

O CALE PENTRU A CĂPĂTA IDENTITAȚI ÎNTRE EXPRESII CUPRINZÎND SIMBOLUL COMBINĂRILOR

de

DUMITRU RIPIANU

1. Încercînd să rezolv o problemă de geometrie elementară propusă de tov. prof. Tiberiu Popovici [1], am fost condus să calculez valoarea următoarei sume :

$$S = \sum_{s=0}^{\min. (a, [\frac{q}{2}])} (-1)^s C_{q-s}^s \frac{C_{n+q+1-2s}^{a-s}}{n+q+1-2s}$$

în care a și q sînt numere întregi nenegative, C_m^p este simbolul combinărilor, iar $[p]$ înseamnă partea întreagă a numărului p .

Spre a calcula suma de mai sus, am indicat un procedeu pentru a căpăta identități între expresii cuprinzînd simbolul combinărilor. Aplicînd procedeul în cazul anumitor expresii particulare, am găsit că suma S are valoarea

$$S = \frac{C_n^a - C_n^{a-q-1}}{n+q-2a+1}$$

Această relație are loc și dacă n este un număr real oarecare, cu condiția de a înțelege prin C_m^p expresia $\frac{1}{p!} m(m-1) \dots (m-p+1)$. și de a lua

$C_m^p = 0$ pentru $p \leq -1$.

Mijlocul cel mai folosit pentru a căpăta relații între expresii cuprinzînd simbolul combinărilor este de a scrie cu ajutorul formulei binomului obișnuite sau generalizate o expresie în mai multe litere în două feluri deosebite și de a egala egala apoi coeficienții aceleiași puteri ale uneia dintre ele.

În nota de față se extinde acest mijloc scriind o anumită expresie (expresia E din (3)) în două feluri și egalînd coeficienții unui produs de

două puteri a două dintre litere, ceea ce ne dă o cale pentru a căpăta identități de felul amintit, după care se folosește calea căpătată la un exemplu simplu, căpătîndu-se valoarea sumei S .

2. Să considerăm relația

$$\frac{P(u)}{Q(u)} = \sum_{\varphi=0}^{\infty} a_{\varphi}(x) u^{\varphi} \quad (1)$$

în care $P(u)$ și $Q(u)$ sînt două polinoame, în u , cu coeficienții polinoame în x și p , care — dacă x și p sînt fixați — are loc pentru

$$|u| < \lambda = \lambda(x, p) = \min_i |u_i|, \quad u_1, u_2, \dots \quad (1_0)$$

fiind zerorile lui $Q(u)$ și în care $a_{\varphi}(x)$ sînt dar polinoame în x și p .

Se va presupune că pentru orice valori ale lui x și p (din intervalul $[0, 1]$ se are $|Q(0)| > A$, A fiind un număr fix pozitiv, ceea ce ne asigură în (1_0) $\lambda > 0$ și în (1_2) $\alpha > 0$.
Se va lua

$$|u| < \alpha = \min_i \min_{x, p} |u_i(x, p)| \leq \lambda \quad (1_2)$$

Înmulțind termenii relației (1) cu x^n și integrînd termenii relației căpătate în raport cu x între $1-p$ și 1 , se are

$$E = E_1(p) = \int_{1-p}^1 x^n \frac{P(u)}{Q(u)} dx = E_2(p) = \sum_{\varphi=0}^{\infty} u^{\varphi} \int_{1-p}^1 x^n a_{\varphi}(x) dx. \quad (3)$$

Operația (2) cere ca seria care s-a integrat termen cu termen în relația (3) să fie uniform convergentă în x , pentru $0 \leq 1-p \leq x \leq 1$, ceea ce se poate avea în exemplul considerat luînd pe u destul de mic în modul.

