

iar cele pătratică, rezultând din precedentele prin înlocuirea $y = x$,

$$g(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{m,n} a_m a_n}{m!n!}, \quad \sum_{m,n=0}^{\infty} |\gamma_{m,n}| < \infty.$$

Am cercetat astfel de funcționale pătratică în scopul de a obține o exprimare directă a invariantilor de prelungire corespunzători funcției analitice definită de elementul $\Sigma a_n z^n$, ca formă pătratică în raport cu coeficienții taylorieni.

Putem observa că spațiile definite mai sus conțin ca niște cazuri particulare toate clasele evasianalitice de funcții reale indefinit derivabile într-un interval. Avem deci mai sus și forma generală a funcționalei lineare pentru fiecare clasă evasianalitică, corespunzătoare definiției normei

$$\|x\| = \sup_n \frac{|a_n|}{\varphi(n)}.$$

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

OBSERVĂRI ASUPRA NORMELOR UNUI SPAȚIU VECTORIAL

(Bul. științ., Secțiunea de șt. mat. și fiz., IV, 1 (1952), 69—73)

Comunicare prezentată de AL. GHIKA, Membru corespondent al Academiei R.P.R.
în ședința din 19 octombrie 1951

Să notăm cu X un spațiu vectorial oarecare și cu $f(x)$, $x \in X$, o funcțională definită în X . Se definește continuitatea funcționalei f numai după ce spațiul X a fost normat, considerându-se în el o funcțională $\|x\|$ numită normă, cu proprietățile:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \rightarrow x = 0$ (0 = elementul nul din X).
2. $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$.
3. $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$, t real sau complex.

Însă chiar înainte de a introduce norma $\|x\|$, putem da o definiție a continuității într-un sens mai larg, după cum a observat M. Fréchet [1]. Vom spune că $f(x)$ este *continuu radial* în $x_0 \in X$, dacă oricum am alege $y \in X$, avem:

$$f(x_0 + \varepsilon y) - f(x_0) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Această continuitate este deci independentă de orice normă.

Dacă $f(x)$ este *continuu în raport cu o normă* $\|x\|$, ea este *continuu și radial*. Într-adevăr, prin ipoteză, din $\|x - x_0\| \rightarrow 0$ rezultă $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$. Atunci $f(x_0 + \varepsilon y) - f(x_0) \rightarrow 0$ când $\varepsilon \rightarrow 0$, deoarece $\|x_0 + \varepsilon y - x_0\| = \|\varepsilon y\| = |\varepsilon| \cdot \|y\| \rightarrow 0$, aceasta oricare ar fi $y \in X$.

Desigur, reciproca nu este adevărată, așa încât continuitatea definită cu ajutorul unei norme restrânge clasa funcționalelor radial continue din X la o subclasă a acesteia. Se pun atunci mai multe probleme:

Câte norme sînt posibile într-un spațiu vectorial și cum se pot ele construi? Ce efect are schimbarea normei asupra clasei funcționalelor continue din acel spațiu?

În cele ce urmează vom face cîteva observări imediate, în legătură cu aceste probleme.

1. Orice normă este radial continuă în X . Într-adevăr, $\|x_0 + \varepsilon y\| \leq \|x_0\| + \|\varepsilon y\|$, $\|x_0 + \varepsilon y\| - \|x_0\| \leq |\varepsilon| \cdot \|y\|$, de unde rezultatul.
2. Orice funcțională subaditivă continuă în originea 0 , în raport cu norma $\|x\|$ este continuă în tot spațiul X în raport cu aceeași normă. Într-adevăr, scriind:

$$x' = x + (x' - x), \quad f(x') \leq f(x) + f(x' - x)$$

$$x = x' + (x - x'), \quad f(x) \leq f(x') + f(x - x'),$$

găsim :

$$-f(x - x') \leq f(x') - f(x) \leq f(x' - x).$$

Deoarece $f(x)$ este continuă în θ , din $\|x' - x\| < \varepsilon$ rezultă $f(x' - x) < \eta(\varepsilon)$, $f(x - x') < \eta(\varepsilon)$, unde $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ când $\varepsilon \rightarrow 0$. Deci, $f(x') - f(x) \rightarrow 0$ când $\|x' - x\| \rightarrow 0$.

Rezultă că o funcțională subaditivă care nu este continuă în X este în mod sigur discontinuă și în punctul θ .

3. Să considerăm acum, în spațiul vectorial X , normat cu o primă normă $\|x\|$, o a doua normă $N(x)$. Privită ca o funcțională a spațiului X , $N(x)$ poate să fie sau nu continuă în raport cu norma inițială $\|x\|$.

