REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XVII, N° 9 1972

HOMMAGE À

G. CĂLUGĂREANU

POUR SON 70e ANNIVERSAIRE

TIRAGE À PART

EDITIONS DE L'ACADEMIE DE LA REPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

Hommage au professeur
G. CĂLUGĂREANU
à l'occasion de son 70ᵉ anniversaire

SUR UNE FORMULE DE QUADRATURE DE TYPE GAUSS

PAR

D. V. IONESCU

(Cluj)

Dans ce travail on reprend la formule de quadrature (1) de type Gauss [1], de degré d'exactitude $2n + p + q - 1$ et on étend les idées de notre travail [2] pour déterminer les coefficients et les nœuds. On démontre comme dans notre travail [3], que dans le cas $\pi(x) = 1$, le reste $R(f)$, est lié à la représentation intégrale de la différence divisée.

Dans un travail antérieur [1], nous avons étudié la formule de quadrature de la forme

$$\text{(1)} \quad \int_a^b \pi(x) f(x)\,\mathrm{d}x = A_0 f(a) + A_1 f'(a) + \ldots + A_{p-1} f^{p-1}(a) + \\ + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ + B_0 f(b) + B_1 f'(b) + \ldots + B_{q-1} f^{q-1}(b) + R[f]$$

où la fonction π est intégrable et positive sur l'intervalle (a, b), pouvant s'annuler en a ou b, et où les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}, C_1, C_2, \ldots, C_n$, $B_0 B_1, \ldots, B_{q-1}$ et les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se déterminent de manière que le leste $R[f]$ soit nul lorsque la fonction f est remplacée par $1, x, \ldots, x^{N-1}$, où

$$\text{(2)} \quad N = 2n + p + q.$$

Nous avons montré que si $f \in C^N[a, b]$, le reste $R[f]$ peut être mis sous la forme d'une intégrale définie

$$\text{(3)} \quad R[f] = \int_a^b \varphi(s) f^{(N)}(s)\,\mathrm{d}s.$$

où la fonction φ est déterminée par un problème aux limites.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XVII, No 9, P. 1357–1372, BUCAREST, 1972

Dans le présent travail nous reprenons ce problème et nous déterminons les nœuds et les coefficients de la formule (1) en utilisant les idées de notre travail [2] sur la formule de Gauss.

Ensuite en supposant $\pi(x) = 1$, nous montrerons que le reste $R[f]$ de la formule de quadrature (1) est lié à la représentation intégrale de la différence divisée d'une fonction g sur les nœuds $a, x_1, \ldots, x_n, b$ multiples, d'ordres $p + 1, 2, \ldots, 2, q + 1$, les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les nœuds de la formule (1).

Ce travail a été exposé dans une leçon faite à l'Université Jdanov de Leningrad le 26 novembre 1969.

§ 1. LES COEFFICIENTS ET LES NŒUDS DE LA FORMULE DE QUADRATURE (1)

1.1. *Considérons la suite de polynômes* $Q_n(x)$, où $Q_0(x) = 1$, orthogonaux par rapport à la fonction

$$\omega(x) = \pi(x)(x - a)^p (b - x)^q. \tag{1.1}$$

Le polynôme

$$Q_n(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n \tag{1.2}$$

est déterminé par les équations

$$\int_a^b \pi(x)(x - a)^p (b - x)^q Q_n(x)\, x^h \,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.3}$$

pour $h = 0, 1, \ldots, n - 1$.

En général, pour $m \neq n$, on a

$$\int_a^b \pi(x)(x - a)^p (b - x)^q Q_m(x)\, Q_n(x) \,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.4}$$

et l'on sait que *le polynôme* Q_n *a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre* a *et* b.