Dacă $\lambda_{a,q}^{(1)}$, $\lambda_{a,q}^{(2)}$ sînt coeficienții lui p^a ($a \geq 1$) din coeficienții lui (3_1) u^q din $E_1(p)$, respectiv $E_2(p)$, iar $\nu_{q,a}^{(1)}$ coeficientul lui u^q din coeficientul lui p^a din $E_1(p)$ în relația (3), se are

$$\lambda_{a,q}^{(2)} = \lambda_{a,q}^{(1)} = \nu_{q,a}^{(1)} \quad (4)$$

Dacă $\delta_{a,q}^{(2)}$ este coeficientul lui p^a din polinomul în p : $R(p) = \int_{1-p}^1 x^n a_q(x) dx$, iar $\mu_{q,a}^{(1)}$ coeficientul lui u^q din expresia lui $E_1^{(a)}(0)$, se are din (4)

$$\nu_{q,a}^{(1)} = \frac{1}{a!} \mu_{q,a}^{(1)} = \delta_{a,q}^{(2)}, \text{ deci}$$

$$\frac{1}{a!} \text{ coef. lui } u^q \text{ din } E_1^{(a)}(0) = \text{coef. lui } p^a \text{ din } R(p) \quad (5)$$

Spre a căpăta relația (5) s-a dezvoltat pe $E_1(p)$ din (3) în serie Mac-Laurin, ceea ce se poate face, dată fiind ipoteza (1_1) , care ne arată că dacă $|u| < \alpha$ origina e un punct ordinar pentru funcția $E_1(p)$.

Relația (5) ne dă calea indicată spre a căpăta identități dintre cele amintite.

3. Se va lua în (1) $P(u) = 1$, $Q(u) = 1 - xu - pu^2$.

Se are atunci

$$a_{\varphi} = a_{\varphi}(x) = \sum_{h=0}^{\left[\frac{\varphi}{2}\right]} C_{\varphi-h}^h x^{\varphi-2h} p^h \quad (6)$$

$$\text{pentru că (1) se scrie } \frac{1}{1-xu-pu^2} = \sum_{\varphi=0}^{\infty} a_{\varphi} u^{\varphi},$$

de unde se are

$$a_{\varphi+2} = pa_{\varphi} + xa_{\varphi+1} \quad (7)$$

așa că dacă (6) are loc pentru $\varphi = q$ și $\varphi = q+1$, (7) ne dă

$$a_{q+2} = x^{q+2} + \sum_{h=1}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (C_{q+1-h}^{h-1} + C_{q+1-h}^h) x^{q+2-2h} p^h + \varepsilon$$

unde $\varepsilon = 0$ pentru q fără soț (cînd $\left[\frac{q+1}{2}\right] = \left[\frac{q+2}{2}\right]$) și $\varepsilon = p^{\left[\frac{q+2}{2}\right]}$ pentru q cu soț

deci $a_{q+2} = \sum_{h=0}^{\left[\frac{q+2}{2}\right]} C_{q+2-h}^h x^{q+2-2h} p^h$, așa că și a_{q+2} are forma (6). Ori $a_0 = 1$ și $a_1 = x$ au aceea formă, care este dar generală. Se are dar

$$\begin{aligned} R(p) &= \sum_{h=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{C_{q-h}^h}{n+q+1-2h} p^h [1 - (1-p)^{n+q+1-2h}] = \\ &= - \sum_{h=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{C_{q-h}^h}{n+q+1-2h} \sum_{s=1}^{n+q+1-2h} (-1)^s C_{n+q+1-2h}^s p^{h+s} \end{aligned} \quad (8)$$

așa că $\delta_{a,q}^{(2)}$ se are luînd în (8)

$$s = a - h \geq 1 \quad (9)$$

Din (9) se deduce că pentru $h \geq a$ nu se capătă în (8) termeni în p^a , așa că (8) ne dă

$$(-1)^{a-1} \delta_{a,q}^{(2)} = \sum_{h=0}^{\min(a-1, \left[\frac{q}{2}\right])} (-1)^h C_{q-h}^h \frac{C_{n+q+1-2h}^{a-h}}{n+q+1-2h} \quad (10)$$

