

Așadar valența p a domeniului Δ este cea mai mică valoare a întregului n pentru care avem $\lim G_n(\lambda) = 0$, $\lambda \rightarrow \infty$. Putem scrie

$$G_n(\lambda) = \frac{1}{\pi^n} \iint_{\Delta} \iint_{\Delta} \dots \iint_{\Delta} [e^{-\lambda|z_1 - \zeta|^2} - 1][e^{-\lambda|z_2 - \zeta|^2} - 2] \dots [e^{-\lambda|z_n - \zeta|^2} - n] d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n d\omega_{\zeta}.$$

3. Proprietățile de mai sus își găsesc aplicații în studiul transformărilor continue ale planului, și considerații similare se pot face și în spații cu mai multe dimensiuni.

Fie $Z = X(x, y) + iY(x, y)$ o transformare continuă a domeniului simplu conex și univalent D în domeniul Δ , care poate fi multivalent. Vom presupune că X și Y posedă în D jacobianul $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$, mărginit în D . Atunci, notînd cu $\zeta = \xi + i\eta$, avem

$$f(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_D \lambda e^{-\lambda[(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2]} \left| \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right| dx dy.$$

Pentru univalența domeniului Δ va fi necesar și suficient să avem, oricare ar fi $\lambda > 0$,

$$(9) \quad \frac{1}{\pi} \iint_D \iint_D \iint_D \lambda e^{-\lambda[(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2]} \left| \frac{D(X_1, Y_1)}{D(x_1, y_1)} \right| \cdot \left| \frac{D(X_2, Y_2)}{D(x_2, y_2)} \right| dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \iint_D \left| \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right| dx dy.$$

În mod analog, putem explicita funcțiile $G_n(\lambda)$ cu ajutorul cărora putem determina în general valența p a domeniului Δ .

Din (9) putem deduce o condiție necesară și suficientă pentru univalența unei funcții olomorfe în cercul unitate, asupra căreia vom reveni într-o Notă ulterioară.

DESPRE FUNCȚIILE UNIVALENTE

(Lucrările sesiunii generale științ., iunie 1950. București, Ed. Acad. R.P.R., 1951, 204-209).

Comunicare prezentată în ședința din 3 iunie 1950

În teoria funcțiilor univalente joacă un rol esențial o teoremă a lui Bieberbach, numită *teorema ariei*. Am încercat, într-o Notă anterioară, să dau o generalizare a acestei teoreme, stabilind o condiție necesară și suficientă pentru univalența unui domeniu plan. Voi arăta aici care e forma pe care o ia această condiție în cazul unei funcții holomorfe în cercul unitate, funcție dată prin dezvoltarea

$$Z = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Să notăm cu Γ cercul unitate din planul (z) , iar cu γ cercul de rază $r < 1$, concentric cu Γ . Atunci $Z = f(z)$ transformă cercul γ într-un domeniu Δ . Am văzut că pentru ca Δ să fie univalent, e necesar și suficient să avem, oricare ar fi $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \iint_{\Delta} \lambda e^{-\lambda|z - \zeta|^2} d\omega_z d\omega_{\zeta} < A,$$

unde A este aria domeniului Δ . Această arie este mărginită, ca și domeniul Δ deoarece $r < 1$. Condiția de mai sus se mai scrie.

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\gamma} \iint_{\gamma} \lambda e^{-\lambda|f(z) - f(u)|^2} |f'(z)|^2 |f'(u)|^2 r dr d\theta \rho d\rho dt < \iint_{\gamma} |f'(z)|^2 r dr d\theta \text{ pu-}$$

nînd $z = re^{i\theta}$, $u = \rho e^{it}$, $\zeta = f(u)$. Dezvoltînd în serie exponențială, apar următoarele constante:

$$k_n = \frac{1}{\pi} \iint_{\gamma} \iint_{\gamma} |f(z) - f(u)|^{2n} \cdot |f'(z)|^2 \cdot |f'(u)|^2 r dr d\theta \rho d\rho dt$$

iar condiția de univalență se scrie

$$(1) \quad k_0 \lambda - k_1 \lambda^2 + \frac{k_2}{2} \lambda^3 - \dots + (-1)^n \frac{k_n}{n!} \lambda^{n+1} + \dots < A, \lambda > 0.$$

