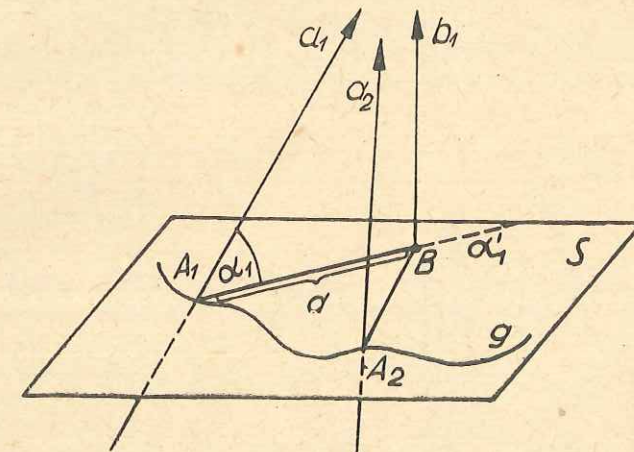


A LOBACSEVSZKIJ—BOLYAI TÉR EGYENES VONALU FELÜLETEINEK NEHÁNY TÍPUSARÓL S A TÉR NEHÁNY MÁS KÉRDÉSÉRŐL

GERGELY JENŐ

1. Az euklideszi tér hengerfelületeinek megfelelői a Lobacsevszkij—Bolyai geometriában az asszimptotikus csúcsú kúpok. Ilyen kúpon egy tér vagy síkgörbe pontjain áthaladó s egymásközt asszimptotikusan párhuzamos egyenesek által alkotott felületet értünk. Legyen a felület egy síkmetszete (1. ábra) a g görbe s az ennek A_1 pontján áthaladó alkotó a_1 ; a_1 -nek



1. ábra

a g görbe S síkjára eső vetületét tartó egyenest jelöljük a'_1 -vel, az S síkkal bezárt hajlásszögét pedig α_1 -gyel; a_1 sugár a'_1 -re eső vetülete legyen d . Ekkor, mint ismeretes

$$\alpha_1 = \Pi(d) \quad (1)$$

szakasz, ahol Π a Lobacsevszkij féle függvény.

A B pontban az S síkra emelt b_1 merőleges asszimptotikusan párhuzamos a_1 -gyel és így — a párhuzamosság tranzitív volta miatt — a felület minden alkotójával. Így tehát a felület bármely alkotóját megkapom, ha a g görbe valamely A_1 pontján át a sík B pontjában az S síkra emelt b merőlegeshez asszimptotikus párhuzamost húzunk. Ennek az S síkra eső vetülete a szerkesztés értelmében az A_1B szakasz; tehát minden alkotónak az S síkra eső vetülete átmegy a B ponton s a B pont a vetület egyik végpontja.

Legyen a g görbe polárkoordinátás egyenlete — olyan koordináta-rendszerben, amelynek kezdőpontja B —

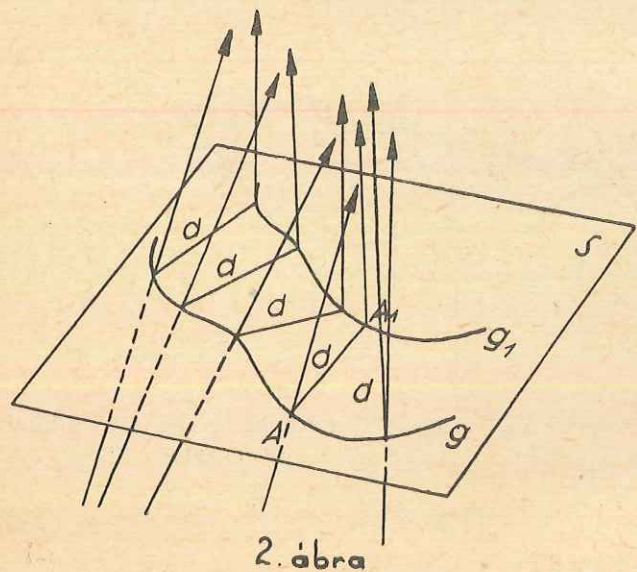
$$d = g(\varphi) \quad (2)$$

ahol φ a B ponton átmenő valamely adott sugártól számított szög. Ekkor a d az alkotókon fekvő, a g görbe pontjaiból az asszimptotikus párhuzamosság irányában vett sugarának az S síkra eső vetülete. A (2) egyenlet ismeretében tehát meg tudjuk határozni a felület bármely alkotójának az S síkkal bezárt hajlásszögét, α -t;

