

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 28 FÉVRIER 1927.

PRÉSIDENTE DE M. CHARLES BARROIS.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **PRÉSIDENT** s'exprime en ces termes :

J'ai le regret de faire part à l'Académie du décès de son Associé étranger, **C. D. WALCOTT**, survenu à Washington le 9 de ce mois.

Né dans l'État de New-York en 1850, près des chutes de la rivière Trenton, Walcott trouva ses plaisirs d'enfance au pied de cette cascade en cherchant les singulières pierres, à formes de coquillages et de trilobites, que les eaux écumantes arrachaient au lit rocheux.

A l'âge de 13 ans, il en avait réuni un nombre assez grand, pour qu'elles eussent fait de lui un géologue, par l'envie qu'elles lui avaient donné de pénétrer leur mystère.

La cascade avait été la première école de Walcott. Elle fut la meilleure. Celles qu'il suivit ensuite le dirigèrent vers les affaires; il y réussit assez bien cependant pour débiter à 19 ans dans une situation d'employé de quincaillerie. Il n'y demeura que 2 ans. Le marteau de quincaillier lui faisait regretter celui du géologue. Une autre tentative commerciale, dans l'Indiana, ne le captiva pas davantage et il revint finalement aux chutes de la Trenton, s'engagea dans une ferme voisine, où pendant 5 ans il demanda au labour de la terre ses moyens d'existence, entouré de livres scientifiques et cherchant à comprendre le secret des fossiles de la cataracte.

C'est là que notre regretté confrère James Hall, le géologue officiel de l'État de New-York, qui s'y connaissait bien en hommes et aimait assez les jeunes pour avoir fondé, près notre Compagnie, un prix à leur intention, découvrit un jour Walcott à l'œuvre et lui offrit de le suivre comme préparateur.

Pour le démontrer on n'a qu'à ajouter à la démonstration intéressante de M. Mandelbrojt une remarque simple concernant le théorème de M. Hadamard sur l'opération $H(\varphi, f)$.

LEMME. — Si la série $f(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$ représente une fonction qui n'a qu'un point singulier dans tout le plan, à savoir un pôle au point $z = 1$, les deux séries

$$\varphi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots \quad \text{et} \quad H(\varphi, f) = A_0 B_0 + A_1 B_1 z + A_2 B_2 z^2 + \dots$$

ont les mêmes points singuliers, excepté peut-être pour $z = 0$ et $z = \infty$.

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $f(z)$ est régulière et s'annule au point $z = \infty$ et écrire ⁽¹⁾

$$f(z) = c_0 \frac{1}{1-z} + c_1 z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} + \dots + c_p \left(z \frac{d}{dz} \right)^p \frac{1}{1-z},$$

$$H(\varphi, f) = c_0 \varphi(z) + c_1 z \frac{d\varphi(z)}{dz} + \dots + c_p \left(z \frac{d}{dz} \right)^p \varphi(z).$$

Il est clair que $H(\varphi, f)$ est partout régulière où φ l'est. Inversement, considérons $H(\varphi, f)$ comme donnée; alors $\varphi(z)$ est intégrale particulière d'une équation linéaire à second membre $[= H(\varphi, f)]$ et peut être comme telle exprimée par $H(\varphi, f)$ à l'aide des formules classiques qui rendent le lemme évident. (On peut aussi se servir du théorème d'existence des intégrales.)

Supposons maintenant, par impossible, que $z = 1$ est un pôle pour $\varphi(z)$ et l'unique point singulier de $\varphi(z)$ sur le cercle $|z| = 1$. Posons

$$\psi(z) = f(z) - \chi(z),$$

$f(z)$ ayant la nature précisée dans le lemme et $\chi(z)$ étant régulière au point 1. Nous avons, en vertu de l'hypothèse sur les λ_m et les μ_m ,

$$H(\varphi, f) = H(\varphi, \chi).$$

Le point 1 est singulier pour le premier membre en vertu du lemme. Il n'est pas singulier pour le membre droit qui, en vertu du théorème en question de M. Hadamard, ne peut avoir d'autres points singuliers sur le cercle $|z| = 1$ que ceux de $\chi(z)$. Cette contradiction démontre le théorème. J'ajoute que l'énoncé que je viens de démontrer reste vrai si l'on y remplace le mot *pôle* par *point algébrico-logarithmique* ou par *point singulier isolé autour duquel la fonction reste uniforme*.