Calculul constantelor k_n în funcție de coeficienții Taylorieni a_n ai funcției $f(z)$ se face fără dificultate. Avem

$$k_n = \frac{1}{\pi} \iiint_Y [f(z) - f(u)]^n [\overline{f(z)} - \overline{f(u)}]^n f'(z) \overline{f'(z)} f'(u) \overline{f'(u)} r dr d\theta \rho d\rho dt =$$

$$= \sum_{\alpha\beta=0}^n (-1)^{\alpha+\beta} \binom{n}{\alpha} \binom{n}{\beta} A_{\alpha\beta}^{(n)}$$

$$A_{\alpha\beta}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \iiint_Y f^\alpha(z) \overline{f^\beta(z)} f^{n-\alpha}(u) \overline{f^{n-\beta}(u)} f'(z) \overline{f'(z)} f'(u) \overline{f'(u)} r dr d\theta \rho d\rho dt.$$

Apoi putem scrie:

$$A_{\alpha\beta}^{(n)} = \frac{1}{\pi} B_{\alpha\beta} B_{n-\alpha, n-\beta}, B_{\alpha\beta} = \iint_Y \left[\frac{f^{\alpha+1}(z)}{\alpha+1} \right] \left[\frac{\overline{f^{\beta+1}(z)}}{\beta+1} \right]' r dr d\theta$$

$$\frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(z) = \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} [1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots]^{\alpha+1} =$$

$$= z^{\alpha+1} \left[\frac{1}{\alpha+1} + (a_2 z + a_3 z^2 + \dots) + \frac{\alpha}{2} (a_2 z + \dots)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(\alpha-1)}{6} (a_2 z + \dots)^3 + \dots \right] = \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} + a_2 z^{\alpha+2} +$$

$$+ \left(a_3 + \frac{\alpha}{2} a_2^2 \right) z^{\alpha+3} + \left(a_4 + \alpha a_2 a_3 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{6} a_2^3 \right) z^{\alpha+4} + \dots =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(\alpha)} z^{\alpha+m} \frac{1}{\alpha+1} [f^{\alpha+1}(z)]' = z^\alpha + (\alpha+2) a_2 z^{\alpha+1} +$$

$$+ (\alpha+3) \left(a_3 + \frac{\alpha}{2} a_2^2 \right) z^{\alpha+2} + (\alpha+4) \left(a_4 + \alpha a_2 a_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(\alpha-1)}{6} a_2^3 \right) z^{\alpha+3} + \dots$$

așadar

$$B_{\alpha\beta} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^\alpha e^{i\alpha\theta} + (\alpha+2) a_2 r^{\alpha+1} e^{i(\alpha+1)\theta} + \dots$$

$$[r^\beta e^{-i\beta\theta} + (\beta+2) \bar{a}_2 e^{-i(\beta+1)\theta} + \dots] r dr d\theta$$

și ținând seama de $\int_0^{2\pi} e^{m i \theta} d\theta = 0, m \neq 0$, găsim

$$B_{\alpha\beta} = 2\pi \sum_{\substack{\sigma \geq 1 \\ \sigma > \beta - \alpha}}^{\infty} (\alpha + \sigma)^2 \int_0^1 r^{2(\alpha+\sigma-1)} C_\sigma^{(\alpha)} \overline{C_{\alpha-\beta+\sigma}^{(\beta)}} r dr =$$

$$= \pi \sum_{\substack{\sigma \geq 1 \\ \sigma > \beta - \alpha}}^{\infty} (\alpha + \sigma) r^{2(\alpha+\sigma)} C_\sigma^{(\alpha)} \overline{C_{\alpha-\beta+\sigma}^{(\beta)}}$$

Avem aici

$$C_1^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha+1}, C_2^{(\alpha)} = a_2, C_3^{(\alpha)} = a_3 + \frac{\alpha}{2} a_2^2, C_4^{(\alpha)} = a_4 +$$

$$+ \alpha a_2 a_3 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{6} a_2^3,$$

coeficienți care apar și în considerațiile lui L. Bieberbach¹⁾.

Găsim astfel:

$$k_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha, \beta=0}^n (-1)^{\alpha+\beta} \binom{n}{\alpha} \binom{n}{\beta} B_{\alpha\beta} \cdot B_{n-\alpha, n-\beta}, A = B_{00} =$$

$$= \pi \sum_{m=1}^{\infty} m r^{2m} |C_m^{(0)}|^2$$

ceea ce precizează complet valorile constantelor ce apar în condiția necesară și suficientă de univalență (1).

Se pune întrebarea, cu privire la condiția (1), dacă ea nu se poate lipsi de constanta pozitivă arbitrară λ , înlocuindu-se prin niște relații între coeficienții k_n și A .

2. Condiții necesare (dar nu suficiente) de univalență, de o formă ceva mai simplă decât (1), se pot deduce din alte inegalități, înlocuind teorema ariei. Am arătat, într-o Notă anterioară, că între arie și momentul de inerție al unui domeniu mărginit p -valent, în raport cu un punct ζ oarecare, avem relația

$$A^2 \leq 2\pi p I_{\zeta_1}.$$

Iată o demonstrație elementară a acestei inegalități.

