Bulletin de la Classe des sciences

L'extension d'une formule de cubature

D. V. Ionescu

AUTRES COMMUNICATIONS

ANALYSE NUMÉRIQUE

L'extension d'une formule de cubature

D. V. IONESCU
(Cluj, Roumanie) (*)

Dans les C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris [1], nous avons donné la formule de cubature

$$\iint_D f\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{y_0}^{y_{n+1}} f(x_i, y)\,dy + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x, y_k)\,dx -$$

$$- \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik} f(x_i, y_k) + \iint_D \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}\,dxdy \qquad (1)$$

relativement au rectangle D,

$$(x_0 \leqslant x \leqslant x_{n+1},\ \ y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1})$$

et à un réseau de nœuds $\mathrm{M}_{ik}(x_i, \varphi_k)$ avec l'hypothèse

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1};\ \ y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1}. \qquad \text{(H)}$$

et à une fonction f donnée sur D, continue sur D ainsi que ses dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^p \partial y^{p-1}},\ \frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^{p-1} \partial y^p},\ \frac{\partial^{2(p-1)} f}{\partial x^{p-1} \partial y^{p-1}}$$

pour $p = 1, 2, \ldots, n$

(*) Présenté par M. Th. LEPAGE.

La fonction φ a été déterminée sur D, par un problème aux limites. Les constantes λ_i, μ_k et γ_{ik} sont déterminées par les équations

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^r = \frac{x_{n+1}^{r+1} - x_0^{r+1}}{r-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k x_i^r = \frac{y_{n+1}^{r+1} - y_0^{r+1}}{r+1} \qquad (r = 0, 1, \dots, n-1) \tag{2}$$

ct

$$\gamma_{ik} = \lambda_i \mu_k. \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

On peut se poser aussi le problème de l'existence des formules de cubature (1), avec une des hypothèses suivantes

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}; \; y_0 = y_1 < y_2 < \cdots < \gamma_n < y_{n+1} \tag{H_1}$$

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}; \; y_0 = y_1 < y_2 < \cdots < \gamma_n < y_{n+1} \tag{H_2}$$

$$x_0 = x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}; \; y_0 = y_1 < y_2 < \cdots < \gamma_n < y_{n+1} \tag{H_3}$$

$$x_0 = x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}; \; y_0 = y_1 < y_2 < \cdots < \gamma_n = y_{n+1} \tag{H_4}$$

$$x_0 = x_1 < \cdots < x_n = x_{n+1}; \; y_0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = y_{n+1} \tag{H_5}$$

L'étude des formules de cubature dans une des hypothèses $(H_1) - (H_5)$ se fait comme dans notre travail [1] déjà cité. Pour abréger nous exposons dans ce travail la formule de la forme (1) avec l'hypothèse (H_5) en insistant sur les problèmes aux limites qui se posent à cette occasion.

1. Préliminaires

1.1. Considérons un rectangle Δ, $(x < x_1 \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$ et deux fonctions f et φ continues sur Δ, ainsi que leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^p \partial y^{p-1}}, \; \frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^{p-1} \partial y^p}, \; \frac{\partial^{2p} f}{\partial x^p \partial y^p}$$

$$\frac{\partial^{2p-1} \varphi}{\partial x^p \partial y^{p-1}}, \; \frac{\partial^{2p-1} \varphi}{\partial x^{p-1} \partial y^p}, \; \frac{\partial^{2p} \varphi}{\partial x^p \partial y^p}$$

pour $p = 1, 2, \ldots, n$. Alors on a la formule de transformation

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dx dy = \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y_2} - \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_2, y_1} - \\
&- \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial x^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y_2} + \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y_1} \Bigg] - \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x, y_1} - \\
&- \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x, y_2} \Bigg] dx + \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1} \int_{y_1}^{y_2} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y} - \\
&- \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y} \Bigg] dy + \\
&+ \iint_{\Delta} \frac{\partial^{2r} \varphi}{\partial x^n \partial y^n} f dx dy.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

1.2. Considérons le rectangle D, et le réseau de nœuds M_{ik}, dans l'hypothèse (H). Puisque $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $x_n = x_{n+1}$, $y_n = y_{n+1}$, nous écrirons x_1, y_1, x_n, y_n à la place de x_{n+1}, y_{n+1}. Nous désignons par D_{ik} le rectangle

$$D_{ik}: x_i: \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \; y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$$

et nous aurons le parage du rectangle D par le rectangle D_{ik}.

Nous attachons aux rectangles D_{ik} les fonctions φ_{ik} continues sur D_{ik} ainsi que leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2p-1} \varphi_{ik}}{\partial x^p \partial y^{p-1}}, \; \frac{\partial^{2p-1} \varphi_{ik}}{\partial x^{p-1} \partial y^p}, \; \frac{\partial^{2p} \varphi_{ik}}{\partial x^p \partial y^p}.$$

pour $p = 1, 2, \ldots, n$. Alors on peut appliquer la formule fondamentale pour chaque intégrale double

$$\iint_{D} \varphi_{ik} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial \varphi^n} dxdy \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

En ajoutant membre à membre toutes ces formules, on obtient la formule suivante

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \iint_{D_{ik}} \varphi_{ik} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dxdy =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_n, y_n} - \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right]_{x_n, y_1} -$$

$$- \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi_{1,n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y_n} + \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi_{11}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y_1} \Bigg] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} (\varphi_{i,1} - \varphi_{i-1,1})}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_i, y_1} - \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} (\varphi_{i,n-1} - \varphi_{i-1,n-1})}{\partial \kappa^{n-r-1} \partial \varphi^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial \kappa^r \partial \varphi^r} \right)_{x_i, y_n} \Bigg] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} (\varphi_{i,k} - \varphi_{1,k-1})}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y_k} - \left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} (\varphi_{n-1,1} - \varphi_{n-1,k-1})}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_n, y_k} \Bigg] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^{2(n-r-1)} (\varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k-1} - \varphi_{i,k-1} - \varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-r-1} \partial x^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right]_{x_i, y_k} + \qquad (1,2)$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x}^{x_{i+1}} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{i,1}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x, y_1} - \left(\frac{\partial^{2(n-2)-1} \varphi_{i,n-1}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x, y_n} \Bigg] dx +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} \int_{x}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{i,k} - \varphi_{i,k-1})}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x, y} dx +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{y}^{y_{k+1}} \Bigg[\left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{1,k}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_1, y} - \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi_{n-1,k}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x_n, y} \Bigg] dy +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{y}^{y_{k+1}} \left(\frac{\partial^{2(n-r)-1} (\varphi_{i,k} - \varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} \right)_{x, y} dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \iint_{D_{ik}} \frac{\partial^{2n} \varphi_{ik}}{\partial x^n \partial y^n} f dxdy.$$

La formule (1, 2) est fondamentale pour ce travail.