$$\alpha = \Pi(d) = \Pi[g(\varphi)] \quad (3)$$

g az asszimptotikus csúcsú kúp tetszés szerinti síkmetszete. Ilyen módon a felületünket metsző minden síkon van egy, a felületünk szempontjából kitüntetett szerepű, a B ponttal azonos szerepet betöltő pont, az illető síkra merőleges és a felületi alkotókkal asszimptotikusan párhuzamos egyenesnek a síkkal való metszéspontja. Ez egyik végpontja az alkotók azon vetületeinek, amelyek az illető síkra merőlegesek.

A Lobacsevszkij—Bolyai geometria nevezetes egyenesvonalú felület-típusát képezik azok a felületek, melyeknek alkotói egy síkkal állandó



2. ábra

szöget zárnak be. Ezeket a felületeket állandó hajlássú felületeknek nevezzük. (2. ábra) g síkgörbe síkját jelöljük S -sel. A g görbe A pontjain át a görbe egyik oldalán, a görbe síkjában fektessünk d állandó hosszúságú egyenes szakaszokat a g görbétől kiindulón. A szakaszok végpontjai a g görbén kívül egy másik g_1 görbét írnak le. A szakasz g_1 görbén fekvő végpontját jelöljük A_1 -gyel. A_1 -ben állítsunk m merőleget az S síkra, s a megfelelő szakasz g -n levő A végpontján át m -hez asszimptotikusan

párhuzamos egyenest jelöljük a -val. Ezek az a egyenesek a szerkesztés értelmében az

$$\alpha = \Pi(d) \quad (4)$$

állandó szöget zárják be az S síkkal. Az a egyenesek által alkotott felület tehát állandó hajlássú felület, s viszont minden, az S síkhoz állandó hajlássú felület a leírt módon származtatható.

A g_1 görbe az alkotók adott irányú asszimptotikus pontjai S síkra vett merőleges vetületeinek mértani helye. Ezt a görbét a felületnek az S síkra vett asszimptotikus merőleges konturjának nevezzük.

Speciális állandó hajlássú felületek

Ha a g görbe kör és g_1 a kör középpontja, akkor a kapott felület egyúttal asszimptotikus csúcsú kúp. Vezérgörbéje a kör, csúcsa a kör síkjára a középpontban merőleges egyenes asszimptotikus pontja.

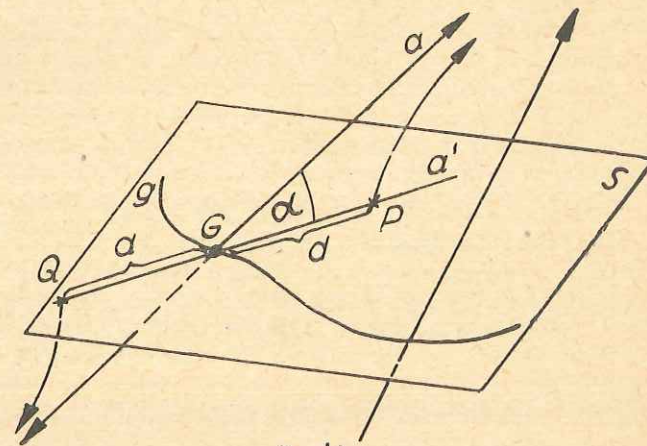
Legyen a g görbe egy Bolyai féle L vonal. (Lobacsevszkij féle oriciklus). A görbe egyik oldalán a görbére merőlegesen húzott egyenlő d szakaszok végpontjai, amint ismeretes, ugyancsak egy L vonalat írnak le, s így az ilyen módon származtatott állandó hajlássú felület asszimptotikus konturja ugyancsak L vonal.

Vegyünk vezérgörbének egy egyenest, s a d szakaszok legyenek az egyenesre merőlegesek. Végpontjaik ekkor az a egyenes d távolságú aequidistans vonalát írják le. Az aequidistans vonal a megfelelő állandó hajlássú felület asszimptotikus konturja.