Dacă $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq a - 1$, indicele superior de sumație din (10) este $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$; dacă $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor > a - 1$, același indice este $a - 1$, așa că cu ajutorul lui (5) se are

$$S(n) = \sum_{h=0}^{\min(a, \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor)} (-1)^h C_{n+q+1-2h}^{a-h} = \bar{\alpha} + (-1)^{a-1} \delta_{a,q}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq a - 1 \\ (-1)^a \frac{C_{n+q+1-2a}^a}{n+q+1-2a} & \text{dacă } \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \geq a \end{cases} \quad (11)$$

Dacă $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq a - 1$, cu atât mai mult $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor < a$, deci și în $S(n)$ indicele superior de sumație este $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$, așa că $\bar{\alpha} = 0$. Dacă $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \geq a$, în $S(n)$ indicele superior de sumație este a , însă cum $a - 1 < \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$, în $(-1)^{a-1} \delta_{a,q}^{(2)}$ este $a - 1$, așa că se va adăuga $\bar{\alpha} = (-1)^a \frac{C_{n+q+1-2a}^a}{n+q+1-2a}$ la $(-1)^{a-1} \delta_{a,q}^{(2)}$ spre a avea pe $S(n)$.

Nu se poate în toate cazurile $\bar{\alpha} = (-1)^a \frac{C_{n+q+1-2a}^a}{n+q+1-2a}$; pentru că pentru $a \geq q + 1$ s-ar avea $\bar{\alpha} \neq 0$, în timp ce (11) cere în acest caz $\bar{\alpha} = 0$. Ori, din (3) se are

$$E_1^{(\varphi)}(p) = \int_{1-p}^1 \frac{\varphi! u^{2\varphi} x^n}{(1-ux-pu^2)^{\varphi+1}} dx + \sum_{s=0}^{\varphi-1} (\varphi-s-1)! \frac{u^{2(\varphi-s-1)}}{(1-u)^{\varphi-s}} \frac{d^s}{dp^s} \frac{(1-p)^n}{(1+pu)^{\varphi-s}} \quad (12)$$

pentru că dacă (12) are loc pentru $\varphi = q$, se are

$$E_1^{(q+1)}(p) = \frac{d}{dp} E_1^{(q)}(p) = \int_{1-p}^1 \frac{(q+1)! u^{2(q+1)} x^n}{(1-ux-pu^2)^{q+2}} dx + \frac{q! u^{2q} (1-p)^n}{(1-u)^{q+1} (1+pu)^{q+1}} + \sum_{s=0}^{q-1} (q-s-1)! \frac{u^{2(q-s-1)}}{(1-u)^{q-s}} \frac{d^{s+1}}{dp^{s+1}} \frac{(1-p)^n}{(1+pu)^{q-s}} = \int_{1-p}^1 \frac{(q+1)! u^{2(q+1)} x^n}{(1-ux-pu^2)^{q+2}} dx + \sum_{s=0}^q (q+1-s-1)! \frac{u^{2(q+1-s-1)}}{(1-u)^{q+1-s}} \frac{d^s}{dp^s} \frac{(1-p)^n}{(1+pu)^{q+1-s}}$$

asa că dacă (12) are loc pentru $\varphi = q$, are loc și pentru $\varphi = q + 1$. Ori, $E_1'(p) = \int_{1-p}^1 \frac{u^2 x^n}{(1-ux-pu^2)^2} dx + \frac{(1-p)^n}{(1-u)(1+pu)}$ este de forma (12), care este dar generală și care ne dă cu ajutorul formulei lui Leibnitz

$$\frac{d^s}{dp^s} (f(p) g(p)) = \sum_{h=0}^s C_s^h f^{(h)}(p) g^{(s-h)}(p) \quad (13)$$

$$E_1^{(a)}(u) = \sum_{s=0}^{a-1} (-1)^s \frac{u^{2(a-s-1)}}{(1-u)^{a-s}} \sum_{h=0}^s (a-h-1)! C_s^h n(n-1) \dots (n-h+1) u^{s-h} \quad (14)$$

