

ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Возвращаясь к объекту одной из своих предыдущих работ, автор характеризует плоские и пространственные однолистные области бесконечной системой неравенств, требующих введения ряда метрических постоянных, связанных с соответствующей областью, и называет эти постоянные средними диаметрами порядка n . Другой подбор этих переменных приводит к системе конечных условий, характеризующих однолистные области.

SUR LES DOMAINES UNIVALENTS

(RÉSUMÉ)

En reprenant un de ses travaux antérieurs, l'Auteur arrive à caractériser les domaines univalents du plan et de l'espace, par un système infini d'inégalités faisant intervenir une suite de constantes métriques attachées à ce domaine, constantes qu'il appelle diamètres moyens d'ordre n . Un autre choix de ces constantes conduit à un système de conditions finies, caractérisant les domaines univalents.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Călugăreanu, *Despre valența domeniilor riemanniene*, în *Lucrările Sesiunii generale științifice din 2-12 iunie 1950*, Ed. Acad. R.P.R., București, 1951, p. 195-203.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE
DES RÉGIONS DU PLAN

PAR

G. CĂLUGĂREANU

Les considérations qui suivent ont eu pour point de départ la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une transformation continue du plan

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y). \quad (1)$$

Supposons les fonctions X et Y définies et continues sur une région (domaine D avec sa frontière) bornée du plan xOy , région que nous désignons par $\bar{D}$. De plus, supposons que la transformation (1) possède un jacobien continu et non-identiquement nul dans $\bar{D}$. L'étude de l'ensemble qui résulte de $\bar{D}$ par une telle transformation nous impose d'envisager la notion d'ensemble *multivalent*, ainsi qu'une opération sur les ensembles que nous appelons *superposition*.

Nous appelons ensemble multivalent un ensemble dont certains points sont conçus comme des points multiples. Si, en M , l'ensemble E a q points superposés, la *valence* de E au point M est égale à q . La superposition de deux ensembles E et E_1 est la réunion $E \cup E_1$ où l'on donne à chaque point une valence égale à la somme des valences de ce point dans E et E_1 respectivement. Si un point M quelconque n'appartient pas à E , on prend la valence de E égale à 0 au point M . On peut désigner la superposition de E et E_1 par $E \cup E_1$. On voit que la superposition de deux ensembles univalents et disjoints coïncide avec leur réunion.

Revenons à la transformation (1). Elle applique $\bar{D}$ sur un continu R du plan XOY , qui pourra couvrir plusieurs fois certains points de ce plan. Un pareil continu résulte toujours de la superposition de plusieurs semi-continus univalents (M est un semi-continu si, a et b étant deux points quelconques de M , il existe un continu appartenant à M , qui joint a à b). Appelons *région riemannienne* un pareil continu R .

Nous dirons qu'un point P est *intérieur* à R s'il existe un cercle de centre P dont chaque point est couvert q fois exactement par R , avec $q > 0$. Dans ces conditions, $q = q(P, R)$ sera appelé la *valence locale* de R en P , ce nombre entier pouvant être infini.

L'univalence de la transformation (1) dans D revient à exprimer que la valence locale en chaque point intérieur à R est égale à 1.

L'ensemble des points intérieurs à R , que nous désignerons par $I(R)$, étant ouvert, ce qui résulte immédiatement de sa définition, peut être décomposé sous la forme

$$I(R) = G_1 + 2G_2 + 3G_3 + \dots + qG_q + \dots$$

en désignant par G_q des ensembles ouverts univalents, et par qG_q la superposition de q ensembles identiques à G_q .

Si $G_q = 0$ pour $q > p$, mais $G_p \neq 0$, nous dirons que R est une région p -valente. Considérons la fonction

$$f(\lambda, M_1) = \frac{1}{\pi} \int_R \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2, \quad (2)$$

où λ est un paramètre positif, M_1 un point du plan, M_2 un point courant de R , $d\omega_2$ est l'élément d'aire contenant M_2 , r_{12} la distance $M_1 M_2$, l'intégrale étant prise sur R (au sens de Lebesgue si R n'est pas quarrable).