A Lobacsevszkij—Bolyai tér bármely egyenesvonalú felületénél értelmezhetjük a felület tetszés szerinti síkra vett merőleges asszimptotikus konturját. Vizsgáljuk egy egyenesvonalú felület valamely g síkmetszetét. (3. ábra). A felület a alkotójának az S síkra eső vetülete legyen a' , a' és

a hajlásszöge α . $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

$\alpha = \Pi(d)$ által meghatározott — d távolságot a g görbétől számítva reámerjük a' -re mindkét irányban P , illetve Q pontokig. A P és Q pontokban S síkra emelt merőlegesek, mint ismeretes, asszimptotikusan párhuzamosak a -hoz. A szerkesztést minden alkotóra elvégezve, a P és Q pontok mértani helyét a felület S síkra vonatkozó merőleges asszimptotikus konturjának nevezzük.



3. ábra

Az asszimptotikus csúcsú kúp merőleges asszimptotikus konturja minden síkra egy pont, az alkotókkal asszimptotikus s az illető síkra merőleges egyenesnek a síkkal való metszéspontja.

2. Vizsgáljuk végül a Lobacsevszkij—Bolyai térnek a síkra kifejthető felületeit. (Ennek a felületcsaládnak egyébként speciális felületei az asszimptotikus csúcsú kúpok.)

Az említett felületek tanulmányozására nagyon alkalmas a Klein—Beltrami reprezentáció. Válasszunk a reprezentáció abszolút felületétül egy valós S ellipszoidot.

Könnyen látható, hogy a Lobacsevszkij—Bolyai tér minden síkra kifejthető felületének a reprezentációban is síkra kifejthető felület felel meg és viszont. Ez annak a következménye, hogy a reprezentációs tér mozgásai lineárisak.

Az abszolút felületet tartalmazó beágyazó euklideszi tér egy síkra kifejthető felületének vezérgörbéje, éle legyen g .

Első esetként tegyük fel, hogy g teljesen az abszolút felület külsejében halad, az általa előállított felület viszont metszi S -t. Ekkor a Lobacsevszkij—Bolyai térben olyan sajátos egyenesvonalú felületet kapunk, amelynek szomszédos alkotói nem metsző, de egy síkhoz tartozó egyenesek, tehát szuperparalel egyenesek határhelyezetei. Ilyen típusú egyenesvonalú felületek az euklideszi térben nincsenek. A kifejthető felület két érintő síkjának metszővonala ugyanis ebben az esetben a Lobacsevszkij—Bolyai térben az illető síkokban fekvő alkotókhoz szuperparalel egyenes, ha olyan érintősíkokat veszünk, amelyek alkotói a vezérgörbe valamely pontjának elég kis környezetében vannak. Valamely adott érintősíkban fekvő alkotó s az előbb említett szuperparalel egyenes közös merőlegesének az alkotón levő talppontja a mozgó érintősíknak az adothoz való konvergenciája esetén — sima vezérgörbét tételezve fel — az alkotó jól meghatározott pontja felé tart. Ezeknek a pontoknak mértani helyét — az euklideszi tér megfelelő fogalmának analógiájára — a sajátos nem-euklideszi felület strikciós vonalának nevezzük.

Általános esetben a g vezérgörbe metszi az abszolút ellipszoidot. Ekkor azok az alkotók, amelyek a g görbének az ellipszoidon belül fekvő szakaszait érintik, a szomszédos alkotókat a Lobacsevszkij—Bolyai tér pontjaiban metszik, s a vezérgörbének ezek a szakaszai a megfelelő kifejthető felület élének részeit alkotják a Lobacsevszkij—Bolyai térben. Ezzel szemben a felületnek azok az alkotói, az az alkotó sokasága, amely a vezérgörbének az abszolút felületén kívüli részeiben érinti ezt a görbét, olyan felületrészt képvisel, amelyenről fentebb volt szó.