(1) E. BOREL, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 26, 1898, p. 242.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe d'équations fonctionnelles.*

Note de M. D. V. JONESCO, présentée par M. Goursat.

J'ai étudié les problèmes classiques de Darboux-Picard, de Cauchy, de M. Picard et de M. Goursat relativement à l'équation aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles, pour l'équation fonctionnelle

$$(I) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a_1(x, y) z_1 + b_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_1 + c_1(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_1 \\ + a_2(x, y) z_2 + b_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_2 + c_2(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_2 + f(x, y),$$

où

$$z_h = z(\omega_h, \pi_h); \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_h = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=\omega_h, y=\pi_h}; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_h = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{x=\omega_h, y=\pi_h} \quad (h = 1, 2),$$

$\omega_1(x, y), \dots, \pi_2(x, y)$ étant des fonctions connues de x et y , et je vais indiquer les résultats que j'ai obtenus. Les fonctions $a_1(x, y), \dots, c_2(x, y), f(x, y), \omega_1(x, y), \dots, \pi_2(x, y)$ sont toutes continues.

1. En supposant que dans le rectangle R, défini par les inégalités

$$-d \leq x \leq d, \quad -d' \leq y \leq d',$$

les fonctions $\omega_1(x, y), \dots, \pi_2(x, y)$ satisfont aux inégalités

$$|\omega_h(x, y)| \leq |x|, \quad |\pi_h(x, y)| \leq |y| \quad (h = 1, 2),$$

j'ai démontré que l'équation (I) admet une solution régulière, unique, prenant des valeurs données sur les portions des axes Ox, Oy , comprises dans le rectangle R. Cette solution est valable dans tout le rectangle R.

En posant

$$z_h = \varphi_h(x, y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_h = \psi_h(x, y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_h = \theta_h(x, y) \quad (h = 1, 2),$$

on remarque que les fonctions $\varphi_1(x, y), \dots, \theta_2(x, y)$ sont déterminées par le système d'équations intégrales

$$\varphi_h(x, y) = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\omega_h} \int_0^{\pi_h} [a_i(s, t) \varphi_i(s, t) + b_i(s, t) \psi_i(s, t) + c_i(s, t) \theta_i(s, t)] ds dt + \int_0^{\omega_h} \int_0^{\pi_h} f(s, t) ds dt, \\ \psi_h(x, y) = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\pi_h} [a_i(\omega_h, t) \varphi_i(\omega_h, t) + b_i(\omega_h, t) \psi_i(\omega_h, t) + c_i(\omega_h, t) \theta_i(\omega_h, t)] dt + \int_0^{\pi_h} f(\omega_h, t) dt, \\ \theta_h(x, y) = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\omega_h} [a_i(s, \pi_h) \varphi_i(s, \pi_h) + b_i(s, \pi_h) \psi_i(s, \pi_h) + c_i(s, \pi_h) \theta_i(s, \pi_h)] ds + \int_0^{\omega_h} f(s, \pi_h) ds \\ (h = 1, 2).$$

Par la méthode des approximations successives, j'ai démontré l'existence d'une solution continue, unique, de ce système, valable dans tout le rectangle R , et l'on voit alors que les fonctions $\varphi_1(x, y), \dots, \theta_2(x, y)$ étant déterminées, l'équation (I) se ramène à un type connu.

2. Considérons une courbe (Γ) passant par l'origine et ayant pour équation $y = \lambda(x)$ ou $x = \mu(y)$, $\lambda(x)$ et $\mu(y)$ étant des fonctions positives et continues. Supposons que, pour $0 \leq x \leq d$ et $0 \leq y \leq d'$, les points (ω_1, π_1) et (ω_2, π_2) sont à l'intérieur du rectangle formé par les axes et les parallèles aux axes menées par le point $M(x, y)$, du même côté de (Γ) que le point M . Alors on démontre que l'équation (I) admet une solution régulière unique correspondant à des conditions de Cauchy relativement à l'arc de courbe (Γ) . Cette solution est valable dans la région comprise entre Ox et la courbe (Γ) pour tous les points ayant une abscisse inférieure à $\mu\left(\frac{1}{B}\right)$ et dans la région comprise entre Oy et la courbe (Γ) pour tous les points ayant une ordonnée inférieure à $\lambda\left(\frac{1}{C}\right)$; B et C sont des nombres supérieurs aux valeurs absolues de

$$b_1(x, y) + b_2(x, y) \quad \text{et} \quad c_1(x, y) + c_2(x, y),$$

lorsque x et y sont inférieurs à d et d' respectivement.