1.3. Relativement à la formule (1, 2) nous traiterons plusieurs problèmes aux limites.

Problèmes (P_{11}) *Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^{2n}\varphi_{11}}{\partial x^n \partial y^n} = 1. \tag{1,3}$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{11}}{\partial x^{n-1}\partial y^n}\right|_{x_1,y} = -\lambda_1$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi}{\partial x^n \partial y^{n-1}}\right|_{x,y_1} = -\mu_1 \tag{1,4$_0$}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{11}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_1,y_1} = \gamma_{11}$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{11}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x_1,y} = 0 \tag{1,4$_r$}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{11}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,y_1} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{11}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_1,y_1} = 0$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Problème (P_{ik}), $i = 2, 3, \ldots, n-1$ *Déterminer les solutions des équations aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^{2n}\varphi_{i1}}{\partial x^n \partial y^n} = 1. \tag{1,5}$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}(\varphi_{i,1} - \varphi_{i-1,1})}{\partial x^{n-1}\partial y^n}\right|_{x,\ y} = -\lambda_i$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{i,1}}{\partial x^n \partial y^{n-1}}\right|_{x,y_1} = -\mu_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{1,6$_0$}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{i,1}-\varphi_{i-1,1})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x,\,y_1}=\gamma_{i1}.$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}(\varphi_{i,1}-\varphi_{i-1,1})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x,\,y}=0$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{i,1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,\,y_1}=0 \tag{1,6$_r$}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{i,1}-\varphi_{i-1,1})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,\,y_1}=0.$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

En plus il faut que les $\varphi_{i,1}$ *vérifient les conditions supplémentaires*

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n}}\right|_{x,\,y}=\lambda_n$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x,\,y_1}=-\gamma_{n1}. \tag{1,7$_0$}$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x,\,y}=0 \tag{1,7$_r$}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,\,y_1}=0$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

D'après les conditions aux limites la résolution du problème $(\mathrm{P}_{i,1})$ est liée au problème (P_{11}).

Les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n1}$ seront déterminées de manière que le problème $(\mathrm{P}_{i,1})$ soit possible.

Problème $(\mathrm{P}_{i,k})$, $\mathrm{k} = 2, 3, \ldots, \mathrm{n}-1$. *Déterminer les solutions des équations aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^{2n}\varphi_{1,k}}{\partial x^{n}\partial y^{n}}=1. \tag{1,8}$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{1,k}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n}}\right|_{x_1,\,y}=-\lambda_1$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}(\varphi_{1,k}-\varphi_{1,k-1})}{\partial x^n \partial y^{n-1}}\right|_{x,\,y_\kappa} = -\mu_k. \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{1,k}-\varphi_{1,k-1})}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}\right|_{x_1,\,y_\kappa} = \gamma_{1,k}. \qquad (1,9_0)$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{1,k}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}}\right|_{x_1,\,y_\kappa} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}(\varphi_{1,k}-\varphi_{1,k-1})}{\partial x^{n-2} \partial y^{n-r-1}}\right|_{x,\,y_\kappa} = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{1,k}-\varphi_{1,k-1})}{\partial \kappa^{n-r-1} \partial \varphi^{n-r-1}}\right|_{\kappa_1,\,y_\kappa} = 0. \qquad (1,9_r)$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

En plus il faut que les φ_{ik} *vérifient les conditions supplémentaires*

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{1,n-1}}{\partial x^n \partial y^{n-1}}\right|_{x,y_n} = \mu_n$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{1,n-1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}\right|_{x_1,\,y_n} = -\gamma_{1,n} \qquad (1,10_0)$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{1,n-1}}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}}\right|_{x,y_n} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{1,n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}\right|_{x_1,y_n} = 0 \qquad (1,10_r)$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

On voit bien d'après les conditions aux limites que la résolution du problème (P_{nk}) est liée au problème (P_{11}).

Les constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}$ seront déterminées de manière que le problème $(P_{i,k})$ soit possible.

Problème $(P_{i,k})$ $i, k = 2, 3, \ldots, n-1$. *Déterminer les solutions des équations aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^{2n}\varphi_{ik}}{\partial x^n \partial y^n} = 1. \qquad (1,11)$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}(\varphi_{ik}-\varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n}}\right|_{x_1,y} = -\lambda_i$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}(\varphi_{ik}-\varphi_{i,k-1})}{\partial x^{n}\partial y^{n-1}}\right|_{x,y} = -\mu_k \qquad (i,k=2,3,\ldots,n-1)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{ik}+\varphi_{i-1,k-1}-\varphi_{i,k-1}-\varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_i,y_K} = \gamma_{ik}. \qquad (1,12_0)$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}(\varphi_{i,k}-\varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x_i,y} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}(\varphi_{i,k}-\varphi_{i,k-1})}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,y_K} = 0 \qquad (i,k=2,2,\ldots,n-1) \qquad (1,12_r)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{i,k}+\varphi_{i-1,k-1}-\varphi_{i,k-1}-\varphi_{i-1,k})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_1,y} = 0$$

pour r = 1, 2, ..., n − 1.

En plus il faut que les φ_{ik} *vérifient les conditions supplémentaires*

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{n-1,k}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n}}\right|_{x_n,y} = \lambda_n$$

$$(k=2,3,\ldots,n-1) \qquad (1,13_0)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{n-1,k}-\varphi_{n-1,k-1})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n,y} = -\gamma_{nk}.$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{n-1,k}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x_0,yx} = 0$$

$$(k=2,3,\ldots,n-1) \qquad (1,13_r)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{n-1,k}-\varphi_{n-1,k-1})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{xn,y_K} = 0$$

pour r = 1, 2, ..., n − 1.

Ensuite il faut que

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{i,n-1}}{\partial x^{n}\partial y^{n-1}}\right|_{x,y_n} = \mu_n$$

$$(i=2,3,\ldots,n-1) \qquad (1,14_0)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{i,n-1}-\varphi_{i-1,n-1})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_i,y_n} = -\gamma_{i,n}$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{i,n-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,y_n} = 0$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n-1) \qquad (1{,}14_r)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{i,n-1} - \varphi_{i-1,n-1})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_i,y_n} = 0$$

pour r = 1, 2, ..., n − 1.

Enfin il faut que

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n,y_n} = \gamma_{n,n}$$

et $(1{,}15_0)$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n,y_n} = 0$$

pour r = 1, 2, ..., n − 1.

Les constantes $\gamma_{i,k}$ seront déterminées de manière que le problème $(P_{i,k})$ soit possible pour $i, k = 2, 3, \ldots, n-1$.

2. Le problème (P_{11})

2.1. En intégrant l'équation aux dérivées partielles (1, 3) avec les conditions $(1, y_0)$ on trouve

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{11}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = (x-x_1)(y-y_1) - \lambda_1(y-y_1) - \mu_1(x-x_1) + \gamma_{11} \quad (2{,}1)$$

Ensuite en intégrant cette équation avec conditions $(1, \varphi_2)$ on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2(n-r)}\varphi_{11}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} &= \frac{1}{r!\,r!}(x-x_1)^r(y-y_1)^r - \\ &- \frac{1}{(r-1)!\,r!}\lambda_1(x-x_1)^{r-1}(y-y_1)^r - \\ &- \frac{1}{(r-1)!\,r!}\mu_1(y-y_1)^{r-1}(x-x_1)^r + \\ &+ \frac{1}{(r-1)!\,(r-1)!}\gamma_{11}(x-x_1)^{r-1}(y-y_1)^{r-1}.\end{aligned} \qquad (2{,}2)$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n$. La démonstration se fait par la méthode de l'induction complète.