A Lobacsevszkij—Bolyai tér kifejthető felületei tehát általában két típushoz tartozó felületdarabokból állanak. Az egyik típushoz tartozó felületdarabok alkotói a Lobacsevszkij—Bolyai térben futó vezérgörbedarabokon érintik a vezérgörbét s így a szomszédos érintők ezeken a vezérgörbedarabokon metszik egymást, a másik típushoz tartozó felületdara-

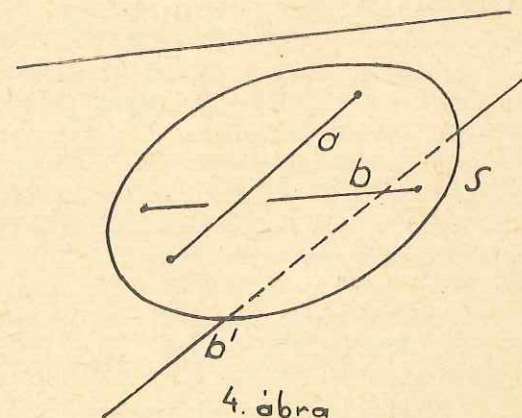
bok szomszédos alkotói a felület érintősíkjaiban fekvő szuperparallelek határhelyezetei.

A két különböző típushoz tartozó felületdarabok olyan alkotókban csatlakoznak egymáshoz, amelyek a vezérgörbét az abszolút felülettel való metszéspontjaiban érintik. Ilyen módon ezek az alkotók a vezérgörbedarabok asszimptotái, s egyúttal asszimptotái a strikciós felületi görbéknek is. A felület valós vezérgörbedarabjai s a strikciós görberészek tehát asszimptotikusak, s közös asszimptotáik a vezérgörbe abszolút felületen levő pontjaihoz futó alkotók.

3. A Lobacsevszkij—Bolyai tér további érdekes kérdése két, a térben kitérő egyenes, normális transzverzálisainak megvizsgálása, vagyis azoké az egyeneseké, amelyek a két adott egyenest metszik és mindkettőre merőlegesek. Ismeretes, hogy a Lobacsevszkij—Bolyai sík két kitérő — szuperparalel — egyenesének egyetlen normális transzverzálisa van, két metsző egyenesnek és két asszimptotikusan párhuzamos egyenesnek viszont nincs normális transzverzálisa. Az is ismeretes, hogy az euklideszi tér két kitérő g egyenesének egy — és csak is egy — normális transzverzálisa van.

A Lobacsevszkij—Bolyai tér két kitérő egyenesére vonatkozóan a problémát a Klein—Beltrami reprezentáció segítségével vizsgáljuk. Az S abszolút ellipszoid két egymást nem metsző s nem egy síkban fekvő húrja reprezentálja a Lobacsevszkij—Bolyai tér két kitérő egyenesét. (4. sz. ábra).

Ismeretes, hogy az a egyenest metsző és reá merőleges egyenesek S -nek azok a húrjai, amelyek a -t és a -nak S -re konjugált egyenesét — ezt a' -vel jelöljük — metszik. Ugyanez érvényes a b -t metsző és erre merőleges egyenesekre. Az a és b egyenesek normális transzverzálisának reprezentánsai ezek szerint S -nek azok a húrjai, amelyek tartó egyenesei az a , b húrokat s az a' és b' egyeneseket metszik.



4. ábra

Az a és b húrokat tartó egyenesek s például az a' (ugyanúgy vehetnők a b' -t is) metsző egyenesei, mint ismeretes, egy másodrendű egyenesvonalú felület alkotói. Ezt a b' (ill. a') egyenes vagy két pontban metszi, vagy egy pontban érinti, vagy alkotója a felületnek, s végül lehetséges, hogy nincs közös pontja a felülettel. A felület és a b' közös pontjain áthaladó s nem az a , b , a' -vel ugyanazon rendszerbe tartozó felületi alkotók adják az a és b normális transzverzálisának reprezentánsait, ha ezek nemcsak az a , b húrokat tartó egyeneseket, hanem magukat az a , b húrokat metszik.

Kimutatjuk, hogy vannak olyan a és b egyenesek, amelyeknek a Lobacsevszkij—Bolyai térben két valós normális transzverzálisuk van,

Az a és b egyenesek tartsanak valami módon — de térbeli kitérő jellegüket megtartva — az S felület egy-egy érintőjéhez.