γ étant un cercle de centre M_1 et de rayon ρ , on a, avec $t = \lambda r_{12}^2$

$$\frac{1}{\pi} \int_\gamma \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 = \int_0^{\lambda \rho^2} e^{-t} dt = 1 - e^{-\lambda \rho^2}.$$

Désignons par Π le plan XOY . En faisant $\rho \rightarrow \infty$ on trouve

$$\frac{1}{\pi} \int_\Pi \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 = 1 \quad (3)$$

pour chaque $\lambda > 0$. En laissant ρ fixe et en faisant $\lambda \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{1}{\pi} \int_\gamma \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4)$$

aussi petit que soit le rayon ρ du cercle γ .

Si $M_1 \in G_q$, on peut choisir ρ de manière que le cercle γ soit couvert q fois par R , et

$$f(\lambda, M_1) = q \frac{1}{\pi} \int_\gamma \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 + \frac{1}{\pi} \int_{R-q\gamma} \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2.$$

Nous désignons ici par $R - q\gamma$ la région R dont on a enlevé q disques γ superposés. La région R étant supposée de valence p finie, on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{R-q\gamma} \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 \leq p \frac{1}{\pi} \int_{\Pi-q\gamma} \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 = p \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_\gamma \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 \right],$$

donc

$$\frac{1}{\pi} \int_{R-q\gamma} \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Il résulte ainsi

$$f(\lambda, M_1) \rightarrow q(M_1), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

On voit que si la fonction $f(\lambda, M_1)$ est donnée, on peut reconstituer la région R . En effet: le point M_1 appartient à R si $\lim f > 0$ pour $\lambda \rightarrow +\infty$; lorsque cette limite est un nombre entier q , le point M_1 est intérieur à R et q fois couvert par R ; les points où $\lim f = 0$ n'appartiennent pas à R ; les points où $\lim f(\lambda, M_1)$ n'existe pas, ou n'est pas un entier, sont des points frontière de R .

Mais la fonction $f(\lambda, M_1)$ ne peut être choisie arbitrairement si l'on veut qu'elle corresponde effectivement à une région R . On a, en développant suivant les puissances de λ ,

$$f(\lambda, M_1) = \lambda P_0(M_1) - \frac{\lambda^2}{1!} P_1(M_1) + \dots + (-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} P_n(M_1) + \dots \quad (6)$$

avec

$$P_n(M_1) = \frac{1}{\pi} \int_R r_{12}^{2n} d\omega_2 = \frac{1}{\pi} \int_R [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^n d\omega_2. \quad (7)$$

On voit que $P_n(M_1)$ est un polynôme de degré $2n$ par rapport aux coordonnées x_1 et y_1 du point M_1 . La région R est ainsi caractérisée par une suite de polynômes $P_n(M_1)$ et cette suite contient toutes les propriétés de la région R , puisqu'elle la détermine complètement. En dernière analyse, la région R est caractérisée par une suite numérique: le tableau des coefficients des polynômes $\{P_n(M_1)\}$. On se demande de quelle manière ces coefficients interviennent pour exprimer les diverses propriétés, métriques ou topologiques, de la région R .

Nous supposons que R est une région bornée. On a alors, δ désignant le maximum de r_{12} pour $M_2 \in R$, et A l'aire de R ,

$$|P_n(M_1)| \leq \frac{A \delta^{2n}}{\pi}$$

et (3) nous montre que $f(\lambda, M_1)$ est alors une fonction entière de λ , de genre 1 au plus. En employant des variables complexes, soit z_1 l'affixe de M_1 et z_2 celui de M_2 . On a

$$\begin{aligned} P_n(M_1) &= P_n(z_1, \bar{z}_1) = \frac{1}{\pi} \int_R |z_1 - z_2|^{2n} d\omega_2 = \frac{1}{\pi} \int_R (z_1 - z_2)^n (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^n d\omega_2 = \\ &= \sum_{p,q=0}^n (-1)^{p+q} \binom{n}{p} \binom{n}{q} z_1^p \bar{z}_1^q \alpha_{n-p, n-q} \end{aligned}$$

en posant

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_R z_2^r \bar{z}_2^s d\omega_2. \quad (8)$$

On a $\alpha_{sr} = \bar{\alpha}_{rs}$. La matrice hermitienne infinie $\{\alpha_{rs}\}$ détermine donc R . Remarquons que l'on a, Δ désignant le laplacien,

$$\Delta P_n = 4 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} P_n(M_1) = \frac{4n^2}{\pi} \int_R (z_1 - z_2)^{n-1} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{n-1} d\omega_2 = 4n^2 P_{n-1}.$$

En superposant deux régions R et R^* on obtient une nouvelle région $R^{**} = R \cup R^*$ et l'on voit que $\alpha_{rs}^{**} = \alpha_{rs} + \alpha_{rs}^*$, donc la matrice de R^{**} s'obtient en ajoutant les matrices correspondant à R et R^* .