3. Le problème $(P_{i,1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$

3.1. Déterminons d'abord la fonction φ_{21}, par l'équation aux dérivées partielles (1, 5) et les conditions aux limites $(1, 6_0)$ et $(1, 6_r)$, correspondent à $i = 2$. A l'aide de la fonction φ_{11} déterminée dans le § 2, on a

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{21}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y} = \left.\frac{\partial^{2n+1}\varphi_{11}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y} - \lambda_2 = (x_2 - x_1) - (\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{21}}{\partial x^{n}\partial y^{n-1}}\right|_{x, y_1} = -\mu_1$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{21}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{\kappa_2, n_1} = \left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{11}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y_1} + \gamma_{21} = -\mu_1(x_2 - x_1) + \gamma_{11} + \gamma_{21}$$

En intégrant l'équation (1, 5) avec ces conditions, on trouve

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{21}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = \tag{3,1}$$

$$= (x - x_1)(y - y_1) - (\lambda_1 + \lambda_2)(y - y_1) - \mu_1(x - x_1) + \gamma_{11} + \gamma_{21}$$

Ensuite, il faut intégrer cette équation avec les conditions $(1, 6_2)$ correspondent à r = 1. On a

$$\left.\frac{\partial^{2n-3}\varphi_{21}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y} = \left.\frac{\partial^{2n-3}\varphi_{11}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y} = \frac{1}{2}(x_2 - \kappa_1)^2(y - y_1) -$$

$$- \lambda_1(x_2 - x_1)(y - y_1) - \frac{\mu_1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \gamma_{11}(x_2 - x_1)$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-3}\varphi_{21}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-2}}\right|_{x, y_1} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-2)}\varphi_{21}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right|_{x_2 . \varphi_1} = \left.\frac{\partial^{2(n-2)}\varphi_{11}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right|_{x_2, y_1}$$

En intégrant l'équation (3, 1) avec ces conditions on trouve

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\varphi_{21}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = \frac{1}{2!\,2!}(x - x_1)^2(y - y_1)^2 -$$

$$- \frac{1}{1!\,2!}(\lambda_1(x - x_1) + \lambda_2(x - x_2)](y - y_1)^2 - \tag{3.2}$$

$$- \frac{1}{1!\,2!}\mu_1(x - x_1)^2(y - y_1) + [\gamma_{11}(x - x_1) + \gamma_{21}(x - x_2)](y - y_1)$$

En général, on a

$$\frac{\partial^{2(n-r)}\varphi_{21}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} = \frac{1}{r!\,r!}(x - x_1)^r(y - y_1)^r -$$

$$- \frac{1}{(r-1)!\,r!}[\lambda_1(x - x_1)^{r-1} + \lambda_2(x - x_2)^{r-1}](y - y_1)^r -$$

$$- \frac{1}{(r-1)!\,r!}\mu_1(y - y_1)^{r-1}(x - x_1)^r + \tag{3,3}$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!\,(r-1)!}[\gamma_{11}(x - x_1)^{r-1} + \gamma_{21}(x - x_2)^{r-1}](y - y_1)^{r-1}$$

On démontre cette formule par la méthode de l'induction complète, en remarquant que pour $r = 2$ elle coïncide avec la formule (3, 2). La formule (3, 3) est valable pour $r = 1, 2, \ldots, n$.

3.2. En général on a

$$\frac{\partial^{2(n-r)}\varphi_{i,1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} = \frac{1}{r!\,r!}(x - x_1)^r(y - y_1)^r -$$

$$- \frac{1}{(r-1)!\,r!}[\lambda_1(x - x_1)^{r-1} + \ldots + \lambda_i(x - x_i)^{r-1}](y - y_1)^r -$$

$$- \frac{1}{(r-1)!\,r!}\mu_1(y - y_1)^{r-1}(x - x_1)^r +$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!\,(r-1)!}[\gamma_{11}(x - x_1)^{r-1} + \cdots + \gamma_{i1}(x - x_i)^{r-1}](y - y_1)^{r-1}$$

On démontre cette formule par la méthode de l'induction complète.

On remarque d'abord que la formule (3, 4) est valable pour $i = 2$. Ensuite on intègre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n}\varphi_{i+1,1}}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}} = 1,$$

avec les conditions aux limites $(1, 6_0)$ et $(1, 6_r)$ correspondant à l'indice $i + 1$ et en tenant compte de la formule (3, 4). On remarque que la formule obtenue donnant

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\varphi_{i+1,1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}},$$

peut se déduire de la formule (3, 4) en remplaçant i par $i + 1$.

La formule (3, 4) est valable pour $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ et $r = 1, 2, \ldots, n$.

3.3. Il reste à déterminer les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n1}$ par les conditions supplémentaires $(1, 7_0)$, $(1, 7\ )$.

D'après la formule (3, 4), on a pour $r = 1$ et $i = \mathrm{n} - 1$

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = (\kappa - \kappa_1)(y - y_1) - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})(y - y_1) -$$

$$- \mu_1(x - x_1) + (\gamma_{11} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{n-1,1})$$

Les conditions $(1, 7_0)$ nous conduisent aux équations

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= x_n - x_1 \\ \gamma_{11} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{n1} &= \mu_1(x_n - x_1) \end{aligned} \tag{3,5}$$

En remplaçant dans la formule (3, 4) r par $r + 1$ et i par $n - 1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} &= \frac{1}{(r+1)!(r+1)!}(x - x_1)^{r+1}(y - y_1)^{r+1} - \\ &- \frac{1}{r!(r+1)!}[\lambda_1(x - x_1) + \cdots + \lambda_{n-1}(x - x_{n-1})^r]\,(x - x_1)^{r+1} - \\ &- \frac{1}{r!(r+1)!}\mu_1(y - y_1)^r(x - x_1)^{r+1} + \\ &+ \frac{1}{r!\,r!}(\gamma_{11}(x - x_1)^r + \cdots + \gamma^{n-1,1}_{n+1,1}(x - x_{n-1})^r]\,(y - y_1)^r \end{aligned} \tag{3,6}$$

Il résulte qu'on peut écrire

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n,y} =$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{(y-y_1)^r}{r!}\left[\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1} - (\lambda_1(x_n-x_1)^r + \cdots + \lambda_{n-1}(x_n-x_{n-1})^r)\right] +$$

$$+ \frac{1}{r!}\frac{(y-y_1)^{r-1}}{(r-1)!}\left[\gamma_{11}(x_n-x_1)^r + \cdots +\right.$$

$$\left.+ \gamma_{n-1,1}(x_n-x_{n-1})' - \mu_1\frac{(x_n-x_1)}{r+1}\right]$$

En écrivant que le premier membre est nul pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ quel que soit y, on est conduit aux équations

$$\lambda_1(x_n-x_1)^r + \cdots + \lambda_{n-1}(x_n-x_{n-1}) = \frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (3,7)$$

$$\gamma_{11}(x_n-x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x_n-x_{n-1})^r = \mu_1\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

En résumé les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\gamma_n, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n2}$ sont données par les équations (3, 5) et (3, 7) c'est-à-dire par les systèmes

$$\begin{gathered}\lambda_1 + \quad + \lambda_{n-1} + \lambda_n = x_n - x_1\\ \lambda_1(x_n-x_1) + \cdots + \lambda_{n-1}(x_n-x_{n-1}) = \frac{(x_n-x_1)^r}{2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1(x_n-x_1)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}(x_n-x_{n-1})^{n-1} = \frac{(x_n-x_1)^r}{n}\end{gathered} \qquad (3,8)$$

et

$$\begin{gathered}\gamma_{11} + \cdots + \gamma_{n-1,1} + \gamma_{n-1} = \mu_1(x_n-x_1)\\ \gamma_{11}(x_n-x_1) + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x_n-x_{n-1}) = \mu_1\frac{(x_n-x_1)^r}{2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{11}(x_n-x_1)^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x_n-x_{n-1})^{n-1} = \mu_1\frac{(x_n-x_1)^n}{n}\end{gathered} \qquad (3,9)$$

D'autre part, d'après la formule (3, 6) on a

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n, y_1} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ce qui montre que les conditions (1, 7) sont satisfaites.

