

DESPRE DOMENIILE UNIVALENTE

DE

G. CĂLUGĂREANU

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

*Comunicare prezentată în Sesiunea științifică a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.
din 18—21 decembrie 1954*

Considerațiile de mai jos au pornit de la încercarea de a caracteriza, din punct de vedere analitic, transformările univalente ale unui domeniu plan. Fie

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y),$$

o transformare continuă într-un domeniu d . Care sînt condițiile ce urmează a fi verificate de funcțiile X și Y , pentru ca transformarea să schimbe domeniul d într-un domeniu D univalent adică cu acoperire simplă? Vom obține aceste condiții, dacă știm să caracterizăm geometric univalența unui domeniu plan, cu ajutorul unor constante metrice legate de forma acelui domeniu.

Reluînd terminologia utilizată de noi într-o lucrare anterioară [1], vom numi domeniu riemannian (sau cu acoperire multiplă) un domeniu plan D așternut pe o suprafață Riemann, obținută prin suprapunerea mai multor plane, între care se stabilește o comunicație cu ajutorul unor tăieturi făcute de-a lungul unor arce de curbe. Fie acum D_1 cea mai mare mulțime deschisă, care se găsește acoperită o singură dată de domeniul D ; fie D_2 cea mai mare mulțime deschisă acoperită de două ori de domeniul D etc. Vom scrie simbolic

$$D \sim D_1 + 2 D_2 + \dots + n D_n + \dots,$$

făcînd abstracție de frontierele domeniilor. Dacă D_n este vidă pentru $n > p$, însă $D_p \neq 0$, vom spune că D este un domeniu p -valent. Într-un punct $M \in D_q$ valența locală este q . Să considerăm funcția

$$f(\lambda, M_1) = K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_D e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2, \quad K = \frac{\alpha}{2\pi \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} = \frac{1}{\pi \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)},$$

unde integrala se extinde pe întreg domeniul D , $d\omega_2$ este elementul de arie conținînd punctul curent M_2 , r_{12} este distanța punctelor M_1 și M_2 , α este o constantă pozitivă, iar λ un parametru pozitiv, care va crește indefinit. Fie γ

un cerc cu centrul M_1 și de rază ρ . Avem, extinzînd integrala pe acest cerc,

$$K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{\gamma} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_0^{\lambda \rho^{\alpha}} e^{-t} t^{\frac{2}{\alpha}-1} dt \quad (t = \lambda r_{12}^{\alpha}).$$

Făcînd aici $\rho \rightarrow \infty$, și notînd cu Π planul simplu XOY , se vede că

$$K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{\Pi} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 = 1$$

oricare ar fi valoarea parametrului λ . Lăsînd însă ρ fix și făcînd $\lambda \rightarrow \infty$, avem

$$K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{\gamma} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

oricît de mică ar fi raza ρ a cercului γ . Integrala noastră este deci singulară. Dacă $M_1 \in D_q$, putem alege raza ρ , așa încît cercul γ să fie acoperit de q ori de domeniul D , deci vom avea

$$f(\lambda, M_1) = q K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{\gamma} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 + K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{D-q\gamma} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 = \frac{q}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_0^{\lambda \rho^{\alpha}} e^{-t} t^{\frac{2}{\alpha}-1} dt + \\ + K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{D-q\gamma} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2.$$

Am notat aici cu $q\gamma$ domeniul γ acoperit de q ori, și cu $D - q\gamma$ domeniul D din care s-au scos q discuri γ . Domeniul D fiind presupus cu valența p , avem

$$K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{D-q\gamma} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 < p K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{\Pi-\gamma} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 = p \left[1 - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_0^{\lambda \rho^{\alpha}} e^{-t} t^{\frac{2}{\alpha}-1} dt \right],$$

de unde rezultă că avem

$$f(\lambda, M_1) \rightarrow q, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Fie D'_q un domeniu interior lui D_q , a cărui frontieră este la distanța ρ de frontiera lui D_q . Pentru $M_1 \in D'_q$, $f(\lambda, M_1)$ tinde uniform către q , cînd $\lambda \rightarrow \infty$. Dacă însă $M_1 \in D_q - D'_q$, cercul γ taie frontiera domeniului D_q .