1.2. Supposons qu'on ait l'identité

$$\begin{aligned}\int_a^b \pi(x) f(x) \,\mathrm{d}x &= A_0 f(a) + A_1 f'(a) + \ldots + A_{p-1} f^{(p-1)}(a) + \\ &+ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ &+ B_0 f(b) + B_1 f'(b) + \ldots + B_{q-1} f^{(q-1)}(b)\end{aligned} \tag{1.5}$$

valable pour tout polynôme f de degré plus petit que N et que les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient différents de a et de b. Nous avons le

THÉORÈME 1.1. *Dans l'identité (1.5) les coefficients* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *ne sont pas nuls.*

En effet supposons que dans l'identité (1.5) le coefficient C_n soit nul. Alors en remplaçant f par le polynôme

$$(x - a)^p (b - x)^q (x - x_1)^2 \ldots (x - x_{n-1})^2$$

de degré $N - 2$, on doit avoir

$$\int_a^b \pi(x)(x - a)^p (b - x)^q (x - x_1)^2 \ldots (x - x_{n-1})^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

ce qui est impossible. Donc les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont différents de zéro.

COROLLAIRE 1.1. *Dans l'identité (1.5) les nœuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sont distincts.*

1.3. Cela étant, considérons le polynôme $Q_n(x)$ de forme (1.2) et défini par les équations (1.3) et remplaçons dans l'identité (1.5) la fonction f par les polynômes

$$(x - a)^p (b - x)^q x^h Q_n(x)$$

où $h = 0, 1, \ldots, n - 1$.

D'après les équations (1.3) le premier membre de l'identité (1.5) est nul, et nous aurons les équations

$$\begin{aligned}&C_1(x_1 - a)^p (b - x_1)^q Q_n(x_1) + \ldots + C_n (x_n - a)^p (b - x_n)^q Q_n(x_n) = 0.\\ &C_1(x_1 - a)^p (b - x_1)^q x_1 Q_n(x_1) + \ldots + C_n(x_n - a)^p (b - x_n) x_n Q_n(x_n) = 0.\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &C_1(x_1 - a)^p (b - x_1)^q x_1^{n-1} Q_n(x_1) + \ldots + C_n(x_n - a)^p (b - x_n)^q x_n^{n-1} Q_n(x_n) = 0.\end{aligned} \tag{1.6}$$

linéaires et homogènes en $Q_n(x_1), \ldots, Q_n(x_n)$. Le déterminant de ce système est égal à

$$\begin{aligned}&C_1 C_2 \ldots C_n [(x_1 - a)(x_2 - a) \ldots (x_n - a)]^p \times\\ &\times [(b - x_1)(b - x_2) \ldots (b - x_n)]^q V(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned} \tag{1.7}$$

où $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le déterminant de Vandermonde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ D'après le théorème 1.1. on a $C_1, C_2, \ldots, C_n \neq 0$ et d'après son corollaire 1.1 on a $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$. Donc le déterminant du système (1.6) est $\neq 0$, et par suite ce système a la solution banale

$$Q_n(x_1) = 0, \qquad Q_n(x_2) = 0, \ldots, Q_n(x_n) = 0. \tag{1.8}$$

Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME 1.2. *Dans l'identité (1.5) les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines réelles, distinctes et comprises entre a et b du polynôme Q_n.*

1.4. Nous allons montrer maintenant comment on peut déterminer les coefficients de l'identité (1.5). En remplaçant dans cette identité la fonction f par le polynôme

$$(x-a)^p(b-x)^q(x-x_1)^2 \ldots (x-x_{i-1})^2(x-x_{i+1})^2 \ldots (x-x_n)^2.$$

on aura l'équation

$$\int_a^b \pi(x)(x-a)^p(b-x)^q(x-x_1)^2 \ldots (x-x_{i-1})^2(x-x_{i+1})^2 \ldots (x-x_n)^2 \,dx =$$
$$= C_i(x_i-a)^b(b-x_i)^q(x_i-x_1)^2 \ldots (x_i-x_{i-1})^2(x_i-x_{i+1})^2 \ldots (x_i-x_n)^2.$$

qui détermine le coefficient C_i et qui montre que $C_i > 0$.

En remplaçant ensuite dans l'identité (1.5) la fonction f, par le polynôme

$$(b-x)^q Q_n^2(x)(x-a)^j$$

où $j = p-1, p-2, \ldots, 1, 0$ on détermine $A_{p-1}, A_{p-2}, \ldots, A_0$.

Et de la même manière on détermine les coefficients $B_{q-1}, B_{q-2}, \ldots, B_0$.