Să considerăm un număr finit de domenii univalente din plan, două câte două disjuncte, măsurabile în sens Jordan și fie P un punct oarecare din plan. Să trasăm cercurile minime cu centru P , care conțin succesiv aceste domenii, și fie $r_1, r_2, \dots, r_n$ razele lor așezate în ordine cres-

¹⁾ L. Bieberbach, *Konforme Abbildung*, ed. III, 1937, Samml. Götschen, p. 111.

cătoare. Se poate ca mai multe domenii să corespundă unui același cerc de rază r_k . Să notăm cu A_k aria totală a domeniilor ce corespund razei r_k , și să arătăm că avem, notînd $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$,

$$(2) \quad A^2 \leq 2\pi(r_1^2 A_1 + r_2^2 A_2 + \dots + r_n^2 A_n)$$

Putem scrie această inegalitate sub forma:

$$\begin{aligned} & A_1^2 + (A_1 + A_2)A_2 + (A_1 + A_2 + A_3)A_3 + \dots + (A_1 + A_2 + \dots \\ & \dots + A_n)A_n + A_1A_2 + (A_1 + A_2)A_3 + \dots + (A_1 + \dots + A_{n-1})A_n \leq \\ & \leq \pi r_1^2 A_1 + \pi r_2^2 A_2 + \dots + \pi r_n^2 A_n + \pi r_1^2 A_1 + \pi r_2^2 A_2 + \dots + \pi r_n^2 A_n. \end{aligned}$$

Se vede, atunci că primul termen din membrul stîng este $\leq$ primul termen din membrul drept, deoarece $A_1 \leq \pi r_1^2$; tot astfel, termenii de rang 2, deoarece $A_1 + A_2 \leq \pi r_2^2$, ..., precum și termenii de rang n , deoarece avem $A_1 + A_2 + \dots + A_n \leq \pi r_n^2$. Apoi, termenul de rang $n+1$ din primul membru este $\leq$ cel de rang $n+2$ din membrul stîng este $\leq$ ultimul din membrul drept, deoarece $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} \leq \pi r_n^2$. Aceasta demonstrează (2).

Între cercurile de raze r_k , să inserăm acum alte cercuri cu centrul P_n toate diferențele a două raze consecutive fiind $< \varepsilon$. Aceste cercuri taie din domeniile date niște domenii mărginite parțial de arce de cercuri, și inegalitatea (2) se va aplica și acestor domenii parțiale. Se vede, atunci că trecînd la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, obținem

$$A^2 \leq 2\pi \int_0^{r_n} r^2 d\omega = 2\pi I_P,$$

unde I_P este momentul de inerție al sistemului format de domeniile date prevăzute cu densitatea 1, față de P . Cum însă inegalitatea e valabilă oricare ar fi poziția lui P în plan, ea se poate scrie

$$(3) \quad A^2 \leq 2\pi I_G,$$

unde I_G este momentul de inerție față de centrul de greutate al domeniilor date. Sub această formă, (3) devine o egalitate în cazul unui domeniu unic, de formă circulară; deci, ea nu poate fi ameliorată. Formula presupune că domeniile sînt univalente și nu calcă unele peste altele.

Dacă e vorba de domenii multivalente, putînd să și calce unele peste altele, astfel încît nici o regiune din plan să nu fie acoperită mai mult de p ori, avem formula mai generală

$$(4) \quad A^2 \leq 2\pi p I_G,$$

în care ariile sînt socotite de atîtea ori de cîte ori sînt acoperite, iar momentul de inerție tot astfel, socotind masa dublă în regiunile acoperite de 2 ori etc.

Putem descompune, prin tăieturi convenabile, domeniile date în p grupe de domenii univalente, în fiecare grupă avînd numai domenii 2

cîte 2 disjuncte în modul următor: Vom pune în prima grupă domeniile planului care se găsesc acoperite de p ori de către domeniile sistemului dat, în a doua grupă domeniile planului care se găsesc acoperite de $p-1$ ori, împreună cu cele din prima grupă (cîte un al doilea exemplar) etc., terminînd cu domeniile planului acoperite o singură dată de sistemul dat, împreună cu toate domeniile grupelor precedente. Notînd cu A_p aria totală a domeniilor din prima grupă, iar cu $I_p(P)$ momentul lor de inerție față de P , apoi cu A_{p-1} și $I_{p-1}(P)$ valorile analoage pentru a doua grupă etc., vom putea scrie:

$$A_p^2 \leq 2\pi I_p(P), A_{p-1}^2 \leq 2\pi I_{p-1}(P), \dots, A_1^2 \leq 2\pi I_1(P).$$

Atunci, media aritmetică nedepășind media geometrică,

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_p}{P} \right)^2 & \leq \frac{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_p^2}{P} \leq \\ & \leq \frac{2\pi}{P} (I_1 + I_2 + \dots + I_p) \end{aligned}$$

și deoarece $A = A_1 + A_2 + \dots + A_p$, $I = I_1 + I_2 + \dots + I_p$, avem $A^2 \leq 2\pi p I(P)$. Însă, P fiind arbitrar în plan, rezultă (4). Egalitatea are loc aici în cazul unui disc circular acoperit de P ori.