Vom ține seama că avem $0 < f(\lambda, M_1) < p$, oricare ar fi punctul M_1 și oricare ar fi $\lambda > 0$, căci

$$f(\lambda, M_1) < K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{p\Pi} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_2 = p.$$

Să considerăm funcția

$$g(\lambda) = \int_D f(\lambda, M_1) d\omega_1 = \int_{D'} f(\lambda, M_1) d\omega_1 + \int_{D-D'} f(\lambda, M_1) d\omega_1.$$

Am notat aici $D' = D'_1 + 2D'_2 + \dots + pD'_p$. Deoarece în D' avem uniform $f(\lambda, M_1) \rightarrow q$, pentru $\lambda \rightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{D'} f(\lambda, M_1) d\omega_1 = \int_{D'} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda, M_1) d\omega_1 = \int_{D'} q d\omega_1 = \sum q^2 A'_q$$

notînd cu A'_q aria domeniului D'_q . Presupunînd că domeniul D este măsurabil în sens Jordan, și notînd cu A aria sa, iar cu A_q aria domeniului D_q , avem $A = A_1 + 2A_2 + \dots + pA_p$. Atunci cînd facem $\rho \rightarrow 0$, aria domeniului $D - D'$ va tinde la zero, și deoarece $f(\lambda, M_1) < p$, se vede că

$$\int_{D-D'} f(\lambda, M_1) d\omega_1 < p m(D-D') \rightarrow 0.$$

Așadar

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_D \int_D e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_1 d\omega_2 = \sum_{q=1}^p q^2 A_q.$$

Pentru omogenitate, să notăm cu δ diametrul domeniului D , apoi să punem

$$\lambda = \frac{t}{\delta^{\alpha}}. \text{ Obținem}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K t^{\frac{2}{\alpha}} \int_D \int_D e^{-t \left(\frac{r_{12}}{\delta}\right)^{\alpha}} d\omega_1 d\omega_2 = \delta^2 \sum q^2 A_q.$$

Să revenim la

$$g(\lambda) = K \int_D \int_D \lambda^{\frac{2}{\alpha}} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} d\omega_1 d\omega_2, \quad g'(\lambda) = K \int_D \int_D e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} \lambda^{\frac{2}{\alpha}-1} \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda r_{12}^{\alpha} \right) d\omega_1 d\omega_2$$

și să descompunem ultima integrală sub forma

$$\int_D \int_D = \int_D \int_D \left(r_{12}^{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha\lambda} \right) + \int_D \int_D \left(\frac{1}{\alpha\lambda} < r_{12}^{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha\lambda} \right) + \int_D \int_D \left(\frac{2}{\alpha\lambda} < r_{12}^{\alpha} \leq \delta^{\alpha} \right),$$

unde am notat cu δ diametrul domeniului D . Avem

$$\int_D \int_D > \int_D \int_D \left(r_{12}^{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha\lambda} \right) + 0 - \int_D d\omega_1 \int_{\Pi} e^{-\lambda r_{12}^{\alpha}} \lambda^{\frac{2}{\alpha}-1} \left(\lambda r_{12}^{\alpha} - \frac{2}{\alpha} \right) d\omega_2.$$

$$\frac{2}{\alpha\lambda} \leq r_{12}^{\alpha} < \infty.$$

Apoi

$$\int_{\Pi} e^{-\lambda r^{\alpha}} \lambda^{\frac{2}{\alpha}-1} \left(\lambda r^{\alpha} - \frac{2}{\alpha} \right) r dr d\theta = 2\pi \lambda^{\frac{2}{\alpha}-1} \int_{\left(\frac{2}{\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} e^{-\lambda r^{\alpha}} \left(\lambda r^{\alpha} - \frac{2}{\alpha} \right) r dr = \\ = \frac{2\pi}{\alpha\lambda} \int_{\frac{2}{\alpha}}^{\infty} e^{-t} \left(t - \frac{2}{\alpha} \right) t^{\frac{2}{\alpha}-1} dt < \frac{2\pi}{\alpha\lambda} \int_{\frac{2}{\alpha}}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{2}{\alpha}} dt = \frac{2\pi}{\alpha\lambda} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right),$$

