According to (1) we will prove that $\alpha_1 \leq 4ab$ or $(-1)^{n+1}\cos nC \leq 1$, which is true. In the same way $\alpha_2 \leq 4bc$, $\alpha_3 \leq 4ca$. It remains to prove that

$$\left(\sqrt{a\alpha_2}+\sqrt{c\alpha_1}+\sqrt{b\alpha_3}\right)\left(\sqrt{a\alpha_2}-\sqrt{c\alpha_1}+\sqrt{b\alpha_3}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sqrt{a\alpha_2}+\sqrt{c\alpha_1}-\sqrt{b\alpha_3}\right)\left(-\sqrt{a\alpha_2}+\sqrt{c\alpha_1}+\sqrt{b\alpha_3}\right)\geq \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

or

$$2\sum x_1x_2-\sum x_1^2 \geq 2x_1x_2x_3 \tag{21}$$

where

$x_1 = 1+(-1)^{n+1}\cos nA, x_2 = 1+(-1)^{n+1}\cos nB, x_3 = 1+(-1)^{n+1}\cos nC,$

or

$$\sum \cos^2 nA + 2(-1)^{n+1}\cos nA\cos nB\cos nC \leq 1$$

which is true according to Lemma 2.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

DESPRE ÎNCEPUTURILE BIOMATEMATICII[1)]

RADU PRECUP[2)]

Tot ce e gândire corectă este sau matematică sau susceptibil de matematizare.
(Grigore Moisil, matematician, 1906-1973)

În fiecare ştiinţă este numai atâta ştiinţă adevărată câtă matematică conţine.
(Immanuel Kant, filozof, 1724-1804)

Putem iubi matematica pentru frumuseţea sa abstractă, golită de orice conţinut concret, pentru desfăşurarea logică a raţionamentului ei care poate conduce de la o premiză A, la o concluzie B de foarte multe ori surprinzătoare, neaşteptată. Dar ne poate plăcea matematica şi datorită modului său surprinzător prin care se mulează asupra unor procese reale de natură fizică, chimică, biologică, economică, sociologică etc. făcându-le descrierea şi înţelegerea mai exacte şi permiţând controlul lor ştiinţific. Ne poate plăcea aşadar matematica pură, sau ne poate plăcea matematica aplicată. Cele două matematici nu sunt însă disjuncte, ci se intersectează şi se stimulează reciproc. Să ne amintim de faptul că bazele calculului diferenţial şi integral datorate lui *Leibniz* (1646-1716) şi *Newton* (1642-1727) au fost puse tocmai pentru a descrie în termeni riguroşi concepte precum viteza şi acceleraţia

---

1) Articol publicat anterior în revista „Micii Matematicieni" a elevilor Colegiului Naţional „Ştefan cel Mare" din Hârlău

2) Prof. univ. dr., Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea "Babeş–Bolyai" Cluj-Napoca.

provenite din fizică. Astfel, dacă $x(t)$ reprezintă o anumită cantitate la momentul t, atunci $x'(t)$ reprezentând limita când $\Delta t \to 0$ a raportului

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

exprimă variaţia cantităţii pe unitatea de timp, la momentul t. Dacă, în matematica pură, x reprezintă o funcţie, fiind golit de orice conţinut real, în matematica aplicată x dobândeşte conţinut putând fi de la caz la caz: poziţia unui corp în mişcare (fizică); densitatea unei substanţe chimice (chimie); mărimea producţiei unui anumit tip de marfă (economie); mărimea/densitatea unei populaţii dintr-o anumită specie, densitatea celulelor de un anumit tip dintr-un organism (biologie) ş.a. Atunci când conceptelor matematice abstracte li se conferă un conţinut real, iar rezultatele matematice abstracte primesc interpretări specifice se realizează trecerea dinspre matematica pură spre matematica aplicată.

*

Posibilitatea utilizării calculului diferenţial şi integral pentru descrierea unor realităţi biologice a fost remarcată încă de la începuturile dezvoltării analizei matematice. Pentru a explica aceasta, să considerăm o specie al cărei număr de indivizi la momentul t este notat cu $p(t)$. Fie $n(t,p)$ şi $m(t,p)$ numărul indivizilor care se nasc, respectiv mor în intervalul unitar de timp $[t, t+1]$. Dacă acceptăm faptul că pe un interval scurt de timp $[t, t+h]$ creşterea populaţiei este uniformă, atunci putem afirma că variaţia populaţiei în intervalul $[t, t+h]$, adică $p(t+h) - p(t)$ este egală cu diferenţa dintre naşterile şi decesele înregistrate în acest timp, adică cu $(n(t,p) - m(t,p))\,h$. Atunci