3. Par le point $M(x, y)$ menons des parallèles aux axes qui rencontrent la courbe (Γ) aux points N et P . Si l'on suppose que les points de coordonnées (ω_1, π_1) et (ω_2, π_2) se trouvent dans le triangle MNP , l'équation (I) a une solution régulière correspondant aux conditions de Cauchy relativement à l'arc de courbe (Γ) , valable dans toute la région où les fonctions $a_1(x, y), \dots, c_2(x, y), f(x, y)$ sont continues et où les hypothèses faites sur $\omega_1(x, y), \dots, \pi_2(x, y)$ sont valables.

4. En supposant que les fonctions $\omega_1(x, y), \dots, \pi_2(x, y)$ satisfont aux conditions du n° 2 ou 3, on démontre l'existence d'une solution régulière de l'équation (I), satisfaisant aux conditions de M. Picard relativement à l'arc de courbe (Γ) et à l'axe Ox . Avec les hypothèses du n° 2 la solution est valable dans la région comprise entre Ox et la courbe (Γ) et peut se prolonger au-dessus de (Γ) en résolvant un problème de Cauchy comme au n° 2.

Avec les hypothèses du n° 3, la solution est valable pour les points de la région comprise entre la courbe (Γ) et l'axe Ox , ayant une abscisse inférieure à $\mu\left(\frac{1}{B + KC}\right)$, où B et C ont la signification du n° 2, et où K est un nombre supérieur aux valeurs absolues de $\mu'(y)$. Cette solution se prolonge

au-dessus de la courbe (Γ) en résolvant un problème de Cauchy comme au n° 3.

Les démonstrations de ces théorèmes se font comme il a été indiqué au n° 1.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des systèmes en involution d'équations linéaires aux dérivées partielles.* Note de M. G. CERF, présentée par M. Goursat.

M. B. Segre a donné ⁽¹⁾ une intéressante transformation d'un système en involution particulier de deux équations linéaires aux dérivées partielles du troisième ordre à deux variables indépendantes en une équation du type de Laplace-Darboux. Je me propose de rattacher ce résultat à une théorie générale et de donner quelques exemples nouveaux.

1. Considérons un système en involution d'ordre q , S , à deux variables indépendantes, qu'il n'est pas nécessaire, pour l'instant, de supposer linéaire; en lui adjoignant une équation E d'ordre minimum convenable, on peut déduire du système total $S + E$, par différentiations, un nouveau système Σ où le nombre des équations d'un certain ordre p est au plus égal à $p + 1$, les équations d'ordre $p + 1$ étant au nombre de $p + 3$, on peut alors déduire de ces dernières une relation que par analogie ⁽²⁾ je désigne par

$$(1) \quad [S, E] = 0.$$

Elle exprime la condition d'intégrabilité de $S + E$ quand le calcul des dérivées d'ordre $p + 1$ est possible; quand ce calcul n'est pas possible, on peut ⁽²⁾ déduire de Σ un nouveau système Σ' qui, s'il ne conduit pas à une impossibilité algébrique, ce qui est le cas normal, admet encore (1) comme unique condition d'intégrabilité: lorsque cette condition est vérifiée nous disons que S et E sont conjoints.

2. Nous allons donner des exemples parmi les systèmes linéaires que nous considérerons seuls désormais.

⁽¹⁾ *Sur l'intégration d'un certain système d'équations différentielles* (Comptes rendus, 184, 1927, p. 268).

⁽²⁾ *Sur les transformations des équations aux dérivées partielles* (Journ. de Math., 7^e série, 4, 1918, p. 309).

⁽³⁾ *Sur les transformations des équations linéaires aux dérivées partielles* (Comptes rendus, 169, 1919, p. 613).