$$\int_D \int_D \left(r_{12}^{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha\lambda} \right) > \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha\lambda}} \lambda^{\frac{2}{\alpha}-1}.$$

Rezultă

$$\pi \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) g'(\lambda) > \frac{1}{\alpha \lambda} \left[e^{-\frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{2}{\alpha}}} - 2 \pi A \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) \right].$$

Pentru $\lambda > \sqrt[e]{\frac{2\pi A \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)}{1}}^{\frac{\alpha}{2}}$, vom avea deci $g'(\lambda) > 0$. Funcția $g(\lambda)$ este crescătoare pentru $\lambda > \Lambda$. Se vede acum că vom avea $g(\lambda) < A$ numai atunci când domeniul D este univalent. Dacă D este mărginit și univalent, avem $f(\lambda, M_1) < 1$, oricare ar fi $\lambda > 0$, căci

$$f(\lambda, M_1) < K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_{\Pi} e^{-\lambda r_{12}^{\frac{\alpha}{2}}} d\omega_2 = 1.$$

Iar dacă D este multivalent, avem $\sum q^2 A_q > \sum q A_q = A$, și vom avea $g(\lambda) > A$, pentru λ destul de mare.

După înlocuirea $\lambda = \frac{t}{\delta^\alpha}$, avem deci în cazul domeniului univalent

$$K t^{\frac{2}{\alpha}} \int_{D \cdot D} e^{-t \left(\frac{r_{12}}{\delta}\right)^\alpha} d\omega_1 d\omega_2 < \delta^2 A,$$

$$\int_D \int_D e^{-t \left(\frac{r_{12}}{\delta}\right)^\alpha} d\omega_1 d\omega_2 < \pi \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) A \delta^2 t^{-\frac{2}{\alpha}}, t > 0.$$

Deoarece funcția $g(\lambda)$ este crescătoare pentru $\lambda > \Lambda$, este suficient să scriem această inegalitate pentru un șir crescător la infinit de valori oarecare ale lui t . Dezvoltând exponențiala, și notînd

$$\delta_n = \left(\frac{1}{A^2} \int_D \int_D r_{12}^n d\omega_1 d\omega_2 \right)^{\frac{1}{n}},$$

avem

$$1 - \frac{t}{1!} \left(\frac{\delta_\alpha}{\delta}\right)^\alpha + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{\delta_{2\alpha}}{\delta}\right)^{2\alpha} - \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\delta_{n\alpha}}{\delta}\right)^{n\alpha} +$$

$$+ \dots < \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) t^{-\frac{2}{\alpha}}, t = t_1, t_2, \dots$$

$t_1, t_2, \dots$ fiind un șir de valori crescătoare indefinit.

Constantele δ_n , legate de forma domeniului D , se pot numi *diametri medii* de diferite ordine, ai acestui domeniu. Se știe că șirul δ_n este crescător cu n , și avem $\delta_n \rightarrow \delta$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Avem mai sus un sistem de condiții necesare și suficiente pentru univalența domeniului D . Sînt o infinitate de inegalități care leagă diametrii domeniului D . Întrucît constanta α se poate alege oricît de mare, se vede că șirul diametrelor este astfel supus unor condiții asimptotice, nici un diametru de ordin finit al domeniului D nefiind supus la vreo restricție. De asemenea,

dintre condițiile în număr infinit, de mai sus, putem suprima oricare condiție dorim.

