x_{p-1}^{(0)}}^{x_{p-1}^{(n)}} \int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_{p-1}(s_{p-1}) \varphi_p(s_p) \frac{\partial^{2n} f}{\partial s_{p-1}^n \partial s_p^n}(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, s_{p-1}, s_p) ds_{p-1} ds_p,$$

Ce procédé peut être répété et l'on arrive finalement à la représentation intégrale, grâce aux hypothèses $(H_{p-2}), \dots, (H_1)$

$$(15) \quad \left[\begin{matrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] =$$

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(n)}} \int_{x_2^{(0)}}^{x_2^{(n)}} \dots \int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_1(s_1) \varphi_2(s_2) \dots \varphi_p(s_p) \frac{\partial^{pn} f}{\partial s_1^n \partial s_2^n \dots \partial s_p^n}(s_1, s_2, \dots, s_p) ds_1 ds_2 \dots ds_p.$$

C'est la formule qui fait l'objet de ce travail.

4. Il est à retenir que la formule (15) a été démontrée grâce à la formule fondamentale (1) et moyennant les hypothèses $(H_p), (H_{p-1}), \dots, (H_1)$. Il est possible de démontrer la formule (15) en faisant d'autres hypothèses sur la fonction f , par exemple celles qu'on doit faire pour obtenir la définition de la différence divisée (6) et arriver à sa représentation intégrale par un problème aux limites, comme nous l'avons fait dans le cas d'une fonction d'une seule variable.

Nous avons montré pour $p = 3$, quelles sont les hypothèses qu'on doit faire sur la fonction f et quel est le problème aux limites qui conduit d'une manière directe à la formule (15) correspondant à $p = 3$ dans le travail [2].

BIBLIOGRAPHIE

1. Ionescu D. V. — *Cuadraturi numerice*. Editura tehnică, București 1957.
2. Ionescu D. V. — *La différence divisée d'une fonction de trois variables et sa représentation par une intégrale triple*. Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, XV, 1970, 1425–1436.
3. Peano G. — *Resto nelle formule di quadratura espresso con un integrale definito*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Classe Sci. Fis. Math.-Nat. 1913, 22, 562–569.
4. Popoviciu T. — *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Mathematica, VJII, 1934, 1–85.
5. Schoenberg I. J. — *The perfect B-splines and a time-optimal control problem*. M. R. C. Tech. Summ. Report, 1116, December, 1970, Madison, Wisconsin 53706.
6. Tchakaloff L. — *Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendung*. Congrès International des Mathématiciens Oslo 1936.

DIFERENȚA DIVIZATĂ DE ORDINUL n , A UNEI FUNCȚII DE p VARIABLE ȘI REPREZENTAREA EI PRINTR-O INTEGRALĂ MULTIPLĂ

Rezumat

Se știe că G. Peano [3] și L. Tchakaloff [6] au arătat că diferența divizată de ordinul n a unei funcții g de o singură variabilă pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$, unde $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ se poate reprezenta printr-o integrală definită când $g \in C^n[x_0, x_n]$. Noi am regăsit această importantă teoremă printr-o problemă la limită, care conduce într-un mod simplu, atât la definiția diferenței divizate cât și la reprezentarea ei integrală [1]. Avem formula (1), unde funcția φ este funcția „B-Spline” după I. J. Schoenberg [5].

T. Popoviciu [4] a definit diferența de ordinul n a unei funcții f de două variabile (x, y) pe o rețea de noduri (x_i, y_k) , pe care a notat-o cu (4), prin formula (5).

Noi am extins această diferență la cazul unei funcții f de p variabile $x_1, x_2, \dots, x_p$ pe rețeaua de noduri $M_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ prin formula de recurență (7), și făcând ipotezele $(H_p), (H_{p-1}), \dots, (H_1)$ asupra funcției f în domeniul D , am dat reprezentarea diferenței divizate de ordinul n a funcției f de variabile $x_1, x_2, \dots, x_p$ prin formula (15) în care $\varphi_h(s)$ este funcția „B-Spline” (11), pentru $h = 1, 2, \dots, p$.

Formula (15) s-a dovedit în cazul $p = 3$ și cu ipoteze legate de metoda funcției φ , printr-o problemă la limită care definește diferența divizată și conduce la formula de reprezentare a ei printr-o integrală triplă [2].