§ 2. UNE PROPRIÉTÉ DES COEFFICIENTS DE LA DIFFÉRENCE DIVISÉE D'UNE FONCTION g SUR LES NŒUDS $a, x_1, \ldots x_n, b$ MULTIPLES D'ORDRES $p+1, 2, \ldots 2, q+1$, LORSQUE $x_1, x_2, \ldots x_n$ SONT LES RACINES DU POLYNÔME Q_n CORRESPONDANT À $\pi(x) = 1$

2.1. Dans la suite nous supposerons $\pi(x) = 1$. Alors les polynômes Q_n sont orthogonaux par rapport à la fonction $\omega(x) = (x-a)^p(b-x)^q$ et nous avons vu qu'on peut déterminer les constantes $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}, C_1, C_2, \ldots, C_n, B_0, B_1, \ldots, B_{q-1}$. de manière à avoir l'identité (1.5), lorsque la fonction f est remplacée par $1, x, \ldots, x^{N-1}$, ce qui veut dire que nous avons les identités

$$\begin{aligned} \int_a^b x^k \,dx &= A_0 a^k + A_1(a^k)' + \ldots + A_{p-1}(a^k)^{(p-1)} + \\ &+ C_1 x_1^k + C_2 x_2^k + \ldots + C_n x_n^k + \\ &+ B_0 b^k + B_1(b^k)' + \ldots + B_{q-1}(b^k)^{(q-1)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme Q_n et $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

2.2. Cela étant, considérons la différence divisée

$$[\underbrace{a, \ldots, a}_{p+1}, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n, \underbrace{b, \ldots, b}_{q+1}; g]. \tag{2.2}$$

de la fonction g sur les nœuds $a, x_1, \ldots, x_n, b$ multiples d'ordres $p+1, 2, \ldots, 2, q+1$ qui est comme, on le sait, le quotient de deux déterminants. Désignons par $\mathfrak{D}$ le déterminant du numérateur. En développant ce déterminant selon les éléments de la dernière colonne, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= M_0 g(a) + M_1 g'(a) + \ldots + M_p g^{(p)}(a) + \\ &+ P_1 g(x_1) + P_2 g(x_2) + \ldots + P_n g(x_n) + \\ &+ P_1' g'(x_1) + P_2' g'(x_2) + \ldots + P_n' g'(x_n) + \\ &+ R_0 g(b) + R_1 g'(b) + \ldots + R_q g^{(q)}(b) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. *Si dans la différence divisée (2.2) les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme $Q_n(x)$, correspondant à $\pi(x) = 1$ on a*

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots, \quad P_n = 0. \tag{2.4}$$

Il suffit de démontrer ce théorème pour le coefficient P_1 ; d'une manière analogue on démontre que $P_2 = 0, \ldots, P_n = 0$.

On a :

$$P_1 = (-1)^{q+1} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^N \\ 0 & 1 & 2a & \ldots & (a^N)' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (a^N)^{(p)} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \ldots & (x_1^N)' \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^N \\ 0 & 1 & 2x_2 & \ldots & (x_2^N)' \\ \cdot & & \cdot & \ldots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^N \\ 0 & 1 & 2x_n & \ldots & (x_n^N)' \\ 1 & b & b^2 & \ldots & b^N \\ 0 & 1 & 2b & \ldots & (b^N)' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (b^N)^{(q)} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

En changeant les lignes en colonnes et l'ordre des colonnes, on peut écrire le coefficient P_1 sous la forme

$$
(2.6)\qquad P_1=k'\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1\\
\int_a^b \mathrm{d}x & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & x_2 & \dots & x_n & b\\
\int_a^b x\mathrm{d}x & a & \dots & 0 & x_1 & \dots & x_n & b & \dots & 0 & \frac{x_2^2}{2} & \dots & \frac{x_n^2}{2} & \frac{b^2}{2}\\
\int_a^b x^2\mathrm{d}x & a^2 & \dots & 0 & x_1^2 & \dots & x_n^2 & b^2 & \dots & 0 & \frac{x_2^3}{3} & \dots & \frac{x_n^3}{3} & \frac{b^3}{3}\\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\
\int_a^b x^{N-1}\mathrm{d}x & a^{N-1} & \dots & (a^{N-1})^{(p-1)} & x_1^{n-1} & \dots & x_n^{N-1} & b^{N-1} & \dots & (b^{N-1})^{(q-1)} & \frac{x_2^N}{N} & \dots & \frac{x_n^N}{N} & \frac{b^N}{N}
\end{vmatrix}
$$

Sous cette forme on voit immédiatement que $P_1 = 0$.