Dacă însă considerăm numerele

$$\xi_n = \left(\frac{\delta_n}{\delta}\right)^n = \frac{1}{A^2 \delta^n} \int_D \int_D r_{12}^n d\omega_1 d\omega_2 < 1, \quad \xi_n = \frac{1}{A^2} \int_D \int_D \left(\frac{r_{12}}{\delta}\right)^n d\omega_1 d\omega_2$$

ca niște coordonate ale domeniului D , obținem condițiile liniare

$$1 - \xi_\alpha \frac{t}{1!} + \xi_{2\alpha} \frac{t^2}{2!} - \dots + (-1)^n \xi_{n\alpha} \frac{t^n}{n!} + \dots < \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) t^{-\frac{2}{\alpha}}, t = t_1, t_2, \dots$$

În spațiul $(\xi_\alpha, \xi_{2\alpha}, \dots, \xi_{n\alpha}, \dots)$, aceste inegalități definesc un domeniu convex, înfășurat de planele corespunzătoare, în care trebuie să se găsească punctul $(\xi_\alpha, \xi_{2\alpha}, \dots)$, pentru ca domeniul D să fie univalent.

Considerații cu totul analoge se pot face pentru domeniile din spațiul cu 3 dimensiuni. Vom avea în acest caz

$$f(\lambda, M_1) = \frac{3\lambda^{\frac{3}{\alpha}}}{4\pi \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\right)} \int_D e^{-\lambda r_{12}^{\frac{\alpha}{3}}} dv_2 \rightarrow q, \lambda \rightarrow \infty,$$

$$g(\lambda) = \frac{3\lambda^{\frac{3}{\alpha}}}{4\pi \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\right)} \int_D \int_D e^{-\lambda r_{12}^{\frac{\alpha}{3}}} dv_1 dv_2 \rightarrow V_1 + 2^2 V_2 + \dots + p^2 V_p$$

și $g(\lambda) < V, \lambda > 0$ va caracteriza domeniile univalente. Notînd

$$\delta_\alpha = \left(\frac{1}{V^2} \int_D \int_D r_{12}^\alpha dv_1 dv_2 \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

vom avea în acest caz

$$1 - \frac{t}{1!} \left(\frac{\delta_\alpha}{\delta}\right)^\alpha + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{\delta_{2\alpha}}{\delta}\right)^{2\alpha} - \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\delta_{n\alpha}}{\delta}\right)^{n\alpha} +$$

$$+ \dots < \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha}\right) t^{-\frac{3}{\alpha}}, t = t_1, t_2, \dots$$

Considerații analoge putem face și în cazul altor integrale singulare. Să alegem, de exemplu,

$$f(n, M_1) = \frac{2}{\pi \delta^2} \int_D \frac{\sin(2n+1) \frac{\pi r_{12}^2}{2\delta^2}}{2 \sin \frac{\pi r_{12}^2}{2\delta^2}} d\omega_2 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta_2 \int_0^{\frac{\pi R_1^2}{2\delta^2}} \frac{\sin(2n+1) t}{2 \sin t} dt.$$

Am ales aici originea sistemului de coordonate polare în M_1 și am notat cu $R_1 = R_1(\theta_2)$ ecuația curbei, frontieră a domeniului D . Dacă M_1 este interior domeniului D , avem $R_1(\theta_2) \geq \rho > 0$, și

$$\int_0^{\frac{\pi \rho^2}{2\delta^2}} \frac{\sin(2n+1)t}{2 \sin t} dt \rightarrow \frac{\pi}{4}, \int_{\frac{\pi \rho^2}{2\delta^2}}^{\frac{\pi R_1^2}{2\delta^2}} \frac{\sin(2n+1)t}{2 \sin t} dt \rightarrow 0, \text{ pentru } n \rightarrow \infty,$$

așadar

$$f(n, M_1) \rightarrow q_1, n \rightarrow \infty,$$

unde q_1 este valența locală a domeniului D în punctul M_1 convergența fiind uniformă în orice domeniu D' complet interior domeniului D , a cărui frontieră este la distanța pozitivă de frontiera lui D . Avem însă