Ainsi le problème $(P_{i,1})$ est résolu. On a la formule (3, 4) valable pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et $r = 1, 2, \ldots, r$. Pour $r = n$, la formule (3, 4) donne la fonction φ_{i1}.

Les systèmes (3, 8), (3, 9) montrent que

$$\gamma_{11} = \lambda_1\mu_1,\ \gamma_{21} = \lambda_2\mu_1, \ldots, \gamma_{n-1} = \lambda_n\mu_1.$$

4. Le problème $(P_{1,K})$ $k = 2, 3, \ldots, n-1$

4.1. Ce problème est analogue au problème $(P_{i.1})$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2(n-r)}\varphi_{1,k}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} &= \frac{1}{r!\,r!}(x-x_1)^r(y-y_1)^r - \\ &- \frac{1}{(r-1)!\,r!}\lambda_1(x-x_1)^{r-1}(y-y_1)^r - \\ &- \frac{1}{(r-1)!\,r!}[\mu_1(y-y_1)^{r-1} + \cdots + \mu_k(y-y_k)^{r-1}](x-x_1)^r + \\ &+ \frac{1}{(r-1)!\,(r-1)!}[\gamma_{11}(y-y_1)^{r-1} + \ldots + \gamma_{1,k}(y-y_k)^{r-1}](x-x_1)^{r-1}.\end{aligned}$$

pour $k = 2, 3, \ldots, n-1$ et $r = 1, 2, \ldots, n$.

Les constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont données par le système d'équations

$$\begin{aligned}&\mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} + \mu_n = x_n - x_1\\ &\mu_1(y_n - y_1) + \cdots + \mu_{n-1}(y_n - y_{n-1}) = \frac{(y_n - y_1)^2}{2}\\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\mu_1(y_n - y_1)^{n-1} + \cdots + \mu_{n-1}(y_n - y_{n-1})^{n-1} = \frac{(y_n - y_1)^n}{n}\end{aligned} \qquad (4,2)$$

et
$$\gamma_{11} + \cdots + \gamma_{1,n-1} + \gamma_{1,n} = \lambda_1(y_n - y_1)$$
$$\gamma_{11}(y_n - y_1) + \cdots + \gamma_{1,n-1}(y_n - y_{n-1}) = \lambda_1 \frac{(y_n - y_1)^2}{2} \tag{4,3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_{11}(y_n - y_1)^{n-1} + \cdots + \gamma_{1,n-1}(y_n - y_{n-1})^{n-1} = \lambda_1 \frac{(y_n - y_1)^r}{n}$$

On a
$$\gamma_{11} = \lambda_1\mu_1,\ \gamma_{12} = \lambda_1\mu_2, \ldots, \gamma_{1n} = \lambda_1\mu_n \tag{4,4}$$

5. Le problème $(\mathrm{P}_{i,k})$ $i, k = 2, 3, \ldots, n-1$

5.1. Le problème $(\mathrm{P}_{i,k})$ pour $i, k = 2, 3, \ldots, n-1$ est lié aux fonctions φ_{i1} et $\varphi_{i,k}$ pour $i, k = 2, 3, \ldots, n-1$ déterminées dans les § 3 et § 4. Commençons par déterminer φ_{22}. On va intégrer d'abord l'équation
$$\frac{\partial^{2n}\varphi_{22}}{\partial x^n \partial y^n} = 1. \tag{5,1}$$
avec les conditions aux limites
$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^{2n-1}(\varphi_{22} - \varphi_{12})}{\partial x^{n-1}\partial y^n}\right|_{x_2, y} &= -\lambda_2 \\
\left.\frac{\partial^{2n-1}(\varphi_{22} - \varphi_{21})}{\partial x^n\partial y^{n-1}}\right|_{x, y_2} &= -\mu_2 \\
\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{22} + \varphi_{11} - \varphi_{12} - \varphi_{21})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y_2} &= \gamma_{22}.
\end{aligned} \tag{5,2}$$

Mais d'après les formules (2, 1), (2, 1) (4, 1) on a
$$\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{11}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = (x - x_1)(y - y_1) - \lambda_1(y - y_1) - \mu_1(x - x_1) + \gamma_{11}$$
$$\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{21}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = (x - x_1)(y - y_1) - (\lambda_1 + \lambda_2)(\varphi - \varphi_1) -$$
$$- \mu_1(x - y_1) + \gamma_{11} + \gamma_{21}$$
$$\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{12}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = (x - x_1)(y - y_1) - \lambda_1(y - y_1) -$$
$$- (\mu_1 + \mu_2)(x - x_1) + \gamma_{11} + \gamma_{12}.$$

Il résulte alors d'après les formules (5, 2) que

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{22}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n}}\right|_{x_2, y} = (x_2 - x_1) - (\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{22}}{\partial x^{n}\partial y^{n-1}}\right|_{x, y_2} = (\varphi_2 - \varphi_1) - (\mu_1 + \mu_2)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{22}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y_2} = (\kappa_2 - \kappa_1)(\varphi_2 - \varphi_1) - (\mu_1 - \mu_2)(\kappa_2 - \kappa_1) -$$
$$- (\lambda_1 + \lambda_2)(y_2 - y_1) + \gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{12} + \gamma_{22}$$

En intégrant l'équation (5, 1) avec ces conditions, on trouve

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{22}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = (x - x_1)(y - y_1) - (\mu_1 + \mu_2)(x - x_1) -$$
$$- (\lambda_1 + \lambda_2)(y - y_1) + \gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{12} + \gamma_{22}. \tag{5,3}$$

« Ensuite on integre l'équation (5,3) avec les conditions »

$$\left.\frac{\partial^{2n-3}(\varphi_{22} - \varphi_{12})}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-1}}\right|_{x_2, y} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{2n-3}(\varphi_{22} - \varphi_{21})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-2}}\right|_{x, y_2} = 0.$$
$$\left.\frac{\partial^{2(n-2)}(\varphi_{22} + \varphi_{11} - \varphi_{12} - \varphi_{21})}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right|_{x_2, y_2} = 0. \tag{5,4}$$

et l'on trouve

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\varphi_{22}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = \frac{1}{2!\,2!}(x - x_1)^2(y - y_1)^2 -$$
$$- \frac{1}{1!\,2!}[\mu_1(y - y_1) + \mu_2(y - y_2)](x - x_1)^2 -$$
$$- \frac{1}{1!\,2!}[\lambda_1(x - x_1) + \lambda_2(x - x_2)](y - y_1)^2 +$$
$$+ [\gamma_{11}(x - x_1) + \gamma_{21}(x - x_2)](y - y_1) +$$
$$+ [\gamma_{12}(x - x_1) + \gamma_{22}(x - x_2)](y - y_2).$$

En général on démontre par la méthode de l'induction complète que

$$\frac{\partial^{2(n-r)}\varphi_{22}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} = \frac{1}{r!\,r!}(x - x_1)^r(y - y_1)^r -$$

$$-\frac{1}{(r-1)!\,2!}[\mu_1(y - y_1)^{r-1} + \mu_2(y - y_2)^{r-1}](x - x_1)^r -$$

$$-\frac{1}{(r-1)!\,r!}[\lambda_1(x - x_1)^{r-1} + \lambda_2(x - x_2)^{r-1}](y - y_1)^r +$$

$$+\frac{1}{(r-1)!\,(r-1)!}[(\gamma_{11}(x - x_1)^{r-1} + \gamma_{21}(x - x_2)^{r-1})(y - y_1)^{r-1} +$$

$$+(\gamma_{12}(x - x_1)^{r-1} + \gamma_{22}(x - x_2)^{r-1})(y - y_2)^{r-1}]$$

La formule (5, 5) est valable pour $r = 1, 2, \ldots, n$.