En effet, multiplions les éléments de la seconde colonne du déterminant par A_0, et ceux des éléments des colonnes suivantes par $A_1, A_2, \dots$ $\dots, A_{p-1}, C_1, C_2, \dots, C_n\ B_0, B_1, \dots, B_{q-1}$. et ajoutons ensuite les éléments de ces colonnes aux éléments de la seconde colonne. Alors d'après les identités (2.1) les éléments de la seconde colonne deviennent identiques aux éléments de la première colonne. Nous avons donc $P_1 = 0$.

Ainsi le théorème 2.1 est démontré.

La formule (2.3) devient

$$
(2.7)\qquad \begin{aligned}
\mathfrak{D} = {} & M_0 g(a) + M_1 g'(a) + \dots + M_p g^{(p)}(a) + \\
& + P_1' g'(x_1) + P_2' g'(x_2) + \dots + P_n' g'(x_n) + \\
& + R_0 g(b) + R_1 g'(b) + \dots + R_q g^{(q)}(b).
\end{aligned}
$$

2.3. Relativement à la formule (2.7) nous faisons deux remarques importantes :

1°. *Dans la formule (2.7) on a*

$$
(2.8)\qquad M_0 + R_0 = 0.
$$

Cela résulte du fait que le premier membre $\mathfrak{D}$ est nul lorsque $g(x) = 1$.

2°. *Dans la formule (2.7) on a*

$$
(2.9)\qquad R_0 \neq 0.
$$

Cette propriété sera démontrée dans le § 3.

§ 3. UNE PROPRIÉTÉ DES COEFFICIENTS DES DIFFÉRENCES DIVISÉES À NŒUDS MULTIPLES

3.1. Considérons la différence divisée de la fonction f sur les nœuds $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ multiples d'ordres $r_0, r_1, \dots, r_{n+1}$.

$$
(3.1)\qquad [\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{r_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_{r_{n+1}}; f]
$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$
(3.2)\qquad \begin{aligned}
& [\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{r_0}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{x_{n+1} \dots, x_{n+1}}_{r_{n+1}}; f] = \\
& = A_{00} f(x_0) + A_{01} f'(x_0) + \dots + A_{0,\, r_0-1} f^{(r_0-1)}(x_0) + \\
& + A_{10} f(x_1) + A_{11} f'(x_1) + \dots + A_{1,\, r_1-1} f^{(r_1-1)}(x_1) + \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
& + A_{n+1,\,0} f(x_{n+1}) + A_{n+1,1} f'(x_{n+1}) + \dots + A_{n+1,\, r_{n+1}-1} f^{(r_{n+1}-1)}(x_{n+1})
\end{aligned}
$$

Relativement à la différence divisée (3.2) nous avons le théorème suivant

THÉORÈME 3.1. *Si les nœuds $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sont tels que*

$$
(3.3)\qquad x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}.
$$

alors dans l'expression (3.2) de la différence divisée (3.1), les coefficients $A_{n+1,0}, A_{n+1,1}, \dots, A_{n+1,\, r_{n+1}-1}$ de $f(x_{n+1}), f'(x_{n+1}), \dots, f^{(r_{n+1}-1)}(x_{n+1})$ sont différents de zéro.

De même les coefficients $A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0,\, r_0-1}$ de $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(r_0-1)}(x_0)$ sont différents de zéro.

Il est évident qu'il suffit de démontrer la première partie du théorème. La seconde partie se démontre de la même manière.

Pour le coefficient $A_{n+1,\, r_{n+1}-1}$ le théorème est évident. Il reste à démontrer le théorème pour les autres coefficients $A_{n+1,\,0}, A_{n+1,\,1}, \dots,$ $A_{n+1,\, r_{n+1}-2}$.