Luând $|u| < 1$ și folosind formula binomului generală

$$(1-u)^{-M} = \sum_{\delta=0}^{\infty} C_{M-1+\delta}^{M-1} u^\delta \quad (|u| < 1) \quad (14_1)$$

relația (14) se scrie

$$E_1^{(a)}(0) = \sum_{s=0}^{a-1} (-1)^s \sum_{\delta=0}^{\infty} C_{a-s-1+\delta}^{a-s-1} \sum_{h=0}^s (a-h-1)! C_s^h n(n-1) \dots \dots (n-h+1) u^{2a-2-s+\delta-h} \quad (15)$$

Luând în (15)

$$\delta = q - 2a + 2 + s + h \quad (16)$$

se are dar

$$\mu_{q,a}^{(1)} = \sum_{s=\max(0, a-q-1)}^{a-1} (-1)^s \sum_{h=\max(0, a-q-1)}^s C_s^h (a-h-1)! n(n-1) \dots \dots (n-h+1) C_{q-a+1+h}^{a-s-1} \quad (17)$$

pentru că din (16) se are

$$\delta = h - a + 1 + s + q - a + 1 = s - a + 1 + h + q - a + 1$$

și cum din (15) se are $h - a + 1 \leq s - a + 1 \leq 0$, pentru ca $\delta \geq 0$ trebuie ca $s + q - a + 1 \geq 0$ și $h + q - a + 1 \geq 0$, și cum din (15) se mai are $s \geq 0$, $h \geq 0$ se deduce

$$s \geq \max(0, a - q - 1) \text{ și } h \geq \max(0, a - q - 1). \quad (17_1)$$

Relația (17) se scrie

$$\mu_{q,a}^{(1)} = \sum_{h=\max(0, a-q-1)}^{a-1} (a-h-1)! n(n-1) \dots \dots (n-h+1) \sum_{s=h}^{a-1} (-1)^s C_s^h C_{q-a+1+h}^{a-s-1} \quad (18)$$

Luind în relația

$$\sum_{\delta=0}^k (-1)^{\delta} C_m^{k-\delta} C_{n+\delta}^n = C_{m-k-1}^k \quad (19)$$

(care se află de pildă în [2], la pag. 251, formula (25))

$$k = a - 1 - h, \quad m = q - a + 1 + h, \quad n = h \quad (20)$$

se are

$$\sum_{\delta=0}^{a-1-h} (-1)^{\delta} C_{h+\delta}^h C_{q-a+1+h}^{a-1-h-\delta} = C_{q-a}^{a-1-h} \quad (21)$$

Se are dar în (18) însemnind $s = h + \delta$, cu ajutorul lui (21)

$$\begin{aligned} & \sum_{s=h}^{a-1} (-1)^s C_s^h C_{q-a+1+h}^{a-1-s} = \\ & = (-1)^h \sum_{\delta=0}^{a-1-h} (-1)^{\delta} C_{h+\delta}^h C_{q-a+1+h}^{a-1-h-\delta} = (-1)^h C_{q-a}^{a-1-h} \end{aligned} \quad (22)$$

În prezenta notă, simbolul de combinați C_M^P se folosește în accepțiunea lui generală: $C_M^P = \frac{1}{P!} M(M-1) \dots (M-P+1)$, P fiind un întreg ≥ 1 , iar M o cantitate oarecare. } (23)

Dacă M este un întreg, $M \geq 0$ iar $P \geq M + 1$, atunci în virtutea relației din (23) se are $C_M^P = 0$ } (24)

Așa că (11) se scrie cu ajutorul lui (18) și (22)

$$S(n) = \bar{\alpha} + \frac{(-1)^{a-1}}{a!} \sum_{h=\max(0, a-q-1)}^{a-1} (-1)^h n(n-1) \dots (n-h+1) (q-a) (q-a-1) \dots (q-2a+h+2) \quad (25)$$

Din (13) se deduce că pentru $h=0$, termenul $n(n-1) \dots (n-h+1)$ din (14) și (25) se înlocuiește cu 1, iar din (19) că pentru $h=a-1$ termenul $(q-a)(q-a-1) \dots (q-2a+h+2)$ din (25) se înlocuiește cu 1. } (26)