Mais les constantes α_{rs} dépendent du choix de l'origine dans le plan de R . Il est naturel de chercher à caractériser la région R par une suite de constantes intrinsèques, indépendantes d'un déplacement de R dans son plan. Ceci revient à la recherche des invariants de déplacement des polynômes $P_n(M_1)$.

Dans le cas des polynômes à une variable, le problème des invariants de translation est résolu, et nous avons montré [1] que, $P(x)$ étant un polynôme quelconque de degré n , il lui correspond une suite d'invariants quadratiques (par rapport à ses coefficients)

$$A_p^{(n)} = P^{(n)} P^{(n-2p)} - P^{(n-1)} P^{(n-2p+1)} + \dots + (-1)^h P^{(n-h)} P^{(n-2p+h)} + \dots + \frac{1}{2} (-1)^p [P^{(n-p)}]^2,$$

où $p = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. En effet, on trouve facilement $\frac{d}{dx} A_p^{(n)} \equiv 0$. On forme encore une suite d'invariants cubiques

$$B_p^{(n)} = P^{(n-1)} A_p^{(n)} - P^{(n)} L_p^{(n)}, \quad p = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

avec

$$2L_p^{(n)} = 2 \int A_p^{(n)} dx = (2p+1) P^{(n)} P^{(n-2p-1)} - \dots + (-1)^h (2p-2k+1) P^{(n-h)} P^{(n-2p+h-1)} + \dots + (-1)^p P^{(n-p)} P^{(n-p-1)}.$$

On voit alors que, ces invariants étant donnés, le polynôme $P(x)$ est déterminé à une translation près ($x' = x + h$).

D'une manière analogue, on peut obtenir les invariants de déplacement d'un polynôme à deux variables x et y , mais nous n'entrerons pas ici dans les détails de ce problème, en nous contentant d'indiquer qu'un tel polynôme est déterminé, à un déplacement près, par une suite quadratique, une suite cubique et une suite quartique d'invariants fondamentaux. Pour les poly-

nômes $P_n(M_1)$, on retrouve ces invariants en partant directement des constantes intrinsèques attachées à R

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi^2} \int_R \int_R r_{12}^{2n} d\omega_1 d\omega_2 \\ I_{stu} &= \frac{1}{\pi^3} \int_R \int_R \int_R r_{12}^{2s} r_{23}^{2t} r_{31}^{2u} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ I_{stuv} &= \frac{1}{\pi^4} \int_R \int_R \int_R \int_R r_{12}^{2s} r_{23}^{2t} r_{34}^{2u} r_{41}^{2v} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4. \end{aligned} \quad (9)$$

Ces intégrales multiples, où les points M_1, M_2, M_3, M_4 décrivent indépendamment la région R , sont visiblement des invariants de déplacement de R . Leur expression à l'aide des coefficients α_{rs} n'offre que des difficultés de calcul. On a par exemple

$$I_n = \frac{1}{\pi^2} \int_R \int_R (z_1 - z_2)^n (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^n d\omega_1 d\omega_2 = \sum_{p,q=0}^n (-1)^{p+q} \binom{n}{p} \binom{n}{q} \alpha_{pq} \alpha_{n-p, n-q}$$

et l'on calcule les autres invariants (9) d'une manière analogue. On voit alors que les suites $\{I_n\}$, $\{I_{stu}\}$, $\{I_{stuv}\}$ étant données pour toutes les valeurs entières positives ou nulles des indices, la région R est déterminée à un déplacement près (les coefficients α_{10} et α_{22} restant indéterminés). Les propriétés intrinsèques de R pourront donc être exprimées analytiquement, à l'aide de ces invariants seulement.