5.2. Toujours par la méthode de l'induction complète, on démontre que

$$\frac{\partial^{2(n-r)}\varphi_{i2}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} = \frac{1}{r!\,r!}(x - x_1)^r(y - y_1)^r -$$

$$-\frac{1}{(r-1)!\,r!}[\mu_1(y - y_1)^{r-1} + \mu_2(y - y_2)^{r-1}](x - x_1)^r -$$

$$-\frac{1}{(r-1)!\,r!}[\lambda_1(x - x_1)^{r-1} + \cdots + \lambda_i(x - x_i)^{r-1}](y - y_1)^r + \qquad (5,6)$$

$$\frac{1}{(r-1)!(r-1)!}[(\gamma_{11}(x - x_1)^{r-1} + \cdots + \gamma_{i1}(x - x_i)^{r-1})(y - y_1)^{r-1} +$$

$$+(\gamma_{12}(x - x_1)^{r-1} + \cdots + \gamma_{i2}(x - x_i)^{r-1})(y - y_2)^{r-1}]$$

Cette formule est valable pour $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ et $r = 1, 2, \ldots, n$.

5.3. Montrons comment on détermine $\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{n2}$ par les conditions supplémentaires $(1, 13_0)$ et $(1, 13_r)$ correspondant à $K = 2$ c'est-à-dire

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{n-1,2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n}}\right|_{x_n, y} = \lambda_n$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{n-1,2} - \varphi_{n-1,1})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n, y_2} = -\gamma_{n2} \qquad (1,13_0)$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{n-1,2}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x_n, y} = 0.$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{n-1,2} - \varphi_{n-1,1})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n, y_2} = 0. \tag{1,13$_r$}$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n - 1$.

En remplaçant dans la formule (5, 6) r par $r + 1$ et i par $i + 1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,2}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} &= \frac{1}{(r+1)!(r+1)!}(x - x_1)^{r+1}(y - y_1)^{r+1} - \\ &- \frac{1}{r!(r+1)!}(\mu_1(y - y_1)^r + \mu_2(y - y_2)^r](x - x_1)^{r+1} - \\ &- \frac{1}{r!(r+1)!}[\lambda_1(x - x_1)^r + \cdots + \lambda_{1-n}(x - x_{n-1})^r](y - y_1)^{r+1} + \\ &+ \frac{1}{r!\,r!}[(\gamma_{11}(x - x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x - x_{n-1})^r)(y - y_1)^r + \\ &+ (\gamma_{12}(x - x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,2}(x - \kappa_{n-1})^r))\varphi - \varphi_2)^r].\end{aligned} \tag{5,7}$$

De même nous avons la formule (3, 6).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} &= \frac{1}{(r+1)!(r+1)!}(x - x_1)^{r+1}(y - y_1)^{r+1} - \\ &- \frac{1}{r!(r+1)!}\mu_1(y - y_1)^r(x - x_1)^{r+1} - \\ &- \frac{1}{r!(r+1)!}[\lambda_1(x - x_1)^r + \cdots + \lambda_{n-1}(x - x_{n-1})]^r(y - y_1)^{r+1} + \\ &+ \frac{1}{r!\,r!}[\gamma_{11}(x - x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x - x_{n-1})^r](y - y_1)^r.\end{aligned} \tag{5,8}$$

En dérivant par rapport à y les deux membres de la formule (5, 7) on a

$$\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{n-1,2}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}} = \frac{1}{r!(r+1)!}(x-x_1)^{r+1}(y-y_1)^r -$$

$$-\frac{1}{(r+1)!(r-1)!}[\mu_1(y-y_1)^{r-1}+\mu_2(y-y_2)^{r-1}](x-x_1)^{r+1} -$$

$$-\frac{1}{r!\,r!}[\lambda_1(x-x_1)^r+\cdots+\lambda_{n-1}(x-x_{n-1})^r](y-y_1)^r + \quad (5,9)$$

$$+\frac{1}{(r-1)!\,r!}[(\gamma_{11}(x-x_1)^r+\cdots+\gamma_{n-1,1}(x-x_{n-1})^r)(y-y_1)^{r-1}+$$

$$+(\gamma_{12}(x-x_1)^r+\cdots+\gamma_{n-1;2}(x-x_{n-1})^r)(y-y_2)^{r-1}].$$

On déduit des formules (5, 7), (5, 8), (5, 9) opur $r = 0$.

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{n-1,2}}{\partial \kappa^{n-1}\partial\varphi^n}\right|_{\kappa_n,\varphi} = (\kappa_n-\kappa_1)-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{n-1,2}-\varphi_{n-1,1})}{\partial\kappa^{n-1}\partial\varphi^{\,-1}}\right|_{\kappa_n,\varphi_2} = \gamma_{12}+\cdots+\gamma_{n-1,2}-\mu_2(\kappa_n-\kappa_1)$$

En écrivant que les conditions $(1, 13_0)$ sont satisfaites, on a les équations

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = x_n - x_1 \quad (5,10)$$

$$\gamma_{12}+\gamma_{22}+\cdots+\gamma_{n2} = \mu_2(x_n-x_1) \quad (5,11)$$

L'équation (5, 10) coïncide avec la première équation (3, 8) nous retenons l'équation (5, 11).

Dans l'équation (5, 9) supposons $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et remplaçons x par x_n. Nous aurons

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{n-1,2}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x_n,y} = \frac{1}{r!}\frac{(y-y_1)^r}{r!}\left[\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1} -\right.$$

$$\left.-(\lambda_1(x_n-x_1)^r+\cdots+\lambda_{n-1}(x_n-x_{n-1})^r)\right]+$$

$$+\frac{1}{r!}\frac{(\varphi-\varphi_1)^{r-1}}{(r-1)!}\left[\gamma_{11}(x_n-x_1)^r+\cdots+\right.$$

$$\left.+\gamma_{n-1,1}(x_n-x_{n-1})^r-\mu_1\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1}\right]+$$

$$+\frac{1}{r!}\frac{(y-y_2)^{r+1}}{(r-1)!}\Big[\gamma_{12}(\kappa_n-\kappa_1)^r+\cdots+$$

$$+\gamma_{n-1,2}(x_n-x_{n-1})^r-\mu_2\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1}\Big].$$

Mais d'après les équations (3, 8) et (3, 9) les deux premières grandes paranthèses du second membre sont nulles pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et par suite les premières conditions ($1, 13_e$) conduisent aux équations

$$\gamma_{12}(x_n-x_1)^r+\cdots+\gamma_{n-1,2}(x_n-x_{n-1})^r=\mu_2\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1} \tag{5,13}$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ainsi on a le système formé par les équations (5, 11) et (5, 13).

$$\begin{aligned}
&\gamma_{12}+\cdots+\gamma_{n-1,2}+\gamma_{n2}=\mu_2(x_n-x_1)\\
&\gamma_{12}(x_n-x_1)+\cdots+\gamma_{n-1,2}(x_n-x_{n-1})=\mu_2\frac{(x_n-x_1)^2}{2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\gamma_{12}(x_n-x_1)^{n-1}+\cdots+\gamma_{n-1,2}(x_n-x_{n-1})^{n-1}=\mu_2\frac{(x_n-x_1)^n}{n}
\end{aligned} \tag{5,14}$$

qui détermine $\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{n2}$. On a

$$\gamma_{12}=\lambda_1\mu_2,\ \gamma_{22}=\lambda_2\mu_2,\ldots,\gamma_{n2}=\lambda_n\mu_2 \tag{5.15}$$

D'autre part en remplaçant dans les formules (5, 7), (5, 8) x et y par x_n et y_2 et en retranchant membre à membre ces formules on a

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{n-1,2}-\varphi_{n-1,1})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n,y_2}=0.$$

pour $r = 1, 2, -, n-1$, ce qui prouve que les conditions ($1, 13_r$) sont complètement satisfaites.