Dacă $a \leq q$, relația (25) se scrie însemnind $\bar{q} = q - a$:

$$\begin{aligned} (n+q-2a+1) S(n) &= \frac{1}{a!} P(a, n, \bar{q}) = \frac{(-1)^a}{a!} [\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+1) - \\ &- (n+\bar{q}-a+1) \sum_{h=0}^{a-1} (-1)^h n(n-1) \dots (n-h+1) \bar{q}(\bar{q}-1) \dots \\ &\dots (\bar{q}-a+h+2)] \end{aligned} \quad (27)$$

asa că însemnind $\bar{h} = h - 1$, se are

$$\begin{aligned} P(a, n, \bar{q}) &= (-1)^a [\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+1) - \\ &- (n+\bar{q}-a+1) \bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+2) - \\ &- (n+\bar{q}-a+1) \sum_{h=1}^{a-1} (-1)^h n(n-1) \dots (n-h+1) \bar{q}(\bar{q}-1) \dots \\ &\dots (\bar{q}-a+h+2)] = \\ &= (-1)^{a-1} n [\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+2) - (n+\bar{q}-a+1) \sum_{h=0}^{a-2} (-1)^{\bar{h}} (n-1) (n-2) \dots \\ &\dots (n-\bar{h}) \bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+\bar{h}+3)] = n P(a-1, n-1, \bar{q}). \end{aligned} \quad (28)$$

întrucât pentru $\bar{h}=0$ (deci $h=1$), avându-se în (27) expresia n pentru $n(n-1) \dots (n-h+1)$, se are în (28) expresia 1 pentru $(n-1)(n-2) \dots (n-\bar{h})$, iar pentru $\bar{h}=a-2$, deci $h=a-1$, se are în (27) expresia 1 pentru $\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+h+2)$, deci în (28) expresia 1 pentru $\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+h+3)$, așa că condițiile (26) se păstrează în relația (28), din care se are

$$\begin{aligned} P(a, n, \bar{q}) &= n P(a-1, n-1, \bar{q}) \\ P(a-1, n-1, \bar{q}) &= (n-1) P(a-2, n-2, \bar{q}) \\ P(2, n-a+2, \bar{q}) &= (n-a+2) P(1, n-a+1, \bar{q}) \end{aligned}$$

de unde

$$P(a, n, \bar{q}) = n(n-1) \dots (n-a+1) \quad (29)$$

dat fiind că din (27) se are $P(1, n, \bar{q}) = n$.

Așa dar, din (27) și (29) se are

$$S(n) = \frac{C_n^a}{n+q-2a+1} \quad (\text{pentru } a \leq q) \quad (30)$$

Dacă $a \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$, se are în (25) și (27) termenul dat de $\bar{\alpha}$; dacă $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \leq a \leq q$, se are $\frac{q}{2} < a$, deci $q-2a+1 \leq 0$; așa că expresia lui $\bar{\alpha}$ din (11) ne dă $\bar{\alpha} = 0$, așa cum cere acea relație. } (30₁)

Dacă $a \geq q+2$, se are $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq \frac{q}{2} \leq \frac{a}{2} - 1 < a-1$, așa că (25) se scrie

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{(-1)^{a-1}}{a!} \sum_{h=a-q-1}^{a-1} (-1)^h n(n-1) \dots \\ &\dots (n-h+1) (q-a) (q-a-1) \dots (q-2a+h+2) \end{aligned} \quad (31)$$

înseamnă dar

$$\bar{Q}(l) = \sum_{h=0}^l (-1)^h n(n-1) \dots (n-h+1) \bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+h+2) \quad (32)$$

relația (31) se scrie

$$S(n) = \frac{(-1)^{a-1}}{a!} [\bar{Q}(a-1) - \bar{Q}(-\bar{q}-2)] \quad (33)$$

Se are din (27) și (29)

$$\begin{aligned} \bar{Q}(a-1) &= \frac{1}{n+\bar{q}-a+1} [\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+1) + \\ &+ (-1)^{a-1} n(n-1) \dots (n-a+1)] \end{aligned} \quad (34)$$

