

ECUAȚIA FUNCȚIONALĂ DE BISIMETRIE

de
TH. ANGHELUȚĂ

§ 1. Sub denumirea aceasta se înțelege ecuația funcțională

$$(1) \quad z[z(x, y), z(u, v)] = z[z(x, u), z(y, v)]$$

unde $z(x, y)$ este funcția necunoscută, iar x, y, u, v sînt variabile reale independente. Asupra acestei ecuații D. Aczél¹ a făcut o analiză subtilă și aprofundată din care a dedus apoi soluția ecuației. Ne propunem aici să rezolvăm această ecuație folosind metoda dată de N. H. Abel². Procedeu ce urmăm fiind direct, simplifică aflarea soluției.

Pentru înlesnirea scrierii introducem notațiile

$$\begin{aligned} \alpha &= z(x, y) & \beta &= z(x, u) \\ \gamma &= z(y, v) & \delta &= z(u, v) \end{aligned}$$

Cu aceste notații avem

$$z(\alpha, \delta) = z(\beta, \gamma)$$

Derivind această ecuație, pe rînd, în raport cu x, y, u, v obținem ecuațiile

$$\begin{aligned} z_\alpha(\alpha, \delta) \alpha_x &= z_\beta(\beta, \gamma) \beta_x \\ z_\alpha(\alpha, \gamma) \alpha_y &= z_\gamma(\beta, \gamma) \gamma_y \\ z_\delta(\alpha, \delta) \delta_u &= z_\beta(\beta, \gamma) \beta_u \\ z_\delta(\alpha, \delta) \delta_v &= z_\gamma(\beta, \gamma) \gamma_v \end{aligned}$$

¹ J. Aczél, Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen, Acta Sci. Math. Tom XIII, Fasc. 3-4, Szeged, 15. XI. 1950, p. 179-189.

² N. H. Abel, Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x, y , telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x et y , Oeuvres éd. L. Sylow et S. Lie; Cristiania, 1881, t. I, p. 61-65; idem, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, Bd. I, 1826, S. 11-15.

Apoi așezăm aceste ecuații astfel

$$\begin{aligned} z_\alpha (\alpha, \delta) \alpha_x &= z_\beta (\beta, \gamma) \beta_x \\ z_\beta (\beta, \gamma) \beta_u &= z_\delta (\alpha, \delta) \delta_u \\ z_\gamma (\beta, \gamma) \gamma_v &= z_\alpha (\alpha, \delta) \alpha_v \\ z_\delta (\alpha, \delta) \delta_v &= z_\gamma (\beta, \gamma) \gamma_v \end{aligned}$$

Înmulțim aceste ecuații membru cu membru și suprimăm factorul comun din ambii membri. Se deduce astfel ecuația

$$\alpha_x \beta_u \gamma_v \delta_v = \alpha_v \beta_x \gamma_v \delta_u$$

sau încă ecuația

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_v} = \frac{\beta_x \gamma_v \delta_u}{\beta_u \gamma_v \delta_v}$$

Prin notații avem

$$\begin{aligned} \alpha_x &= z_x(x, y), & \alpha_v &= z_v(x, y) \\ \beta_x &= z_x(x, u), & \beta_u &= z_u(x, u) \\ \gamma_v &= z_v(y, v), & \gamma_v &= z_v(y, v) \\ \delta_u &= z_u(u, v), & \delta_v &= z_v(u, v) \end{aligned}$$

Cum în primul membru al ecuației precedente nu figurează variabilele u și v , înseamnă că expresia din membrul al doilea este independentă de aceste variabile, deci ele pot lua orice valori. Înlocuim așa dar pe v cu u și presupunem că u este o constantă oarecare. În felul acesta avem

$$\beta_x = z_x(x, u) = f_1(x), \quad \beta_u = z_u(x, u) = f_2(x)$$

apoi evident

$$\gamma_v = z_v(y, u) = f_1(y), \quad \gamma_v = z_v(y, u) = f_2(y)$$

și încă

$$\delta_u = (z_u(u, v))_{v=u} = a, \quad \delta_v = (z_v(u, v))_{v=u} = b$$

a și b fiind două constante.

În urma acestor egalități ecuația de mai sus are forma

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_v} = \frac{af_1(x)f_2(y)}{bf_2(x)f_1(y)}$$

Dacă notăm

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

și revenim la însemnările vechi ale derivatelor α_x și α_v , ecuația precedentă se scrie

$$\frac{z_x(x, y)}{z_v(x, y)} = \frac{af(x)}{bf(y)}$$

sau

$$(2) \quad \frac{z_x}{af(x)} = \frac{z_v}{bf(y)} = 0$$

la numărători n-am mai pus în evidență variabilele x și y , deoarece nu poate fi nici o confuzie.