5.4. Les fonctions φ_{13} et φ_{i2} servent à déterminer les fonctions $\varphi_{i,3}$ pour $i = 2, 3, \ldots, n-1$ en intégrant les équations aux dérivées partielles (1, 11) pour $k = 3$ et les conditions aux limites ($1, 12_0$) et ($1, 12_r$) pour $k = 3$. De la même manière on détermine les fonctions $\varphi_{i4}, \varphi_{i5}, \ldots,$ pour $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

Supposons que nous ayons démontré que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{2(n-r)}\varphi_{ij}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} &= \frac{1}{r!\,r!}(x-x_1)^r(y-y_1)^r - \\
&- \frac{1}{(r-1)!\,r!}[\mu_1(y-y_1)^{r-1} + \cdots + \mu_j(y-y_j)^{r-1}](x-x_1)^r - \\
&- \frac{1}{(r-1)!\,r!}[\lambda_1(x-x_1)^{r-1} + \cdots + \lambda_i(x-x_i)^{r-1}](y-y_1)^r + \\
&+ \frac{1}{(r-1)!(r-1)!}[(\gamma_{11}(x-x_1)^{n-1} + \cdots + \gamma_{i1}(x-x_i)^{r-1})(y-y_1)^{r-1} + \\
&+ (\gamma_{12}(x-x_1)^{r-1} + \cdots + \gamma_{i2}(x-x_i)^{r-1})(y-y_2)^{r-1} + \\
&+ \cdots \\
&+ (\gamma_{ij}(x-x_1)^{r-1} + \cdots + \gamma_{ij}(x-x_i)^{r-1})(y-y_j)^{r-1}]
\end{aligned}
\tag{5,16}
$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n)$ $i = 2, 3, \ldots, n-1$ et $j = 2, 3, \ldots, k$. Cela est vrai pour $k = 2$, parce que dans ce cas la formule (5, 16) coïncide avec la formule (5, 6).

En même temps nous supposons que les constantes $\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}, \ldots, \gamma_{nj}$ sont données par le système d'équations

$$
\begin{aligned}
\gamma_{i,j} + \cdots + \gamma_{n-1,j} + \gamma_{nj} &= \mu_j(x_n - x_1) \\
\gamma_{ij}(x_n - x_1) + \cdots + \gamma_{n-1,j}(x_n - x_{n-1}) &= \mu_j\frac{(x_n - x_1)^2}{2} \\
\cdots\cdots & \\
\gamma_{ij}(x_n - x_1)^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1,j}(x_n - x_{n-1})^{n-1} &= \mu_j\frac{(x_n - x_1)^2}{n}
\end{aligned}
\tag{5,17}
$$

pour $j = 1, 2, \ldots, k$ comme nous l'avons montré pour $j = 1$ et $j = 2$. Nous allons démontrer que les formules (5, 16) sont encore valables pour $j = k + 1$, $r = 1, 2, \ldots, n$ et $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

De même nous démontrerons que les constantes $\gamma_{1,k+1}, \gamma_{2,k+1}, \ldots, \gamma_{n,k+1}$ sont données par le système (5, 17) pour $j = k + 1$.

5.5. La formule (5, 16) est vraie pour $i = 1, j = k + 1$ parce que dans ces cas elle coïncide avec la formule (4, 1) valable pour $r = 1, 2,$

$\dots, n$ et $k = 2, 3, \dots, n-1$. Alors pour démontrer la valabilité de la formule (5, 16) pour l'indice $j = k+1, r = 1, 2, \dots, n$ et $i = 2, 3, \dots, n-1$ on va employer la méthode de l'induction complète.

Pour cela on va intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n}\varphi_{i+1,k+1}}{\partial x^n \partial y} = 1. \tag{5,18}$$

avec les conditions aux limites $(1, 12_0)$ et (1, 12) correspondant aux indices $i+1, k+1$.

5.6. En remplaçant dans la formule (5, 16), $i = n-1, j = k-1$ et r par $r+1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} &= \frac{1}{(r+1)!(r+1)!}(x-x_1)^{r+1}(y-y_1)^{r+1} - \\
&- \frac{1}{r!(r+1)!}(\mu_1(y-y_1)^r + \cdots + \mu_{k+1}(y-y_{k+1})^r](x-x_1)^{r+1} - \\
&- \frac{1}{r!(r+1)!}[\lambda_1(x-x_1)^r + \cdots + \lambda_{n+1}(x-x_{n-1})^r](y-y_1)^{r+1} + \\
&+ \frac{1}{r!\,r!}[(\gamma_{11}(x-x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x-x_{n-1})^r)(y-y_1)^r + \\
&+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ (\gamma_{1,k+1}(x-x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,k+1}(x-x_{n-1})^r)(y-y_{k+1})^r]
\end{aligned}$$

Nous aurons aussi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} &= \frac{1}{(r+1)!(r+1)!}(x-x_1)^{r+1}(y-y_1)^{r+1} - \\
&- \frac{1}{r!(r+1)!}[\mu_1(y-y_1)^r + \cdots + \mu_{k+1}(y-y_{k+1})^r](x-x_1)^{r+1} - \\
&- \frac{1}{r!(r+1)!}[\lambda_1(x-x_1)^r + \cdots + \lambda_{n-1}(x-x_{n-1})^r](y-y_1)^{r+1} + \\
&+ \frac{1}{r!\,r!}[(\gamma_{11}(x-x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x-x_{n-1})^r)(y-y_1)^r + \\
&+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ (\gamma_{1,k+1}(x-x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,k+1}(x-x_{n-1})^r)(y-y_{k+1})^r].
\end{aligned} \tag{5,19}$$

Nous aurons aussi

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,k}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} = \frac{1}{(r+1)!(r+1)!}(x-x_1)^{r+1}(y-y_1)^{r+1} -$$

$$-\frac{1}{r!(r+1)!}[\mu_1(y-y_1)^r + \cdots + \mu_k(y-y_k)^r](x-x_1)^{r+1} -$$

$$-\frac{1}{r!(r+1)!}[\lambda_1(x-x_1)^r + \cdots + \lambda_{n-1}(x-x_{n-1})^r](y-y_1)^{r+1} + \tag{5,20}$$

$$+\frac{1}{r!\,r!}[(\gamma_{11}(x-x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,1}(x-x_{n-1})^r)(y-y_1)^r +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (\gamma_{1,k}(x-x_1)^r + \cdots + \gamma_{n-1,k}(x-x_{n-1})^r)(y-y_k)^r].$$

De ces deux formules, on déduit pour $r = 0$,

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{n-1,k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^n}\right|_{x_n,y} = (\kappa_n - \kappa_1) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1})$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\,(\varphi_{n-1,k+1} - \varphi_{n-1,k})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n,y_{\kappa+1}} =$$

$$= \gamma_{1,k+1} + \cdots + \gamma_{n-1,k+1} - \mu_{k+1}(x_n - x_1)$$

En écrivant que les conditions $(1, 17_0)$ pour l'indice $k+1$, sont satisfaites, on a les équations