3.2. Nous démontrerons d'abord que $A_{n+1,\,0} \neq 0$. Cela revient à démontrer que le déterminant

$$(3.4)\qquad D_{r_{n+1}-1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^N \\ 0 & 1 & \ldots & (x_0^N)' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & (x_0^N)^{(r_0-1)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^N \\ 0 & 1 & \ldots & (x_n^N)' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & (x_n^N)^{(r_n-1)} \\ 0 & 1 & \ldots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & (x_{n+1}^N)^{(r_{n+1}-1)} \end{vmatrix}$$

où

$$(3.5)\qquad N = r_0 + r_1 + \ldots + r_n + r_{n+1} - 2.$$

est différent de zéro.

Pour abréger nous écrivons le déterminant (3.4) sous la forme

$$(3.6)\qquad D_{r_{n+1}-1} = \begin{vmatrix} \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 1 \ldots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & (x_{n+1}^N)^{(r_{n+1}-1)} \end{vmatrix}$$

Démontrons d'abord que pour $r_{n+1} = 2$, le déterminant

$$(3.7)\qquad D_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 1 & \ldots & (x_{n+1}^N)' \end{vmatrix} \neq 0.$$

où $N = r_0 + r_1 + \ldots + r_n$.

Pour cela considérons le polynôme

$$(3.8)\qquad \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & x & \ldots & x^N \end{vmatrix}$$

qui a le degré N, parce que le coefficient de x^N est le déterminant de Vandermonde généralisé

$$(3.9)\qquad V = V(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{r_0}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{r_n})$$

qui est différent de zéro.

Nous pouvons écrire

$$\Delta_1(x) = V(x - x_0)^{r_0}(x - x_1)^{r_1} \ldots (x - x_n)^{r_n}.$$

Le polynôme $\Delta_1(x)$ a toutes ses racines réelles et situées sur l'intervalle $[x_0, x_n]$. La dérivée $\Delta_1'(x)$ a aussi toutes ses racines réelles et situées sur le même intervalle. Il résulte que $\Delta_1'(x) \neq 0$ pour $x > x_n$. En particulier $\Delta_1'(x_{n+1}) \neq 0$. Mais $\Delta_1'(x_{n+1}) = D_1$ et par la suite nous avons démontré que $D_1 \neq 0$.

3.3. Supposons maintenant que le déterminant

$$(3.10)\qquad D_j = \begin{vmatrix} \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 1 \ldots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & (x_{n+1}^N)^{(j)} \end{vmatrix}$$

où $N = r_0 + r_1 + \ldots + r_{n+j-1}$, soit différent de zéro, ce qui est vrai pour $j = 1$, et démontrons que $D_{j+1} \neq 0$.

Pour cela considérons le polynôme

$$(3.11)\qquad \Delta_{j+1}(x) = \begin{vmatrix} \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 1 \ldots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & (x_{n+1}^N)^{(j)} \\ 1 & x \ldots & x^N \end{vmatrix}$$

où $N = r_0 + r_1 + \ldots + r_n + j$. Le coefficient de x^N est le déterminant D_j que nous avons supposé différent de zéro. On peut écrire

$$\Delta_{j+1}(x) = (x - x_0)^{r_0}(x - x_1)^{r_1} \ldots (x - x_n)^{r_n} U_j(x)$$

où U_j est un polynôme de degré j.

Le polynôme Δ_{j+1} a $r_0 + r_1 + \ldots + r_n$ racines réelles appartenant à l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$ et sa dérivée Δ_{j+1}' a $r_0 + r_1 + \ldots + r_n - 1$ racines réelles appartenant au même intervalle. Mais la dérivée Δ_{j+1}' a encore la racine x_{n+1} multiple d'ordre j ce qui fait que Δ_{j+1}' a toutes ses racines dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$, la racine x_{n+1} étant multiple d'ordre j. Il résulte alors que la dérivée $(\Delta_{j+1})^{(j)} = \Delta_{j+1}^{(j+1)}$ a toutes ses racines réelles et comprises dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1})$. Alors $\Delta_{j+1}^{(j+1)}(x_{n+1}) \neq 0$, ce qui veut dire que $D_{j+1} \neq 0$.