Cherchons d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour que la valence de R soit au plus égale à p . On a, si R est une région p -valente

$$f(\lambda, M_1) < \frac{1}{\pi} \int_{p\Pi} \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 = \frac{p}{\pi} \int_{\Pi} \lambda e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 = p.$$

Il est donc nécessaire et suffisant, pour que la valence de R soit au plus égale à p , que

$$p - f(\lambda, M_1) > 0,$$

quel que soit λ réel et quel que soit M_1 dans le plan. En tenant compte de

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} e^{-\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

on a

$$\begin{aligned} f(\lambda, M_1) &= \lambda P_0(M_1) - \frac{\lambda^2}{1!} P_1(M_1) + \frac{\lambda^3}{2!} P_2(M_1) - \dots - \\ &\quad - \frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!} P_{2n-1}(M_1) + \frac{\lambda^{2n+1}}{\pi (2n)!} \int_R r_{12}^{2n} e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 \\ p - \lambda P_0 + \frac{\lambda^2}{1!} P_1 - \frac{\lambda^3}{2!} P_2 + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!} P_{2n-1} - \\ &\quad - \frac{\lambda^{2n+1}}{\pi (2n)!} \int_R r_{12}^{2n} e^{-\lambda r_{12}^2} d\omega_2 > 0 \end{aligned}$$

et, la dernière intégrale étant non négative,

$$p - \lambda P_0 + \frac{\lambda^2}{1!} P_1 - \frac{\lambda^3}{2!} P_2 + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!} P_{2n-1} > 0, \quad (10)$$

$$-\infty < \lambda < +\infty, n = 1, 2, \dots$$

Les polynômes $P_n(M_1)$ étant partout positifs, il suffit d'écrire ces conditions pour $\lambda > 0$. Les conditions (10) sont donc nécessaires et suffisantes pour que la valence de R soit au plus égale à p .

Le cas $p = 1$ est particulièrement intéressant. Nous montrerons, dans ce qui suit, que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence de R engagent la suite des invariants quadratiques I_n seulement. En effet, pour $p = 1$, on a

$$f(\lambda, M_1) < 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda, M_1) = 1, \quad M_1 \in R.$$

Posons

$$g(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_R f(\lambda, M_1) d\omega_1.$$

L'intégrale étant prise au sens de Lebesgue, on a

$$g(\lambda) < \frac{A}{\pi}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = \frac{A}{\pi}. \quad (11)$$

La condition $g(\lambda) < \frac{A}{\pi}$, $\lambda > 0$ est nécessaire et suffisante pour l'univalence de R . En effet, si $p > 1$, on aura

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda, M_1) = q \text{ pour } M_1 \in G_q$$

donc, en désignant par A_q l'aire de G_q ,

$$A = A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \dots + pA_p$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi g(\lambda) = A_1 + 2^2 A_2 + 3^2 A_3 + \dots + p^2 A_p > A.$$

Ainsi, on aura $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi g(\lambda) > A$, donc $g(\lambda) > \frac{A}{\pi}$ pour λ suffisamment

grand, contrairement à (11). La condition $g(\lambda) < \frac{A}{\pi}$ s'écrit

$$\frac{A}{\pi} - \lambda I_0 + \frac{\lambda^2}{1!} I_1 - \frac{\lambda^3}{2!} I_2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} I_n + \dots > 0. \quad (12)$$

Cette condition peut être traitée comme nous venons de le faire pour (9). On a

$$g(\lambda) = \lambda I_0 - \frac{\lambda^2}{1!} I_1 + \frac{\lambda^3}{2!} I_2 - \dots - \frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!} I_{2n-1} +$$

$$+ \frac{\lambda^{2n+1}}{\pi^2 (2n)!} \iint_R r_{12}^{2n} e^{-\lambda \theta_{12}^2} d\omega_1 d\omega_2$$

et $g(\lambda) < \frac{A}{\pi}$ nous donne

$$\frac{A}{\pi} - \lambda I_0 + \frac{\lambda^2}{1!} I_1 - \frac{\lambda^3}{2!} I_2 + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!} I_{2n-1} > 0, \quad (13)$$