În locul momentului I_G putem introduce diametrul mediu ¹⁾ de ordinul 2

$$\delta_2^6 = \iiint_{\Delta} \alpha \beta^2 \cdot d\omega_x d\omega_\beta$$

al sistemului dat, de domenii, Δ . Avem

$$\iint_{\Delta} \alpha \beta^2 d\omega_\beta = I(\alpha) = I_G + A \cdot \overline{\alpha G^2}, \quad \delta_2^6 = \iint_{\Delta} (I_G + A \cdot \overline{\alpha G^2}) d\omega_x = 2AI_G.$$

Formula (4) devine deci

$$(5) \quad A^3 \leq \pi p \delta_2^6, \quad A = (\pi p)^{\frac{1}{3}} \delta_2^2.$$

3. Din (5) putem deduce o condiție necesară pentru ca $f(z)$ să fie p -valentă în cercul unitate $|z| < 1$. Avem, atunci, cu notația întrebuită încă de mai sus:

$$\delta_2^6 = \iiint_{\gamma} |f(z) - f(u)|^2 |f'(z)|^2 |f'(u)|^2 r dr d\theta \rho d\varphi dt = \pi k_1.$$

¹⁾ W. Blaschke, *Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises*. Math. Zeitschrift, 1 (1918), 52.

Relația $A^3 \leq p\pi^2 k_1$ ne dă $B_{00}^3 \leq 2p\pi (B_{00}B_{11} - B_{01}B_{10})$, iar după calcul găsim

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} mr^{2m} |a_m|^2 \right)^3 \leq 2p \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} mr^{2m} |a_m|^2 \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} (m+1) r^{2(m+1)} |C_m^{(1)}|^2 \right) - \left| \sum_{m=1}^{\infty} mr^{2m} C_m^{(0)} \overline{C_{m-1}^{(1)}} \right|^2 \right].$$

Avem aici o condiție necesară de p -valență, făcând să intervină coeficienții taylorieni ai funcției $f(z)$, direct și prin intermediul combinațiilor $C_m^{(1)}$.

DESPRE UNELE SPAȚII BANACH ȘI FUNCȚIONALELE LOR LINIARE

(Studii și cerc. științ. Cluj ț. 3-4, II (1951), 1-5)

Comunicare prezentată de Prof. T. POPOVICIU, m. cores. Acad. R.P.R. în ședința din 19 mai 1951 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Fie $\varphi(n)$ o funcție crescătoare de n , astfel ca $\varphi(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Considerind toate șirurile numerice

$$x = \{a_n\}, n = 1, 2, \dots, |a_n| = o[\varphi(n)]$$

ca puncte ale unui spațiu X , putem organiza pe X ca spațiu vectorial definind

$$x + y = \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, tx = t\{a_n\} = \{ta_n\}.$$

Aici numerele a_n cît și t , pot fi reale sau complexe. Se vede că, singura restricție la care sînt supuse șirurile din X fiind

$$|a_n| = o[\varphi(n)], \text{ adică } \frac{|a_n|}{\varphi(n)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

atît $x + y$ cît și tx aparțin spațiului X odată cu x și y . Axiomele spațiului vectorial se verifică ușor. Obținem un spațiu X vectorial normat, definind

$$\|x\| = \sup_n \frac{|a_n|}{\varphi(n)}$$

și axiomele normei se verifică și ele imediat.

Spațiul X astfel normat este și complet. Să presupunem

$$x_\nu = \{a_{n\nu}\}, x_\nu \in X, \nu = 1, 2, \dots; \|x_\nu - x_\mu\| < \varepsilon, \mu, \nu > N(\varepsilon).$$

Aceasta se mai scrie

$$\sup_n \frac{|a_{n\mu} - a_{n\nu}|}{\varphi(n)} < \varepsilon; |a_{n\mu} - a_{n\nu}| < \varepsilon \varphi(n); \mu, \nu > N(\varepsilon); n = 1, 2, \dots$$

de unde

$$a_{n\nu} \rightarrow a_{n0}, n = 1, 2, \dots$$