En particulier $D_{r_{n+1}-1} \neq 0$, et par suite le théorème 3.1. est démontré pour le coefficient $A_{n+1,0}$.

3.4. On démontre que le coefficient $A_{n+1,l}$, où l est un des nombres $1, 2, \ldots, r_{n+1-2}$ est différent de zéro, de la manière suivante. Il faut démontrer que le déterminant

$$(3.12)\qquad E_{r_{n+1}-1,l} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^N \\ 0 & 1 & \cdots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(r_{n+1}-1)} \end{vmatrix}$$

où

$$(3.13)\qquad N = r_0 + r_1 + \ldots + r_n + r_{n+1} - 2.$$

est différent de zéro.

Nous allons examiner d'abord le cas du déterminant

$$(3.14)\qquad E_{l+1,l} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^N \\ 0 & 1 & \cdots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l+1)} \end{vmatrix}$$

où $N = r_0 + r_1 + \ldots + r_n + l$.

Pour cela nous considérons le polynôme

$$(3.15)\qquad \Delta_{l+1}(x) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^N \\ 0 & 1 & \cdots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l-1)} \\ 1 & x & \cdots & x^N \end{vmatrix} \quad l-1$$

qui est de degré N, parce que le coefficient de x^N est le déterminant de Vandermonde généralisé

$$V = V(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{r_0}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{r_n}, \underbrace{x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}}_{l}) \neq 0.$$

Nous pouvons écrire le polynôme Δ_{l+1} sous la forme

$$\Delta_{l+1}(x) = V(x - x_0)^{r_0} \ldots (x - x_n)^{r_n} (x - x_{n+1})\, l.$$

Toutes les racines de ce polynôme sont réelles et comprises dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$. Il résulte que les dérivées successives de ce polynôme ont aussi les racines réelles et comprises dans $[x_0, x_{n+1}]$. En particulier les racines de $\Delta_{l+1}^{(l+1)}$ sont toutes comprises dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$. On a donc $\Delta_{l+1}^{(l+1)}(x_{n+1}) \neq 0$, et de l'égalité $\Delta_{l+1}^{(l+1)}(x_{n+1}) = E_{l+1,l}$ il résulte que $E_{l+1,l} \neq 0$.

3.5. Passons au cas général. Supposons que le déterminant

$$(3.16)\qquad E_{q,l} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^N \\ 0 & 1 & \cdots & (x_{n+1}^N)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(q)} \end{vmatrix}$$

où $N = r_0 + \ldots + r_n + q - 1$ soit différent de zéro, ce qui est vrai pour $q = l + 1$ et démontrons que le déterminant $E_{q+1,l}$ est aussi différent de zéro.

Pour cela considérons le polynôme

$$
(3.17)\qquad \Delta_{q+1}(x) = \begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^N \\
0 & 1 & \cdots & (x_{n+1}^N)' \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l-1)} \\
0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(l+1)} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & (x_{n+1}^N)^{(q)} \\
1 & x & \cdots & x^N
\end{vmatrix}
$$

qui est de degré N, parce que le coefficient de x^N est le déterminant $E_{q,l}$ que nous avons supposé différent de zéro.

Nous pouvons écrire encore le polynôme Δ_{q+1} sous la forme

$$\Delta_{q+1}(x) = (x - x_0)^{r_0} (x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_n)^{r_n} (x - x_{n+1})^l \, U(x)$$

et par suite Δ_{q+1} a $r_0+r_1+\dots+r_n+l$ racines dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$. Il résulte que $\Delta_{q+1}^{(l+1)}$ a $r_0 + r_1 + \dots + r_n - 1$ racines réelles comprises dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1})$. Mais cette dérivée a encore la racine x_{n+1} d'ordre $q - l$. Donc $\Delta_{q+1}^{(l+1)}$ a $r_0 + \dots + r_n + q - l - 1$ racines dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$ et par suite la dérivée $(\Delta_{q+1}^{(l+1)})^{(q-l)} = \Delta_{q+1}^{(q+1)}$ n'a plus la racine x_{n+1}. La dérivée $\Delta_{q+1}^{(q+1)}$ ayant le degré $r_0 + r_1 + \dots + r_n - 1$, et $r_0 + r_1 + \dots + r_n - 1$ racines réelles dans l'intervalle $[x_0, x_{n+1}]$, on a $\Delta_{q+1}^{(q+1)}(x_{n+1}) \neq 0$, c'est-à-dire $E_{q+1,l} \neq 0$, et par suite le théorème 3.1. est complètement démontré.