Înlocuind în (34) pe $\bar{q}$ cu r și pe a cu $l+1$, unde $0 \leq l \leq a-2$, (35) se are

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^l (-1)^h n(n-1) \dots (n-h+1) r(r-1) \dots (r-l+h+1) \\ &= \frac{1}{n+r-l} [r(r-1) \dots (r-l) + (-1)^l n(n-1) \dots (n-l)] \end{aligned} \quad (36)$$

Luând în (36) $r = \bar{q} - a + l + 1$, se are în (32)

$$\begin{aligned} \bar{Q}(l) &= \frac{\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+l+2)}{n+\bar{q}-a+1} [\bar{q}-a+l+1)(\bar{q}-a+l) \dots \\ &\dots (\bar{q}-a+1) + (-1)^l n(n-1) \dots (n-l)] \\ &= \frac{1}{n+\bar{q}-a+1} [\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+1) + (-1)^l n(n-1) \dots \\ &\dots (n-l) \bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+l+2)] \end{aligned} \quad (37)$$

Luând dar în (37) $l = -\bar{q} - 2$, valoare care (dat fiind că se are $a \geq q+2$), verifică relațiile (35), se are

$$\begin{aligned} \bar{Q}(-\bar{q}-2) &= \frac{1}{n+\bar{q}-a+1} [\bar{q}(\bar{q}-1) \dots (\bar{q}-a+1) + \\ &+ (-1)^{\bar{q}} n(n-1) \dots (n-\bar{q}+2) \bar{q}(\bar{q}-1) \dots (-a)] \end{aligned} \quad (38)$$

așa că se are din (33), (34) și (38)

$$S(n) = \frac{C_n^a - C_n^{\bar{q}-1}}{n+\bar{q}-a+1} = \frac{C_n^a - C_n^{a-q-1}}{n+q-2a+1} \quad (\text{pentru } a \geq q+2) \quad (39)$$

Dacă $a = q+1$, $\left[\frac{q}{2}\right] = \left[\frac{a-1}{2}\right] \leq \frac{a-1}{2} < a-1$, deci în (11) $\bar{\alpha} = 0$, așa că se are din (25), (32) și (34) având $\bar{q} = -1$:

$$S(n) = \frac{(-1)^{a-1}}{a!} \bar{Q}(a-1) = \frac{C_n^a - 1}{n+q-2a+1} \quad (40)$$

Folosind convenția $C_M^P = 0$ dacă $P \leq -1$ (M fiind o cantitate oarecare) și înseamnă indicele de sumă cu s , se are din (11), (30), (39), și (40) în toate cazurile relația

$$\sum_{s=0}^{\min(a, [\frac{q}{2}])} (-1)^s C_{q-s}^s \frac{C_{n+q+1-2s}^{a-s}}{n+q+1-2s} = \frac{C_n^a - C_n^{a-q-1}}{n+q-2a+1} \quad (41)$$

în care a și q sînt întregi ≥ 0 , iar n un număr real oarecare. Relația (35) cere $a \geq 2$, însă pentru $a = 0$ sau 1 , relația (41) se are îndată direct.

Se are din (6) pentru $0 \leq 1-p \leq x \leq 1$:

$$x^n a_\varphi(x) \leq \sum_{h=0}^{[\frac{\varphi}{2}]} C_{\varphi-h}^h \leq \sum_{h=0}^{\varphi} C_\varphi^h = 2^\varphi \quad (\varphi \geq 0),$$

așa că

$$|\bar{R}_q| = \left| \sum_{\varphi=q}^Q x^n a_\varphi(x) u^\varphi \right| \leq \sum_{\varphi=q}^Q x^n a_\varphi(x) |u|^\varphi < \sum_{\varphi=q}^Q (2|u|)^\varphi < \frac{(2|u|)^q}{1-2|u|} < \varepsilon$$

pentru $|u| < \frac{1}{2}$ și $q > N = N(\varepsilon)$, ε fiind luat după voie de mic, așa că

$|R_q| = \left| \sum_{\varphi=q}^\infty x^n a_\varphi(x) u^\varphi \right| \leq \varepsilon$ pentru $|u| < \frac{1}{2}$, $q > N$ și x oarecare în intervalul considerat. Așa dar proprietatea (30) are loc dacă se ia $|u| < \min(\frac{1}{2}, \alpha)$, α fiind valoarea minimă în raport cu $x \in [0,1]$ a celui mai mic dintre modulele rădăcinilor ecuației $1 - ux - pu^2 = 0$.