Pentru ca $N(x)$ să fie continuă în raport cu $\|x\|$, este necesar și suficient ca $N(x)$ să fie mărginită pe sfera-unitate $\|x\| = 1$.

Condiția este necesară. Într-adevăr, dacă ar exista șirul $\xi_n \in X$, $\|\xi_n\| = 1$, $N(\xi_n) \rightarrow \infty$, să notăm $x_n = \frac{\xi_n}{\sqrt{N(\xi_n)}}$. Avem $N(x_n) = \sqrt{N(\xi_n)}$

$\rightarrow \infty$, $\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{N(\xi_n)}} \rightarrow 0$, deci $N(x)$ nu ar fi continuă în θ , contrar ipotezei.

Condiția este suficientă. Dacă $N(\xi) < M$ pentru orice $\|\xi\| = 1$, atunci oricare ar fi șirul $x_n = t \xi_n$, $\|\xi_n\| = 1$, $t_n > 0$, avem $N(x_n) = t_n N(\xi_n) < M t_n = M \|x_n\|$; deci, $N(x_n) \rightarrow 0$ când $\|x_n\| \rightarrow 0$ și funcționala subaditivă $N(x)$ continuă în θ ; deci, este continuă peste tot în X .

4. Dacă norma $N(x)$ este continuă în raport cu norma inițială $\|x\|$, funcțiile continue relativ la normă $N(x)$ sînt continue și în raport cu norma inițială. Avem prin ipoteză $N(x) < \varepsilon'$, când $\|x\| < \eta(\varepsilon')$. Mai presupunem :

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ pentru } N(h) < \eta(\varepsilon).$$

Rezultă de aici că, luînd $\|h\| < \eta_1[\eta(\varepsilon)]$, avem $N(h) < \eta(\varepsilon)$ și $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$; deci, funcționala f este continuă și în raport cu norma inițială.

Prin schimbarea normei inițiale $\|x\|$ în $N(x)$, continuă relativ la norma inițială, nu obținem deci o lărgire a clasei funcționalelor continue din X , dar putem obține o restrîngere a acestei clase. Dacă avem :

$$N(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x\| \rightarrow 0,$$

rezultă că cele două norme sînt echivalente în ceea ce privește definiția funcționalelor continue din X .

Deci, se poate obține o lărgire a clasei funcționalelor continue din X numai dacă în locul normei $\|x\|$ introducem o normă $N(x)$ discontinuă în raport cu $\|x\|$. Deci, $N(x)$ va fi discontinuă în θ și această discontinuitate nu se va manifesta radial, orice normă fiind radial continuă. Se pune aici problema determinării claselor de norme echivalente din X , precum și a claselor de funcționale continue care le corespund. Acestea formează o structură în sensul lui G. Birkhoff [2], încadrîndu-se în structura metricelor posibile într-un spațiu metrizabil.

5. Ca exemplu, să considerăm spațiul C , format de funcțiile $x(t)$, continue pentru $0 \leq t \leq 1$, normat inițial cu :

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \leq 1.$$

Față de această normă inițială, norma :

$$N(x) = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

este discontinuă, după cum se poate observa cu ușurință considerînd șirul $x_n(t)$, unde :

$$x_n \left(\frac{1}{2} \right) = 1, \quad x_n(t) = 0 \text{ pentru } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ și } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1,$$

funcția $x_n(t)$ variînd linear în intervalele rămase. Într-adevăr, avem $\|x_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, însă $N(x_n) = 1$. Se știe că față de norma $\|x\|$, expresia generală a funcționalelor lineare continue din C va fi :

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt, \quad \int_0^1 |\alpha(t)|^q dt < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

și atunci cînd trecem la norma $N(x)$, utilizată curent în spațiul C , clasa funcționalelor lineare continue se lărgeste, cuprinzînd funcționalele de forma mai generală :

$$f(x) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t), \quad V[\alpha(t)] < \infty.$$

Acest exemplu ne mai arată posibilitatea unei infinități de norme, distincte în același spațiu vectorial, corespunzînd alegerii numărului $p \leq 1$. Mai mult, putem observa că

$$N_1(x) = \int_1^\infty \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} d\varphi(p)$$

este o normă în spațiul C , oricare ar fi funcția $\varphi(p)$, nedescrescătoare și cu variație mărginită în intervalul infinit de integrare. Această proprietate rezultă din observarea că o combinație lineară cu coeficienți pozitivi, de funcții subaditive, este tot o funcție subaditivă.

În mod general, dacă $N_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sînt norme ale spațiului X , și $N(x) = \sum \lambda_i N_i(x)$, unde $\lambda_i > 0$, este o normă a spațiului X . De altfel, pozitivitatea constantelor λ_i nu este o condiție necesară pentru subaditivitatea acestei sume.