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{h} = n(t,p) - m(t,p).$$

Făcând $h \to 0$ obţinem forma generală a ecuaţiei care modelează procesul de creştere a unei populaţii

$$p'(t) = n(t,p) - m(t,p).$$

Din aceasta se obţin legi specifice de creştere, dacă sunt precizaţi termenii $n(t,p)$ şi $m(t,p)$, sau numai diferenţa lor $n(t,p) - m(t,p)$. Aşa de exemplu, dacă considerăm că naşterile şi decesele sunt direct proporţionale cu populaţia, adică $n(t,p) = ap(t)$ şi $m(t,p) = bp(t)$, atunci obţinem *ecuaţia lui Malthus* (1766-1834) de creştere a unei populaţii [2]

$$p' = rp,$$

unde $r = a - b$. Constanta a este *rata naşterii per capita*, b este *rata mortalităţii per capita*, *iar* r este *rata creşterii per capita*. Soluţia acestei ecuaţii, care satisface condiţia iniţială $p(t_0) = p_0$, este funcţia exponenţială

$$p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}.$$

Este clar că dacă $a > b$ (adică $r > 0$), atunci populaţia creşte exponenţial la infinit; dacă $a < b$, atunci populaţia descreşte exponenţial la zero (populaţia tinde să disparā); iar dacă $a = b$, atunci populaţia este constantă. Este acceptat faptul că legea lui *Malthus* oferă o estimare corectă a creşterii unei populaţii pe un interval mărginit (scurt) de timp. Pe termen lung însă, creşterea este de cele mai multe ori încetinită şi în anumite condiţii are loc chiar descreştere. Aşadar ecuaţia lui *Malthus* trebuie modificată pentru a o pune în acord cu realitatea. Astfel, *Verhulst* (1804-1849) a propus să se considere expresia $n(t,p) - m(t,p)$ ca fiind o funcţie pătratică de p, adică a propus ecuaţia de creştere [4]

$$p' = rp\left(1 - \frac{p}{K}\right),$$

unde r, K sunt două constante pozitive. Remarcăm că această ecuaţie ia în seamă, prin intermediul termenului rp^2/K, efectul inhibator al aglomerării. De asemenea, cât timp p este sub pragul K, membrul drept este pozitiv (adică $p' > 0$) şi deci populaţia creşte, iar cât timp p este peste pragul K, avem $p' < 0$ şi deci populaţia descreşte. Aşadar avem de a face cu efectul de autolimitare a creşterii. Ecuaţia lui *Verhulst* intervine şi în alte domenii şi este cunoscută şi sub denumirea de *ecuaţie logistică*.

*

Dezvoltarea biomatematicii moderne începe însă odată cu *Vito Volterra* (1860-1940). Acestuia i se datorează *modelul pradă-prădător*, cunoscut şi sub numele de *sistemul Lotka-Volterra*, ce descrie dinamica a două specii în interacţiune, o specie pradă şi o alta prădătoare. *Volterra* a fost condus la elaborarea acestui model matematic ca urmare a discuţiilor purtate în jurul anului 1925 cu biologul marin *Umberto d'Ancona* [1]. Acesta îi cere o explicaţie matematică a faptului că la reluarea pescuitului în Marea Mediterană, după primul război mondial, ponderea speciilor răpitoare în captura totală de peşte era mai mare decât fusese înainte de război. Iată cum explică *Volterra* acest fapt. Fie $x(t)$ populaţia pradă şi $y(t)$ populaţia prădătoare, la momentul t. Dacă nu există prădători, dinamica populaţiei pradă este descrisă de legea lui *Malthus* $x' = r_1 x$, unde $r_1 > 0$ şi are o creştere exponenţială. Analog, în absenţa prăzii, populaţia prădătoare neavând hrană descreşte exponenţial după legea $y' = -r_2 y$, unde $-r_2 < 0$. Interacţiunile dintre cele două specii se vor reflecta în ecuaţii prin termeni care contribuie la descreşterea primei specii şi respectiv la creşterea celei de a doua. Putem accepta că rata per capita de creştere a speciei pradă se diminuează proporţional cu numărul răpitorilor, deci

$$\frac{x'}{x} = r_1 - a_1 y,$$

unde factorul de proporţionalitate a_1 este pozitiv. Analog, rata per capita de descreştere a populaţiei răpitoare se ameliorează proporţional cu prada, adică

$$\frac{y'}{y} = -r_2 + a_2 x,$$

unde $a_2 > 0$. Astfel se obţine sistemul *Lotka-Volterra* ca cel mai simplu model pentru dinamica pradă-prădător:

$$\begin{cases} x' = x\,(r_1 - a_1 y) \\ y' = -y\,(r_2 - a_2 x). \end{cases}$$

În acest sistem, toate constantele a_1, a_2, r_1, r_2 sunt pozitive. Folosind prima ecuaţie a sistemului, să observăm că atât timp cât răpitorii sunt în număr mai mic decât r_1/a_1, avem $x' > 0$, adică populaţia pradă creşte. Pe perioadele de timp cât y depăşeşte valoarea de prag r_1/a_1, avem $x' < 0$, adică o descreştere a populaţiei pradă. Observaţii similare se pot face asupra tendinţei de creştere/descreştere a populaţiei răpitoare, dacă se foloseşte cea de a doua ecuaţie din sistem.