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = x_n - x_1 \tag{5,21}$$

$$\gamma_{1,k+1} + \cdots + \gamma_{n,k+1} = \mu_{k+1}(\kappa_n - \kappa_1). \tag{5,22}$$

De même pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ nous avons

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{n-1,k+1} - \varphi_{n-1,k})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n,y_\kappa} = 0. \qquad (5,23$$

et aussi la formule

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)\sigma 1}\varphi_{n-1,k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{y_n,y} = \frac{1}{r!}\frac{(y-y_1)^r}{r!}\left[\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{(r+1)!} -\right.$$

$$\left. - (\lambda_1(x_n-x_1)^r + \cdots + \lambda_{n-1}(x_n-x_{n-1})^r)\right] +$$

$$+\frac{1}{r!}\frac{(y-y_1)^{r-1}}{(r-1)!}\Big[\gamma_{11}(x_n-x_1)^r+\cdots+$$

$$+\gamma_{n-1,1}(x_n-x_{n-1})^r-\mu_1\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1}\Big]+$$

$$+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{1}{r!}\frac{(y-y_{k+1})^{r-1}}{(r-1)!}\Big[\gamma_{1,k+1}(x_n-x_1)^r+\cdots+$$

$$+\gamma_{n-1,k+1}(x_n-x_{n-1})^r-\mu_{k+1}\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{r+1}\Big].$$

D'après les équations (3, 8) et (5, 17) les $k+1$ premières grandes parenthèses sont nulles et nous aurons

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{n-1,k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}\right|_{x_n,y}=\frac{1}{r!}\frac{(\varphi-\varphi_{k+1})^{r-1}}{(r-1)!}\Big[\gamma_{1,k+1}(x_n-x_1)^r+\cdots+$$

$$+\gamma_{n-1,k+1}(x_n-x_{n-1})^r-\mu_{k+1}\frac{(x_n-x_1)^{r+1}}{(r+1)}\Big]. \tag{5,24}$$

A l'aide de formules (5.21) - (5.24) on démontre que les conditions (1, 12_0) (1, 12_r) correspondant à l'indice $k+1$ sont satisfaites si les constantes $\gamma_{1,k+1},\ldots,\gamma_{n-1,k+1}$ sont données par le système d'équations (5, 17) pour $j=k+1$.

Il résulte du système (5, 17) qu'on a

$$\gamma_{ik}=\lambda_i\mu_k. \tag{5,25}$$

pour $i=1,2,\ldots,n$ et $k=1,2,\ldots,n-1$.

Il reste à déterminer les constantes $\gamma_{1,n},\gamma_{2,n},\ldots,\gamma_{nn}$.

5.7. Pour cela il faut écrire que les conditions aux limites relatives au côté $y=y_n$ du rectangle D sont satisfaites.

Ces conditions sont

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{i,n-1}}{\partial x^n\partial y^{n-1}}\right|_{x,y_n}=\mu_n\qquad(i=2,3,\ldots,n-1) \tag{5,26}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{i,n-1}-\varphi_{i-1,n-1})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_i,y_n}=-\gamma_{in}\qquad(i=2,3,\ldots,n-1) \tag{5,27}$$

et

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{i,n-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,y_n} = 0 \qquad (i = 2, 3, \dots, n-1) \tag{5,28}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{i,n-1} - \varphi_{i-1,n-1})}{\partial x^{n-r-1}y\partial^{n-r-1}}\right|_{x_i,y_n} = 0 \qquad (i = 2, 3, \dots, n-1) \tag{5,29}$$

pour $r = 1, 2, \dots, n-1$ ainsi que

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n,y_n} = \gamma_{nn} \tag{5,30}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n,y_n} = 0 \tag{5,31}$$

pour $r = 1, 2, \dots, n-1$.

A l'aide de la formule (5, 16) pour i et $j = n-1$ et ensuite pour $i-1$ et $j = n-1$ on démontre d'abord pour $r = 0$, que

$$\left.\frac{\partial^{2n-1}\varphi_{i,n-1}}{\partial x^{n}\partial y^{n-1}}\right|_{x,y_n} = (y_n - y_1) - (\mu_1 + \dots + \mu_{n-1})$$

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}(\varphi_{i,n-1} - \varphi_{i-1,n-1})}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_i,y_n} = \gamma_{i1} + \dots + \gamma_{i,n-1} - \lambda_i(y_n - y_1)$$

pour $i = 2, 3, \dots, n-1$.

En écrivant que les conditions (5, 26), (5, 27) sont satisfaites, on est conduit aux équations

$$\mu_1 + \dots + \mu_n = y_n - y_1 \tag{5,32}$$

$$\gamma_{i1} + \dots + \gamma_{in} = \lambda_i(y_n - y_1) \tag{5,33}$$

pour $i = 2, 3, \dots, n$. Comme l'équation (5.33) coïncide pour $i = 1$ avec l'équation (4.3) on peut dire que l'équation (5.33) est valable pour $i = 1, 2, \dots, n$. En utilisant les formules (5, 25) pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots, n-1$ on peut écrire la formule (5.33) sous la forme

$$\lambda_i(\mu_1 + \dots + \mu_{n-1}) + \gamma_{in} = \lambda_i(y_n - y_1)$$

et on déduit ainsi que

$$\gamma_{in} = \lambda_i\mu_n \tag{5,34}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Il reste à déterminer $\gamma_{n,n}$.

La formule (5.16) donne pour $r = 1$ et $i = j = n - 1$.

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n, y_n} = (x_v - x_1)(y_n - y_1) -$$

$$-(\mu_1 \cdots + \mu_{n-1})(x_n - x_1) - (\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1})\, y_n - y_1) +$$

$$+ (\gamma_{11} + \cdots + \gamma_{n-1,1}) + \cdots + (\gamma_{1,n-1} + \cdots + \gamma_{n-1,n-1})$$

et en utilisant les formules (5.25), on peut écrire

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n, y_n} = (x_n - x_1)(y_n - y_1) -$$

$$-(y_n - y_1 - \mu_n)(x_n - x_1) - (x_n - x_1 - \lambda_n))\, y_n - y_1) +$$

$$+ (x_n - x_1 - \lambda_n)(y_n - y_1 - \mu_n)$$

c'est-à-dire

$$\left.\frac{\partial^{2(n-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}\right|_{x_n, y_n} = \lambda_n \mu_n.$$

La condition (5.30) montre alors que

$$\gamma_{nn} = \lambda_n \mu_n. \tag{5,35}$$

Ainsi toutes constantes γ_{ik} sont déterminées.

Les conditions (5.28) sont vérifiées, parce que en utilisant les formules (5.25), (5.34) et (5.35) on peut écrire

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r)-1}\varphi_{i,n-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x,x_n} = \frac{1}{r!}\frac{(\kappa - \kappa_1)^r}{r!}\left[\frac{(y_n - y_1)^{r+1}}{r+1} -\right.$$

$$\left. - (\mu_1(y_n - y_1)^r + \cdots + \mu_{n-1}(y_n - y_{n-1})^r)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{r!}\frac{(x - x_1)^{r-1}}{(r-1)!}\Big]\mu_1(y_n - y_1)^r + \cdots +$$

$$+ \mu_{n-1}(y_n - y_{n-1})^r - \left.\frac{(y_n - y_1)^{r+1}}{r+1}\right] +$$

$$+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{\lambda_i}{r!}\frac{(x - x_i)^{r-1}}{(r-1)!}\Big[\mu_1(y_n - y_1)^r + \cdots +$$

$$+ \mu_{n-1}(y_n - y_{n-1})^r - \left.\frac{(y_n - y_1)^{r+1}}{r+1}\right]$$

et le second membre est nul pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$, d'après les équations (4, 2). D'autre part, nous avons

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}(\varphi_{i,n-1} - \varphi_{i-1,n-1})}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_i, y_n} = 0$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $i = 2, 3, \ldots, n-1$, ce qui montre que les conditions (5.24) sont vérifiées.