6. Relativ la problema construirii diferitelor norme posibile într-un spațiu vectorial, se știe că ea revine la construcția corpurilor convexe din X (Ascoli) [3], (Mazur) [4]. Dacă $\|x\|$ este o normă, mulțimea punctelor $x \in X$ pentru care $\|x\| = 1$, numită sfera unitate din X , trebuie să fie convexă în X , să admită ca centru punctul 0 și să nu treacă prin acest punct (căci $\|0\| = 0$). Aceste condiții sînt necesare și suficiente pentru ca $\|x\|$ să fie o normă, ceea ce rezultă cu ușurință din axiomele normei.

Ne punem aici întrebarea, dacă într-un spațiu vectorial X , există norme $N(x)$, care să fie funcționale analitice de x , în sensul lui A. Taylor [5], astfel încît să existe diferențiala lui Gâteaux :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(x + \varepsilon y) - N(x)}{\varepsilon} = \delta_y N(x), \quad y \in X,$$

unde ε ia valori complexe. Observăm cu ușurință că :

Nici o normă $N(x)$ nu este analitică în punctul 0.

Într-adevăr, în caz contrar, se știe că $N(x)$ ar admite dezvoltarea :

$$N(x) = A_0 + A_1(x) + \dots + A_n(x) + \dots,$$

unde $A_n(x)$ este o funcțională polinomială omogenă de grad n . Am avea, pentru $t > 0$, $N(tx) = A_0 + tA_1(x) + \dots + t^n A_n(x) + \dots = tN(x)$, de unde $A_0 = 0$, $A_n = 0$ pentru $n \geq 2$; deci $N(x) = A_1(x)$. Avem însă $N(x) = N(-x)$; deci, $A_1(x) = A_1(-x) = -A_1(x)$, și $A_1(x) = 0$, $N(x) = 0$.

Originea 0 este deci un punct singular pentru orice normă analitică $N(x)$. Vom putea însă construi norme analitice în $X - 0$, prin dezvoltări

$$N(x) = N(x_0) + \delta N(x_0; x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} \delta^n N(x_0; x - x_0) + \dots$$

unde rămîne ca termenii dezvoltării să fie aleși astfel încît toate axiomele normei să fie verificate. O astfel de normă este aceea uzitată în spațiul

L^p . Se constată cu ușurință că $\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$ este o funcțională anali-

tică de x , cu excepția punctului 0, și avem $\delta_p \|x\| = \|x\|^{1-p} \int_0^1 |x|^{p-2} xy$.

De altfel, se știe că, în orice punct x , există derivate la dreapta și la stînga (Mazur) [4]; există exemple de norme peste tot neanalitice în X .

BIBLIOGRAFIE

1. M. Fréchet, *La notion de différentielle dans l'Analyse générale*. Annales de l'École norm. sup. **42**, (1925), 293—323.
2. G. Birkhoff, *On the combination of topologies*. Fundam. math. **26**, (1936), 156.
3. G. Ascoli, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*. Annali di matem., **10**, 1932, 33, 203.
4. S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*. Studia matem., (1933), **4**, 70—84.
5. A. Taylor, *Analytic functions in general Analysis*. Annali della R. Scuola norm., Pisa, **6**, (1937), 277—292.

SUR LA STRUCTURE DES CONDITIONS D'UNIVALENCE D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN CERCLE

BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. **1(49)**, 3 (1957), 251—258

(Communication au Congrès des mathématiciens roumains. Bucarest, mai—juin 1956)

Le problème des fonctions univalentes dans un domaine à frontière circulaire est, parmi les problèmes spéciaux concernant les fonctions analytiques, l'un de ceux qui ont suscité de nombreuses recherches dans les 30 dernières années. Ce problème se pose de deux manières équivalentes, en partant de l'une ou l'autre des définitions suivantes :

I. Appelons S la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle-unité, dont le développement est de la forme

$$\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

II. Appelons Σ la classe des fonctions holomorphes à l'extérieur du cercle-unité, en exceptant le point ∞ qui est un pôle simple, univalentes pour $|z| > 1$ et de la forme

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \dots$$

On passe de S à Σ , ou inversement, par des transformations simples, ce qui permet de se borner à l'étude de l'une de ces deux classes. Les propriétés de ces fonctions, connues aujourd'hui, sont assez diverses et assez nombreuses.

Nous voulons indiquer ici des considérations qui ont permis d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients α pour que $f(z)$ appartienne à la classe Σ . Le problème correspondant pour la classe S se ramène au précédent, en posant par exemple

$$f(z) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Le premier résultat remarquable concernant les coefficients α d'une fonction de la classe Σ fut le théorème de l'aire de L. Bieberbach (1919), qui s'exprime par l'inégalité

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1.$$