Érintési pontjukat jelöljük A és B -vel. Konjugált egyenesek ekkor ugyancsak az A és B pontokon átmenő, az S felületet érintő a' és b' egyenesek. A 4 egyenest metsző egyenes az A és B pontokat összekötő c egyenes, ez pedig az S húrja. a -t és b -t mozgassuk folyamatosan az S belseje felé. a' és b' mozgása s ezzel együtt a 4 egyenest metsző egyenesek mozgása is folytonos; ezek az egyenesek a és b elég kis elmozdítására a c egyenes elég kis környezetében maradnak, tehát húrjai az S felületnek, s így a és b két normális transzverzálisának reprezentációi.

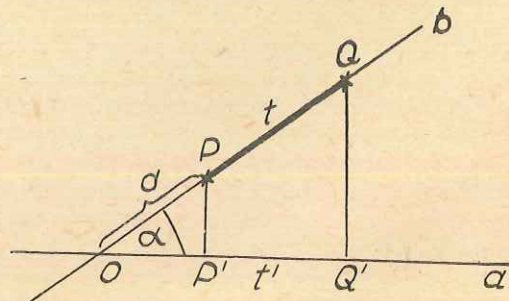
A most bebizonyított tétel más megfogalmazásban a következő: A Lobacsevszkij—Bolyai térben vannak olyan térbeli (nem egy síkban fekvő) négyszögek, amelyeknek mind a négy szöge derékszög.

Ismeretes, hogy az euklideszi síkban van olyan síknégyszög, amelynek mindenik szöge derékszög, viszont nincsen olyan térnégyszög, amelynek mindenik szöge derékszög lenne. Ha ugyanis ilyen léteznék, akkor olyan kitérő egyenesek is léteznének, amelyeknek két normális transzverzálisuk van, ez pedig lehetetlen.

Ezzel szemben a Lobacsevszkij—Bolyai térben nincs olyan síknégyszög, amelynek minden szöge derékszög volna, ellenben vannak ilyen térnégyszögek.

Így megkaptuk az euklideszi V. axioma egy térbeli ekvivalensét. Ez a következő: nincsenek olyan térbeli négyszögek, amelyek minden szöge derékszög.

4. Ismeretes, hogy egyenes szakaszok más egyenesre vett vetületeinek kérdése a Lobacsevszkij—Bolyai geometriában egészen más jellegű, mint az euklideszben. Legyen például (6. ábra) a b egyenesen fekvő t hosszúságú szakasz, PQ -nak a b -t Q -ban metsző a egyenesre vett merőleges vetülete $P'Q' = t'$ szakasz. Ismeretes, hogy a t' szakasz hossza nemcsak α -tól és t -től,



6. ábra

hanem PQ -nak a b -n elfoglalt helyzetétől, tehát az $OP = d$ távolságtól is függ, s állandó t és α mellett a d monoton fogyó, O felé tartó függvénye. Hasonló a helyzet akkor is, ha a és b nem metsző egyenesek. Azt várhatnók, hogy ilyen körülmények között az ún. vetületi tétel is bonyolultabb lesz, mint az euklideszi geometriában.

Nagyon könnyen igazolhatjuk, hogy ez nincs így. A vetületi tétel változatlan alakban érvényes a Lobacsevszkij—Bolyai geometriában is, tehát un. abszolút tétel. A vetületi tétel — mint ismeretes — azt mondja ki, hogy adott A és B pontokat összekötő tetszős szerinti tört vonalnak valamely egyenesre vett vetülete független a tekintetbe jövő tört vonal alakjától, s egyenlő az A és B pontok vetületeinek távolságával.

Állításunk igazolása egyszerűen abból a tényből következik, hogy a vetületi tétel bizonyításában nem kell felhasználnunk a szakasz hossza és vetületének hossza közötti konkrét összefüggést, hanem csak a vetületek összegezésének additív sajátosságát, ez pedig független az V. axiómától.