Catedra de teoria funcțiilor
Universitatea „V. Babeș”

BIBLIOGRAFIE

1. Tiberiu Popoviciu, Problema nr. 5889 propusă în Gazeta Matematică, vol. 49 (1943-44), p. 268.
2. E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. Ed. 2, Leipzig-Berlin 1927.

СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВ МЕЖДУ ВЫРАЖЕНИЯМИ
СОДЕРЖАЩИМИ СИМВОЛ СОЧЕТАНИЙ

(Краткое содержание)

В данной статье указывается способ получения тождеств между выражениями, содержащими символ сочетаний, опирающийся на соотношение (1), в котором $P(u)$ и $Q(u)$ — два многочлена от u с коэффициентами, многочлены от x и p , последние два принимая вещественные значения из промежутка $[0,1]$. Соотношение (1) имеет место для довольно малого $|u|$, если $|Q(0)| > A$, где $A > 0$, остаётся неизменным.

Интегрируя по x между $1-p$ и 1 члены соотношения (1), умноженные на x^n , получается соотношение (3), которое имеет место для довольно малого $|u|$.

Обозначая $R(p) = \int_{1-p}^1 x^n a_q(x) dx$, получается если сравнить коэффициенты u^q в соотношении (3), в котором $E_1(p)$ разлагается в ряд Мак-Лорена, соотношение (5) в котором заключается указанный способ получения соотношений.

Данное соотношение применяется в случае $P(u)=1, Q(u)=1-xu-pu^2$, получая соотношение (41), которое имеет место для всяких целых a и $q(\geq 0)$, причём n — некоторое вещественное число, а

$$C_M^P = \frac{1}{P!} M(M-1) \dots (M-P+1)$$

(P целый $> 0, aM$ — любое вещественное число), при условии

$$C_M^P = 0 \quad \text{для} \quad P \leq -1, \text{ а } C_M^0 = 1.$$

UN PROCÉDÉ POUR OBTENIR DES IDENTITÉS ENTRE EXPRESSIONS
RENFERMANT LE SYMBOLE DES COMBINAISONS

(Résumé)

Dans la note présente on indique un moyen pour obtenir des identités entre expressions renfermant le symbole des combinaisons, qui se fonde sur la relation (1) où $P(u)$ et $Q(u)$ sont deux polynômes en u , avec les coefficients polynômes en x et p , ces deux dernières prenant des valeurs réelles de l'intervalle $[0,1]$. La relation (1) a lieu pour $|u|$ assez petit, si $|Q(0)| > A$, $A > 0$ étant fixe.

En intégrant par rapport à x entre $1-p$ et 1 les termes de la relation (1) multipliés par x^n , on obtient la relation (3), qui a lieu pour $|u|$ assez petit.

En désignant par $R(p)$ l'expression $\int_{1-p}^1 x^n a_q(x) dx$, on déduit en égalant les coefficients de u^q dans la relation (3) dans laquelle on développe $E_1(p)$ en série de Mac-Laurin la relation (5), laquelle fournit le moyen d'obtenir des relations de ce genre.

On applique la relation en question au cas où $P(u)=1, Q(u)=1-xu-pu^2$, obtenant ainsi la relation (41), qui a lieu pour tous a et q entiers ≥ 0 , n étant une quantité réelle quelconque, et $C_M^P = \frac{1}{P!} M(M-1) \dots (M-P+1)$ (P entier > 0 , et M une quantité réelle quelconque), avec la convention $C_M^P = 0$ pour $P \leq -1$, $C_M^0 = 1$.