§ 4. LE RESTE DE LA FORMULE (1) DE TYPE GAUSS, LORSQUE $\pi(x) = 1$

4.1. D'après les remarques faites dans l'alinéa 2.3., sur les coefficients du déterminant $\mathfrak{D}$, lorsque $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme Q_n correspondant à $\pi(x) = 1$, nous pouvons écrire la formule (2,7) sous la forme

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad \mathfrak{D} = R_0 \int_a^b g'(x)\,dx + M_1 g'(a) + \dots + M_p g^{(p)}(a) +& \\
+ P_1' g'(x_1) + \dots + P_n' g'(x_n) +& \\
+ R_1 g'(b) + \dots + R_q g^{(q)}(b)&
\end{aligned}
$$

où

$$(4.2)\qquad R_0 = (-1)^q \, D_q$$

avec

$$
(4.3)\qquad D_q = \begin{vmatrix}
1 & a & \cdots & a^N \\
0 & 1 & \cdots & (a^N)' \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & (a^N)^{(p)} \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\
0 & 1 & \cdots & (x_1^N)' \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
1 & x_n & \cdots & x_n^N \\
0 & 1 & \cdots & (x_n^N)' \\
0 & 1 & \cdots & (b^N)' \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a & a & \cdots & (b^N)^{(q)}
\end{vmatrix}
$$

et

$$N = 2n + p + q.$$

Vu que nous avons démontré que $D_q \neq 0$, nous pouvons résoudre l'équation (4.1) par rapport à $\int_a^b g'(x)\,dx$, et en posant

$$(4.4)\qquad g'(x) = f(x)$$

nous aurons la formule

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{(-1)^{q+1}}{D_q} \big[M_1 f(a) + M_2 f'(a) + \dots + M_p f^{(p-1)}(a) +& \\
+ P_1' f(x_1) + P_2' f(x_2) + \dots + P_n' f(x_n) +& \\
+ R_1 f(b) + R_2 f'(b) + \dots + R_q f^{(q-1)}(b) \big] + (-1)^q \frac{\mathfrak{D}}{D_q}&
\end{aligned}
$$

qui est justement la formule de quadrature (1) de type Gauss, correspondant à $\pi(x) = 1$ et dont les coefficients sont liés aux coefficients de $\mathfrak{D}$, par les formules

$$A_i = \frac{(-1)^{q+1}}{D_q} M_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \dots, p-1)$$

$$C_k = \frac{(-1)^{j+1}}{D_q} P'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.6}$$

$$B_j = \frac{(-1)^{j+1}}{D_q} R_{j+1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, q-1)$$

Le reste de la formule (4.5) peut s'écrire sous la forme

$$R[f] = (-1)^q \frac{\mathcal{V}}{D_q} \Big[\underbrace{a, \ldots, a,}_{p+1} \; x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, \underbrace{b, \ldots, b}_{q+1}; \; g \Big] \tag{4.7}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme Q_n, $g'(x) = f(x)$ et où V est le déterminant de Vandermonde généralisé

$$\mathcal{V} = V \Big[\underbrace{a, \ldots, a,}_{p+1} \; x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, \underbrace{b, \ldots, b}_{q+1} \Big]. \tag{4.8}$$

Si $f \in C^{2n+p+q}[a, b]$, alors $g \in C^{2n+p+q+1}[a, b]$ et l'on sait qu'on peut écrire

$$\Big[\underbrace{a, \ldots, a,}_{p+1} \; x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, \underbrace{b, \ldots, b}_{q+1}; \; g \Big] = \frac{g^{(2n+p+q+1)}_{(\xi)}}{(2n+p+q+1)!} \tag{4.9}$$

où $\xi \in (a, b)$.