Modelul poate fi modificat pentru a lua în seamă o serie de alţi factori cum ar fi migraţia, vănătoarea sau pescuitul. Astfel, în cazul când x reprezintă populaţia de peşte pradă, y populaţia de peşte răpitor şi se consideră că prin pescuit se diminuează ratele de creştere x' şi y' proporţional cu cele două populaţii, se ajunge la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x' = x\,(r_1 - a_1 y) - dc_1 x \\ y' = -y\,(r_2 - a_2 x) - dc_2 y \end{cases}$$

unde factorul de proporţionalitate d ($d \geq 0$) semnifică intensitatea activităţii de pescuit, iar factorii $c_1, c_2 > 0$ reprezintă ponderile specifice de capturare ale celor două specii. Factorul d este cu atât mai mare cu cât pescuitul este mai intens şi este nul în absenţa acestuia. Pornind de la constatarea tendinţei proceselor din natură de a se echilibra în timp scurt, adică de a ajunge la o evoluţie constantă, invariantă în timp, putem presupune că starea de echilibru este prezentă la momentul reînceperii pescuitului. Atunci, derivatele x', y' sunt nule şi din egalarea cu zero a membrilor drepţi ai ecuaţiilor se obţine sistemul algebric

$$\begin{cases} x\,(r_1 - a_1 y) - dc_1 x = 0 \\ -y\,(r_2 - a_2 x) - dc_2 y = 0 \end{cases}$$

a cărui soluţie nenulă este

$$x^* = \frac{1}{a_2}\,(r_2 + dc_2)\,, \qquad y^* = \frac{1}{a_1}\,(r_1 - dc_1)\,.$$

Rezultă că raportul dintre specia răpitoare şi specia pradă este

$$\frac{y^*}{x^*} = \frac{a_2\,(r_1 - dc_1)}{a_1\,(r_2 + dc_2)}.$$

Acest raport poate fi privit ca o funcţie $R(d)$ depinzând de intensitatea d a pescuitului. Analizăm monotonia acestei funcţii calculând derivata ei. Obţinem

$$R'(d) = -\frac{a_2}{a_1}\frac{c_1r_2 + c_2r_1}{(r_2 + dc_2)^2} < 0.$$

Aşadar, funcţia $R(d)$ este descrescătoare. Aceasta răspunde întrebării biologului *d'Ancona*, căci la o intensitate mai mică a pescuitului – cum era cazul în timpul războiului – îi corespunde o valoare mai mare a raportului $R(d)$.

*

Cartea publicată de *Volterra*, mai întâi în italiană, apoi în franceză [5], a reprezentat începutul ecologiei matematice şi totodată al biomatematicii în general. Astăzi biomatematica este un domeniu al matematicii aplicate în plină expansiune, ce oferă răspunsuri şi analize riguroase la marile provocări ale biologiei şi medicinii actuale, cum ar fi răspândirea şi controlul epidemiilor, biologia celulară şi moleculară, genetica, mutaţiile celulare cancerigene, imunologia, bolile neurologice etc. [3].

Bibliografie

[1] J.R. Goodstein, *The Volterra Chronicles. The Life and Times of an Extraordinary Mathematician 1860-1940*, Amer. Math. Soc., 2007.

[2] T.R. Malthus, *An essay on the principle of population*, J Johnson in St Paul's Church-yard, London, 1798.

[3] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, Berlin, 1989.

[4] P.F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Corr. Math. Et. Phys. 10 (1838), 113-121.

[5] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gautier-Villars, Paris, 1931.

EXAMENE ŞI CONCURSURI

A 35-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICĂ

prezentare de Mihai Chiş[1], Cătălin Gherghe[2] şi Marius Perianu[3]

În perioada 7 - 12 mai 2018, oraşul Belgrad (Serbia), a găzduit cea de-a 35-a ediţie a Olimpiadei Balcanice de Matematică – BMO2018. BMO este o competiţie anuală la care participă elevi de liceu şi presupune rezolvarea de către fiecare participant, în cel mult patru ore şi treizeci de minute, a patru probleme de geometrie, teoria numerelor, combinatorică şi algebră.

[1] Lect.univ.dr., Facultatea de Matematică şi Informatică, Univ. de Vest din Timişoara.

[2] Conf. univ. dr., Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti.

[3] Profesor, Colegiul Naţional „Ion Minulescu", Slatina.