Bolyai Tudományegyetem
Geometriai Tanszék

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО—БОЛЯИ

(Краткое содержание)

В настоящей работе изучаются некоторые важные свойства конических поверхностей в пространстве Лобачевского—Боляи, имеющих асимптотическую вершину, кроме того, рассматриваются линейчатые поверхности, прямые котсрых образуют постоянный угол с некоторой плоскостью, а также линейчатые поверхности, которые можно развёртывать на плоскость. Показывается, что линейчатые поверхности в пространстве Лобачевского—Боляи имеют образующие двух типов. Образующие первого типа пересекаются в точках направляющей кривой, а образующие второго типа являются предельными случаями расходящихся прямых. Определяются линии сжатия этих поверхностей и показывается, что асимптотические прямые направляющей кривой совпадают с асимптотическими прямыми линии сжатия.

Во второй части работы доказывается, что в пространстве Лобачевского—Боляи существуют прямые, имеющие две нормальных трансверсальных. Итак, утверждение, о том что „не существуют пространственные четырёхугольники, которые имели бы только прямые углы” является эквивалентным с аксиомой Эвклида.

Наконец, доказывается, что теорема о проекции на прямую является абсолютной тесремой.

SUR QUELQUES CLASSES DE SURFACES RÉGLÉES DE L'ESPACE
LOBATCHEVSKI-BOLYAI

(Résumé)

L'étude s'occupe des surfaces droites des cônes à sommet asymptotique de l'espace Lobatchevski-Bolyai, des surfaces dont les génératrices forment des angles constants avec un plan, des surfaces réglées pouvant être développées sur un plan et des plus importantes propriétés de toutes celles-là. L'auteur démontre que les surfaces réglées de l'espace Lobatchevski-Bolyai pouvant être développées se composent de parties appartenant à deux types. Les directrices voisines du premier type s'intersectent dans les points de la courbe de support, tandis que celles du deuxième type sont les cas-limites des superparallèles. L'auteur définit la ligne de striction des surfaces pouvant être développées et il démontre que les asymptotiques de la courbe de support et de la ligne de striction sont communes.

Dans la deuxième partie il démontre que dans l'espace Lobatchevski-Bolyai il y a des droites à deux transversales normales. De cette façon l'affirmation comme quoi „il n'y a point de quadrilatères non-plans ayant seulement des angles droits” est équivalente à l'axiome d'Euclide.

Finalement l'auteur démontre que le théorème de projection sur une droite est un théorème absolu.

DESPRE POLINOAMELE LUI CEBÎŞEV ALE
MUĚTIMILOR FINITE DE PUNCTE DIN PLAN (III)

de

G. CĂLUGĂREANU

Să notăm cu E o mulțime finită formată din N puncte c_v , $v = 1, 2, \dots, N$. Notînd cu $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ un polinom oarecare de gradul n în z , normat prin condiția ca termenul său de gradul n în z să aibă coeficientul 1, să formăm *media ponderată* de ordinul $2q$

$$(1) \quad J_{2q}(\mu) = \left(\sum_{v=1}^N \mu_v |P(c_v)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}}$$

unde numerele μ_v verifică condițiile $\sum_{v=1}^N \mu_v = 1$; $\mu_v \geq 0$, $v = 1, 2, \dots, N$.

Într-o notă¹ apărută în 1949 am considerat media simetrică ce corespunde cazului $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_N$. Notînd atunci cu j_{2q} minimul mediei J_{2q} cînd coeficienții $a_1, a_2, \dots, a_n$ variază independent luînd valori complexe oarecare, am arătat că există un singur polinom $P_q(z)$ pentru care minimul j_{2q} este atins și, gradul n rămînînd fix, avem

$$\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(z) = T_n(z; E), \quad \lim_{q \rightarrow \infty} j_{2q} = M_n = \max_{z \in E} |T_n(z; E)|$$

unde $T_n(z; E)$ este polinomul Cebîșev corespunzător mulțimii E .

Pe baza acestei proprietăți am arătat în aceeași notă că polinomul $T_n(z; E)$ se poate pune sub forma specială

$$(2) \quad T_n(z; E) = \frac{\sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_n} (z - c_{v_1})(z - c_{v_2}) \dots (z - c_{v_n}) |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}{\sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_n} |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_n})|^2}$$

¹ G. Călugăreanu, *Asupra polinoamelor lui Cebîșev ale mulțimilor plane mărginite și închise* (II). Buletinul științific Acad. R.P.R., T. II. 1950, p. 7.