$$f(n, M_1) = \frac{2}{\pi \delta^2} \int_D \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi r_{12}^2}{\delta^2} + \cos 2 \frac{\pi r_{12}^2}{\delta^2} + \dots + \cos n \frac{\pi r_{12}^2}{\delta^2} \right) d\omega_2$$

deci

$$\frac{\pi \delta^2}{2} q_1 = \frac{A}{2} + \int_D \cos \frac{\pi r_{12}^2}{\delta^2} d\omega_2 + \dots + \int_D \cos n \frac{\pi r_{12}^2}{\delta^2} d\omega_2 + \dots$$

Așadar, seria din membrul II este convergentă și reprezintă valența locală q_1 , afară de un factor, în fiecare punct M_1 al domeniului D . Nu am reușit încă să stabilim legitimitatea unei noi integrări, termen cu termen, în domeniul D , în raport cu punctul M_1 . Aceasta ar conduce la o condiție unică, necesară și suficientă pentru univalența domeniului D și aceasta ar fi

$$\frac{\pi \delta^2}{2} A - \frac{A^2}{2} = \int_D \int_D \cos \frac{\pi r_{12}^2}{\delta^2} d\omega_1 d\omega_2 + \dots + \int_D \int_D \cos n \frac{\pi r_{12}^2}{\delta^2} d\omega_1 d\omega_2 + \dots,$$

în timp ce, pentru orice domeniu multivalent, seria din membrul II ar avea o sumă mai mare decât membrul I.

O altă alegere a coordonatelor care definesc domeniul D ne conduce însă la un sistem de condiții finite, necesare și suficiente pentru univalența domeniului D . Să reluăm condiția

$$K \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \int_D \int_D e^{-\lambda r_{12}^{\frac{2}{\alpha}}} d\omega_1 d\omega_2 < A, \lambda > 0,$$

în care să facem $\alpha = 2$. Avem

$$\frac{1}{\pi} \int_D \int_D \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_1 d\omega_2 < A, \lambda > 0.$$

Punînd aici $A = \pi R^2$, $\lambda = \frac{t}{R^2}$, obținem

$$\int_D \int_D t e^{-t \left(\frac{r_{12}}{R} \right)^2} d\omega_1 d\omega_2 < \pi^2 R^4 = A^2 = \int_D \int_D d\omega_1 d\omega_2, \\ \int_D \int_D \left[1 - t e^{-t \left(\frac{r_{12}}{R} \right)^2} \right] d\omega_1 d\omega_2 > 0, t > 0.$$

Să observăm că dacă $\varphi(t)$ este o funcție pentru care

$$\mu_v = \int_0^\infty e^{-ht} t^v \varphi(t) dt,$$

are sens cînd $h > 0$, iar v este întreg pozitiv, condiția necesară și suficientă pentru ca să avem $\varphi(t) \geq 0$, pentru $t > 0$ este ca

$$\int_0^\infty e^{-ht} \varphi(t) [P(t)]^2 dt > 0,$$

oricare ar fi polinomul $P(t)$. Avem aici o formă pătratică în raport cu coeficienții polinomului $P(t)$, care trebuie să fie pozitivă. Rezultă condițiile necesare și suficiente pentru $\varphi(t) \geq 0$, $t > 0$, sub forma

$$\mu_0 > 0, \mu_{2n} > 0, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Este suficient ca aceste condiții să fie verificate pentru o singură valoare pozitivă a lui h , valoare pe care o putem alege după voie. Aplicînd mai sus obținem, permutarea integrărilor fiind legitimă,

$$\mu_v = \int_0^\infty e^{-ht} t^v \int_D \int_D \left[1 - t e^{-t \left(\frac{r_{12}}{R} \right)^2} \right] d\omega_1 d\omega_2 = \int_D \int_D \left[\frac{v!}{h^{v+1}} - \frac{(v+1)!}{\left[h + \frac{r_{12}^2}{R^2} \right]^{v+2}} \right] d\omega_1 d\omega_2$$