Donc, le reste de la formule (4.7) peut être écrit sous la forme

$$R[f] = (-1)^q \frac{\mathcal{V}}{D_q}, \frac{f^{(2n+p+q)}_{(\xi)}}{(2n+p+q+1)}, \tag{4.10}$$

où $\xi \in (a, b)$ et l'on déduit l'évaluation

$$|R[f]| \leqslant \frac{\mathcal{V}}{|D_q|} \frac{M_{2n+p+q}}{(2n+p+q+1)!}; \quad M_{2n+p+q} = \sup_{(a,b)} |f^{(2n+p+q)}_{(x)}|. \tag{4.11}$$

4.2. On peut mettre aussi le reste $R[f]$ de la formule de type Gauss (1) correspondant à $\pi(x) = 1$, sous la forme d'une intégrale définie, en utilisant la représentation intégrale d'une différence divisée. On a

$$[\underbrace{a, \ldots, a,}_{p+1} x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, \underbrace{b, \ldots, b}_{q+1}; g] = \int_a^b \varphi(s)\, g^{(2n+p+q+1)}_{(s)} \,\mathrm{d}s. \tag{4.12}$$

où la fonction φ est une fonction spline, qui s'obtient par un problème aux limites [4]. On a démontré que la fonction φ est positive sur l'intervalle (a, b) et que l'on a

$$\int_a^b \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{(2n+p+q+1)!}. \tag{4.13}$$

En tenant compte de la formule (4.8) et de la représentation (4.12) on déduit pour le reste de la formule de quadrature (1), correspondant à $\pi(x) = 1$, la représentation intégrale

$$R[f] = \int_a^b \psi(x) f^{(2n+p+q)}_{(x)} \,\mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

où la fonction ψ est liée à la fonction φ de la représentation intégrale (4.12) par la formule

$$\psi(x) = (-1)^q \frac{\mathcal{V}}{D_q} \varphi(x). \tag{4.15}$$

La fonction ψ a le signe de $(-1)^q | 1D_q|$ sur l'intervalle (a, b) et l'on a

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^q \frac{\mathcal{V}}{D_q} \frac{1}{(2n+p+q+1)!} \tag{4.16}$$

En utilisant les formules (4.14), (4.15)et (4.16) on retrouve la formule (4.10) et l'évaluation (4.11).

4.3. Le polynôme Q_n dont les racines sont les nœuds de la formule de quadrature (1), correspondant à $\pi(x) = 1$, peut être caractérisé par une propriété de minimum.

En effet les coefficients du polynôme

$$Q_n(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n$$

sont déterminés par les équations

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q_n(x)\, x^h \,\mathrm{d}x = 0$$

pour $h = 0, 1, \ldots, n-1$ et ces équations sont précisément les équations qui déterminent les coefficients du polynôme Q_n de manière que l'intégrale

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q_n^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.17}$$

soit minimum.

Le minimum de l'intégrale (4.17) peut être calculé par la formule de quadrature (1), correspondant à $\pi(x) = 1$, en remplaçant la fonction f par

$$(x-a)^p (b-x)^q Q_n^2(x).$$

On obtient

$$(4.18)\qquad \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q_n^2(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^q \frac{\mathscr{V}}{D_q}\,\frac{1}{2_n + p + q + 1}$$

et cette formule donne une interprétation intéressante du facteur $(-1)^q \dfrac{\mathscr{V}}{D_q}$ qui entre dans la formule (4.5).

La formule (4.18) montre en outre que le déterminant D_q a le signe de $(-1)^q$, puisque $\mathscr{V} > 0$.

Reçu le 20 janvier 1972

Université Babeş Bolyai Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. D. V. Ionescu, *Cîteva formule de cuadratură mecanică*. Acad. R.P.R. fil. Cluj. Stut. Cerc. St. 1951, 16–37.
2. — *Sur la formule de quadrature de Gauss*. Mathematica, 1965, **7**, 43–46.
3. — *Restes des formules de quadratures de Gauss et de Turán*. Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae, 1967, **18**, 283–295.
4. — *Cuadraturi numerice*. Ed. tehnică, 1957, Bucarest.