$$-\infty < \lambda < +\infty, n = 1, 2, \dots$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour l'univalence de R , et l'on voit qu'elles ne font intervenir que les invariants I_n . Posons $\lambda = \frac{t}{\delta^2}$, δ représentant le diamètre de R . On sait que l'on a

$$\delta^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{I_n}.$$

Avec

$$\tau_n = \frac{1}{A^2} \iint_R \left(\frac{r_{12}}{\delta} \right)^{2n} d\omega_1 d\omega_2 = \frac{\pi^2}{A^2 \delta^{2n}} I_n, \quad \tau_n < 1$$

les conditions (13) deviennent

$$\frac{\pi \delta^2}{A} - \tau_0 t + \tau_1 \frac{t^2}{1!} - \tau_2 \frac{t^3}{2!} + \dots + \tau_{2n-1} \frac{t^{2n}}{(2n-1)!} > 0, \quad t > 0, n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

où les τ_n sont des grandeurs homogènes de degré zéro, donc invariantes par déplacement et homothétie, dans le plan de R .

On transforme (14) en une suite infinie d'inégalités, chacune sous forme finie, nécessaires et suffisantes pour l'univalence de R . En effet, pour que les conditions (14) soient satisfaites il faut et il suffit que

$$\int_0^\infty e^{-t} [P(t)]^2 \left(\frac{\pi \delta^2}{A} - \tau_0 t + \dots + \tau_{2n-1} \frac{t^{2n}}{(2n-1)!} \right) dt > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

quel que soit le polynôme $P(t)$. C'est une forme quadratique par rapport aux coefficients de ce polynôme, forme qui doit être positive. On obtient ainsi

$$\mu_0 > 0, \mu_{2s} > 0, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (15)$$

avec

$$\mu_v = v! \left[\frac{\pi \delta^2}{A} + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k \binom{v+k}{k} \tau_{k-1} \right].$$

Revenons à la transformation ponctuelle (1). On a

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi^2} \int_R \int_R r_{12}^{2n} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_D \int_D \left\{ [X(x_1, y_1) - X(x_2, y_2)]^2 + [Y(x_1, y_1) - \right. \\ &\quad \left. - Y(x_2, y_2)]^2 \right\}^n \left| \frac{D(X, Y)}{D(x_1, y_1)} \right| \cdot \left| \frac{D(X, Y)}{D(x_2, y_2)} \right| dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned} \quad (16)$$

et nous pouvons conclure que l'univalence de la transformation (1) se traduit par la suite infinie d'inégalités (15), en termes finis, faisant intervenir les I_n seulement.

BIBLIOGRAPHIE

G. CĂLUGĂREANU, *Invariants de prolongement et groupes de transformations linéaires*. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Roumanie, 1938, 2, 207—209.

SUR LA STRUCTURE DES CONDITIONS D'UNIVALENCE D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN CERCLE

PAR

G. CĂLUGĂREANU (Cluj)

(Communication au Congrès des mathématiciens roumains, Bucarest, mai-juin 1956)

Le problème des fonctions univalentes dans un domaine à frontière circulaire est, parmi les problèmes spéciaux concernant les fonctions analytiques, l'un de ceux qui ont suscité de nombreuses recherches dans les 30 dernières années. Ce problème se pose de deux manières équivalentes, en partant de l'une ou l'autre des définitions suivantes:

I. Appelons S la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle-unité, dont le développement est de la forme

$$\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

II. Appelons Σ la classe des fonctions holomorphes à l'extérieur du cercle-unité, en exceptant le point ∞ qui est un pôle simple, univalentes pour $|z| > 1$ et de la forme

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \dots$$

On passe de S à Σ , ou inversement, par des transformations simples, ce qui permet de se borner à l'étude de l'une de ces deux classes. Les propriétés de ces fonctions, connues aujourd'hui, sont assez diverses et assez nombreuses.

Nous voulons indiquer ici des considérations qui ont permis d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients α_n pour que $f(z)$ appartienne à la classe Σ . Le problème correspondant pour la classe S se ramène au précédent, en posant par exemple

$$f(z) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Le premier résultat remarquable concernant les coefficients α_n d'une fonction de la classe Σ fut le théorème de l'aire de L. Bieberbach (1919), qui s'exprime par l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1. \quad (1)$$