Integrarea ecuației (2) cu derivate parțiale de primul ordin, liniară și omogenă, revine la integrarea ecuației diferențiale ordinare

$$af(x)dx + bf(y)dy = 0$$

$F(x)$ fiind o funcție primitivă a funcției $f(x)$, integrala generală a acestei ecuații diferențiale este

$$aF(x) + bF(y) + c = 0$$

c fiind o constantă introdusă de funcția primitivă, iar C o constantă arbitrară.

Prin urmare soluția generală $z(x, y)$ a ecuației (2) are expresia

$$(3) \quad z(x, y) = \psi(t)$$

unde s-a pus

$$t = aF(x) + bF(y) + c$$

$\psi(t)$ fiind o funcție arbitrară de t

§ 2. Pentru rezolvarea ecuației (1) se face ipoteza că funcția $\psi(t)$ este crescătoare sau descrescătoare sau mai scurt strict monotonă. Această ipoteză este folosită în memoriul amintit al lui Abel însă fără a fi enunțată explicit.

Din egalitatea (3) urmează apoi

$$z_x(x, y) = \psi'(t) af(x), \quad z_v(x, y) = \psi'(t) bf(y)$$

ținând seamă de semnificația funcției $F(x)$. Aceste egalități se mai pot scrie

$$\frac{af(x)}{z_x(x, y)} = \frac{bf(y)}{z_v(x, y)} = \frac{1}{\psi'(t)}$$

Funcția $\psi(t)$ fiind presupusă strict monotonă, din (3) mai rezultă

$$t = \psi^{-1}[z(x, y)]$$

notația din membrul al doilea însemnând înversa funcției $\psi(t)$. Prin urmare $\psi'(t)$ este funcție de $z(x, y)$ ca și t , adică

$$\frac{1}{\psi'(t)} = h(z)$$

deci

$$\frac{af(x)}{z_x(x, y)} = \frac{bf(y)}{z_v(x, y)} = h(z)$$

Din expresiile derivatelor $z_x(x, y)$ și $z_y(x, y)$ se deduc derivatele de ordinul al doilea

$$z_{xx} = \psi''(t)a^2f^2(x) + \psi'(t)af'(x)$$

$$z_{xy} = \psi''(t)abf(x)f(y)$$

$$z_{yy} = \psi''(t)b^2f^2(y) + \psi'(t)bf'(y)$$

Înainte de a trece mai departe socotim necesar de a preciza că pe lângă ipoteza de mai sus mai presupunem despre soluția $z(x, y)$ că posedă derivatele parțiale de primele două ordine.

Apoi formăm expresiile folosite în memoriul citat¹

$$\frac{z_{xx}}{z_y} - \frac{z_{xy}}{z_x} = \frac{\psi''(t)abf(x)f(y)}{\psi'(t)bf(y)} - \frac{\psi''(t)a^2f^2(x) + \psi'(t)af'(x)}{\psi'(t)af(x)}$$

de unde

$$\frac{z_{xy}}{z_y} - \frac{z_{xx}}{z_x} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Urmează astfel că expresia din primul membru depinde numai de variabila x . Notînd

$$X(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

avem

$$\frac{z_{xy}}{z_y} - \frac{z_{xx}}{z_x} = X(x)$$

În mod analog se găsește

$$\frac{z_{xy}}{z_x} - \frac{z_{yy}}{z_y} = Y(y)$$

unde

$$Y(y) = -\frac{f'(y)}{f(y)}$$

Formăm încă expresia

$$(4) \quad \frac{z_{xy}}{z_x z_y} = \frac{\psi''(t)abf(x)f(y)}{\psi'^2(t)abf(x)f(y)} = \frac{\psi''(t)}{\psi'^2(t)}$$

și se deduce analog că primul membru depinde numai de z ca și t , adică

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y} = Z(z)$$

unde s-a pus

$$Z(z) = \frac{\psi''(t)}{\psi'^2(t)}$$

§ 3. Să dovedim acum egalitatea

$$Z(z) = -\frac{h'(z)}{h(z)}$$

Pentru aceasta, din expresia funcției $h(z)$, §2, deducem

$$h'(z) = -\frac{\psi''(t)}{\psi'^2(t)} \frac{dt}{dz}$$

Ținînd seamă de notația funcției $Z(z)$ urmează

$$h'(z) = -Z(z) \frac{dt}{dz}$$

Împărțim ambii membri cu $h(z)$ și avem

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = -Z(z) \psi'(t) \frac{dt}{dz}$$

însă din (3) se deduce

$$\psi'(t) \frac{dt}{dz} = 1$$

și egalitatea anunțată este dovedită.