De même nous avons la formule

$$\left.\frac{\partial^{2(n-r-1)}\varphi_{n-1,n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right|_{x_n, y_n} = \frac{1}{r!}\frac{(x_n - x_1)^{r+1}}{(r+1)!}\left[\frac{(y_n - y_1)^{r+1}}{r+1} - \right.$$

$$\left. - (\mu_1(y_n - y_1)^r + \cdots + \mu_{n-1}(y_n - y_{n-1})^r)\right] +$$

$$\left. + \frac{\lambda_1}{r!}\frac{(x_n - x_1)^r}{r!}\right]\mu_1(y_n - y_1)^r + \cdots +$$

$$\left. + \mu_{n-1}(y_n - y_{n-1})^r - \frac{(y_n - y_1)^{r+1}}{r+1}\right] +$$

$$+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{\lambda_{n-1}}{r!}\frac{(x_n - x_{n-1})^r}{r!}\left[\mu_1(y_n - y_1)^r + \cdots + \right.$$

$$\left. + \mu_{n-1}(y_n - \varphi_{n-1})^r - \frac{(y_n - y_1)^{r+1}}{r+1}\right]$$

et d'après les équations (4, 2) le second membre est nul pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Il résulte que les conditions (5.31) sont vérifiées.

6. Conclusions

6.1. En remplaçant dans la formule (1.2) les fonctions φ_{ik} par la solution des problèmes aux limites traités dans les § 1-5, on est conduit à la formule de cubature

$$\iint_D f\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{y_1}^{y_n} f(x_i, \varphi)\,dy + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \int_{x_1}^{x_n} f(x, y_k)\,dx -$$

$$- \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik} f(x_i, y_k) + \iint_D \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dxdy.$$

où les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont donnés par les systèmes (3.8), (4, 2) que nous pouvons écrire encore sous la forme

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = x_n - x_1 \\
&\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = y_n - y_1 \\
&\lambda_1 \kappa_1 + \lambda_2 \kappa_2 + \cdots + \lambda_n \kappa_n = \frac{x_n^2 - x_1^2}{2}; \\
&\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots + \mu_n \varphi_n = \frac{y_n^2 - y_1^2}{2} \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
&\lambda_1 \kappa_1^{n-1} + \lambda_2 \kappa_2^{n-1} + \cdots + \lambda_n \kappa_n^{n-1} = \frac{x_n^n - x_1^n}{n} \\
&\mu_1 \varphi_1^{n-1} + \mu_2 \varphi_2^{n-1} + \cdots + \mu_n \varphi_n^{n-1} = \frac{y_n^n - y_1^n}{n}
\end{aligned} \tag{5,37}$$

et où

$$\gamma_{ik} = \lambda_i \mu_k. \tag{5,38}$$

pour $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Le reste de la formule de cubature est donné par

$$R = \iint_D \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dxdy. \tag{5,39}$$

où la fonction φ coïncide sur les rectangles D_{ik} avec les fonctions φ_{ik} données par les formules (5.16) pour $r = n$.

6.2. Relativement aux fonctions $\varphi_{i,j}$ on peut faire une remarque très importante qui est utile pour l'étude de la fonction φ sur le rectangle D.

D'après les formules (5.16) on a pour $r = n$

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{n!\,n!}(x - x_1)^n(y - y_1)^n -$$

$$- \frac{1}{(n-1)!\,n!}[\mu_1(y - y_1)^{n-1} + \cdots + \mu_j(y - y_j)^{n-1}] -$$

$$- \frac{1}{(n-1)!\,n!}[\lambda_1(x - x_1)^{n-1} + \cdots + \lambda_i(x - x_i)^{n-1}] +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!\,(n-1)!}[\lambda_1(x - x_1)^{n-1} + \cdots + \lambda_i(x - x_i)^{n-1}]$$

$$[\mu_1(y - y_1)^{n-1} + \cdots + \mu_j(y - y_j)^{n-1}].$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi_{ij} = \left[\frac{(x - x_i)^n}{r!} - \lambda_1\frac{(x - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \cdots - \lambda_i\frac{(x - x_i)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$
$$\left[\frac{(y - y_1)^n}{n!} - \mu_1\frac{(y - y_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \cdots - \mu_j\frac{(y - y_j)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \qquad (5{,}40)$$

pour $i, j = 1, 2, \ldots, n - 1$.

On peut interpréter la formule (5.40) de la manière suivante.

Considérons les deux formules de quadrature pour $g \in C^n[x_n x_n]$, $R \in C^n(y_1, y_n)$.

$$\int_{x_1}^{x_n} g(s)\,ds = \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(\kappa_2) + \cdots + \lambda_n g(\kappa_n) + (-1)^n \int_{x_1}^{x_n} \psi(s) g^{(n)}(s)\,ds \qquad (5{,}41)$$

$$\int_{y_1}^{y_n} h(s)\,ds = \mu_1 h(\mu_1) + \mu_2 h(\varphi_2) + \cdots + \mu_n h(y_n) + (-1)^n \int_{y_1}^{y_n} \theta(t) h^{(n)}(t)\,dt \qquad (5.42)$$

Dans les formules (5.41), (5.42) les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont donnés par les systèmes (5.37) et la fonction Ψ (s) coïncide sur les intervalles $[x_1{}_1 x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ avec les fonctions

$$\Psi_1(s) = \frac{(s-x_1)^n}{n!} - \lambda_1 \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Psi_2(s) = \frac{(s-\kappa_1)^n}{n!} - \lambda_1 \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda_2 \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (5{,}43)$$

$$\Psi_{n-1}(s) = \frac{(s-x_1)^n}{n!} - \lambda_1 \frac{(s-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \lambda_2 \frac{(s-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} - \\ - \cdots - \lambda_{n-1} \frac{(s-x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!}$$

tandis que la fonction $\theta(t)$ coïncide sur les intervalles $[y_1, y_2]$, $[y_2, y_3]$, $\dots$, $[y_{n-1}, y_n]$ avec les fonctions

$$\theta_1(t) = \frac{(t-y_1)^2}{n!} - \mu_1 \frac{(t-y_2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\theta_2(t) = \frac{(t-y_1)^n}{n!} - \mu_1 \frac{(t-y_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \mu_2 \frac{(t-y_2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (5{,}44)$$

$$\theta_{n-1}(t) = \frac{(t-y_1)^n}{n!} - \mu_1 \frac{(t-y_1)^{n-1}}{(n-1)!} - \mu_2 \frac{(t-y_2)^{n-1}}{(n-1)!} - \\ - \mu_{n-1} \frac{(t-y_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!}$$

La formule (5.40) montre que

$$\varphi_{ij}(s,t) = \Psi_i(s)\,\theta_j(t) \qquad (5{,}45)$$

et cette formule est très importante pour les applications.

BIBLIOGRAPHIE

Ionescu., D. V. Sur une classe de formules de cubature. *C.R. Acad. Sc.* Paris, t. 266, p. 1155-1158 (10 Juin 1968).