Notînd

$$I_v = \frac{1}{h A^2} \int_D \int_D \left(\frac{h R^2}{h R^2 + r_{12}^2} \right)^{v+2} d\omega_1 d\omega_2$$

obținem

$$\mu_v = \frac{v! A^2}{h^{v+1}} [1 - (v+1) I_v].$$

Pentru integralele I_v , obținem inegalități în termeni finiți. Astfel, $\mu_{2n} > 0$ ne dă, oricare ar fi $h > 0$,

$$I_{2n} < \frac{1}{2n+1},$$

apoi avem

$$\begin{vmatrix} 1 - I_0 & 1 - 2 I_1 \\ 1 - 2 I_1 & 2 - 6 I_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 1 - I_0 & 1 - 2 I_1 & 1 - 3 I_2 \\ 1 - 2 I_1 & 2 - 6 I_2 & 3 - 12 I_3 \\ 1 - 3 I_2 & 3 - 12 I_3 & 6 - 20 I_4 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Luînd $h = \pi$, putem scrie

$$I_v = \frac{1}{\pi A^2} \int_D \int_D \left(\frac{A}{A + r_{12}^2} \right)^{v+2} d\omega_1 d\omega_2.$$

ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Возвращаясь к объекту одной из своих предыдущих работ, автор характеризует плоские и пространственные однолистные области бесконечной системой неравенств, требующих введения ряда метрических постоянных, связанных с соответствующей областью, и называет эти постоянные средними диаметрами порядка n . Другой подбор этих переменных приводит к системе конечных условий, характеризующих однолистные области.

SUR LES DOMAINES UNIVALENTS

(RÉSUMÉ)

En reprenant un de ses travaux antérieurs, l'Auteur arrive à caractériser les domaines univalents du plan et de l'espace, par un système infini d'inégalités faisant intervenir une suite de constantes métriques attachées à ce domaine, constantes qu'il appelle diamètres moyens d'ordre n . Un autre choix de ces constantes conduit à un système de conditions finies, caractérisant les domaines univalents.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Călugăreanu, *Despre valența domeniilor riemanniene*, în *Lucrările Sesiunii generale științifice din 2-12 iunie 1950*, Ed. Acad. R.P.R., București, 1951, p. 195-203.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE
DES RÉGIONS DU PLAN

PAR

G. CĂLUGĂREANU

Les considérations qui suivent ont eu pour point de départ la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une transformation continue du plan

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y). \quad (1)$$

Supposons les fonctions X et Y définies et continues sur une région (domaine D avec sa frontière) bornée du plan xOy , région que nous désignons par $\bar{D}$. De plus, supposons que la transformation (1) possède un jacobien continu et non-identiquement nul dans $\bar{D}$. L'étude de l'ensemble qui résulte de $\bar{D}$ par une telle transformation nous impose d'envisager la notion d'ensemble *multivalent*, ainsi qu'une opération sur les ensembles que nous appelons *superposition*.

Nous appelons ensemble multivalent un ensemble dont certains points sont conçus comme des points multiples. Si, en M , l'ensemble E a q points superposés, la *valence* de E au point M est égale à q . La superposition de deux ensembles E et E_1 est la réunion $E \cup E_1$ où l'on donne à chaque point une valence égale à la somme des valences de ce point dans E et E_1 respectivement. Si un point M quelconque n'appartient pas à E , on prend la valence de E égale à 0 au point M . On peut désigner la superposition de E et E_1 par $E \cup E_1$. On voit que la superposition de deux ensembles univalents et disjoints coïncide avec leur réunion.

Revenons à la transformation (1). Elle applique $\bar{D}$ sur un continu R du plan XOY , qui pourra couvrir plusieurs fois certains points de ce plan. Un pareil continu résulte toujours de la superposition de plusieurs semi-continus univalents (M est un semi-continu si, a et b étant deux points quelconques de M , il existe un continu appartenant à M , qui joint a à b). Appelons *région riemannienne* un pareil continu R .