Ca să aflăm soluție ecuației (1) mai este necesar să arătăm că funcțiile $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ sînt egale cînd se înlocuiesc valorile x , y și z cu aceeași variabilă de ex. z , adică

$$X(x) = Y(y) = Z(z)$$

Egalitatea primelor două este evidentă prin însăși definiția lor (§ 2).

Rămîne să dovedim egalitatea

$$(5) \quad X(z) = Z(z)$$

Se va vedea că egalitatea aceasta servește la determinarea funcției $\psi(t)$ din (3) ca să fie soluție a ecuației funcționale (1).

Pentru demonstrarea egalității (5), scriem dar că funcția $\psi(t)$ verifică ecuația (1). În modul acesta referindu-ne la notația din (3) a lui $\psi(t)$, obținem condiția

$$\psi \{aF[z(x, y)] + bF[z(u, v)]\} = \psi \{aF[z(x, u)] + bF[z(y, v)]\}$$

Însă prin ipoteză funcția $\psi(t)$ este strict monotonă și deci condiția aceasta revine la cea următoare

$$aF[z(x, y)] + bF[z(u, v)] = aF[z(x, u)] + bF[z(y, v)]$$

Apoi derivăm egalitatea aceasta prin raport cu x și ne reamintim că $F(x)$ este funcție primitivă a funcției $f(x)$. Se obține astfel egalitatea

$$f[z(x, y)] z_x(x, y) = f[z(x, u)] z_x(x, u)$$

suprimînd din ambii membri factorul a . Acum se derivează egalitatea obținută prin raport eu y și se găsește

$$f'[z(x, y)] z_x(x, y) z_y(x, y) + f[z(x, y)] z_{xy}(x, y) = 0$$

Punem această egalitate sub forma

$$-\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z_{xy}}{z_x z_y}$$

unde nu s-au mai scris variabilele x și y în expresia funcției, neputînd fi vreo îndoială. După notațiile folosite (§ 2), egalitatea aceasta este tocmai aceea din (5).

§ 4. Egalitatea (5) odată demonstrată, putem trece la rezolvarea ecuației funcționale (1).

Scriind această egalitate sub forma

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)}$$

deducem de aici

$$f(z) = h(z)$$

făcînd abstracție de un factor constant în expresia funcției $f(z)$, căci aceasta revine a înmulți numerele a și b cu același număr. Din egalitatea din urmă rezultă prin integrare

$$F(z) = \int h(z) dz$$

Înlocuim pe $h(z)$ cu expresia aflată în § 2 și avem succesiv

$$F(z) = \int \frac{dz}{\psi'(t)} = \int \frac{dt}{\psi'(t) \frac{dt}{dz}}$$

După egalitatea folosită în § 3, egalitatea devine

$$F(z) = \int dt$$

deci

$$F(z) = t$$

Substituind lui z valoarea din (3)

$$F[\psi(t)] = t$$

deci

$$\psi(t) = F^{-1}(t)$$

și prin urmare soluția ecuației funcționale (1) are expresia

$$z(x, y) = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c]$$

Verificarea se face înlocuind în (1) pe $z(x, y)$ cu această expresie. Procedînd astfel avem

$$\begin{aligned} & F^{-1}\{aF[F^{-1}(aF(x) + bF(y) + c)] + bF[F^{-1}(aF(u) + bF(v) + c)]\} = \\ & = F^{-1}\{aF[F^{-1}(aF(x) + bF(y) + c)] + bF[F^{-1}(aF(y) + bF(v) + c)]\} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} & aF[F^{-1}(aF(x) + bF(y) + c)] + bF[F^{-1}(aF(u) + bF(v) + c)] = \\ & = aF[F^{-1}(aF(x) + bF(u) + c)] + bF[F^{-1}(aF(y) + bF(v) + c)] \end{aligned}$$

și prin urmare egalitatea vădit satisfăcută

$$\begin{aligned} & a[aF(x) + bF(y) + c] + b[aF(u) + bF(v) + c] = \\ & = a[aF(x) + bF(u) + c] + b[aF(y) + bF(v) + c] \end{aligned}$$

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БИСИММЕТРИИ

(Краткое содержание)

Исходя от процитированной записи Абеля, автор даёт новый метод, отличающийся от метода Ж. Ацеля, для разрешения данного функционального уравнения.

L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE BISYMETRIE

(Résumé)

Partant du mémoire cité d'Abel, on donne une nouvelle méthode, différente de celle de J. Aczél, pour résoudre l'équation fonctionnelle considérée.