

P. 577

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

În cel de al V-lea an de apariție (1960) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde aceleași serii:

- I. matematică, fizică, chimie;
 - II. geologie, geografie, biologie;
 - III. filozofie, economie politică, psihologie, pedagogie, științe juridice;
 - IV. istorie, lingvistică, literatură.
- Fiecare serie apare anual în 2 fascicule.

V. (1960-as) évfolyamában a *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* változatlanul alábbi sorozatokat öleli fel:

- I. matematika, fizika, kémia;
 - II. geológia, földrajz, biológia;
 - III. filozófia, politikai gazdaságtan, lélektan, pedagógia, jogtudomány;
 - IV. történet-, nyelv- és irodalomtudomány.
- Minden sorozatban évente két füzet jelenik meg.

На V году издания (1960), *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит теми сериями:

- I. математика, физика, химия;
 - II. геология, география, биология;
 - III. философия, политэкономия, психология, педагогика, юридические н.
 - IV. история, языкознание, литературоведение.
- В каждой серии ежегодно выходят два выпуска.

Dans leur V-me année de la publication (1960) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les mêmes séries:

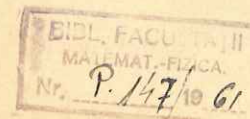
- I-e mathématiques, physique, chimie;
 - II-e géologie, géographie, biologie;
 - III-e philosophie, économie politique, psychologie, pédagogie, sciences juridiques;
 - IV-e histoire, linguistique, littérature.
- Chaque série comprend deux fascicules par année.

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
PHYSICA

CLUJ



BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00338

COMITETUL DE REDACȚIE — SZERKESZTŐ BIZOTTSAG
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ — COMITÉ DE REDACTION

Acad. Prof. C. DAICOVICIU (redactor responsabil), Conf. I. CETERCHI, Conf. V. I. CIMPIANU, Prof. J. DEMETER, Conf. Ö. FELSZEGHY, Conf. M. KALLÓS, Prof. N. LASCU, Prof. T. LÁSZLÓ, Prof. D. MACREA, Prof. GY. MARTON, Prof. T. MORARIU, membru coresp. Acad., Conf. L. NAGY, Prof. I. PÉTERFI, membru coresp. Acad. (redactor responsabil adjunct), Acad. Prof. E. PETROVICI, Prof. Gh. PIC, Prof. T. POPOVICIU, membru coresp. Acad., Prof. E. A. PORA, membru coresp. Acad., Acad. Prof. R. RIPAN, Prof. Al. ROȘCA, Conf. I. URSU

Redacția:
CLUJ, str. Kogălniceanu 1
Telefon 34—50

S U M A R

T. POPOVICIU, Opera științifică a lui J. Bolyai	9
E. KISS, Rezolvarea în numere naturale a ecuației diofantiene $x^2 + y^3 = z^4$	15
Gh. PIC, Despre o teoremă a lui B. H. Neumann	21
G. CALUGĂREANU, Asupra izotopiei curbilor închise	27
G. CALUGĂREANU, Asupra unui sistem de invarianți de izotopie	35
F. RADO, Generalizarea ȧesuturilor spațiale pentru structuri algebrice	41
M. FRODA-SCHUCHTER, Studiul unei proprietăți a translațiilor de mulțimi	57
I. MARUȘCIAC, Asupra polinoamelor lui Cebîșev k-restrinse pe o mulțime mărgi- nită și închisă din planul complex	73
P. T. MOCĂNU, O teoremă asupra funcțiilor univalente	91
D. V. IONESCU, O teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare	97
F. MUNTEANU, Extinderea unei teoreme referitoare la sisteme de ecuații liniare	107
M. FERTIG, Despre comportarea integralelor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, care depind de un parametru	121
G. KÁLIK și P. SZILÁGYI, Despre rezolvarea problemei la limită a lui Neumann	131
L. NEMETI, Tensiuni termice în prisme lungi	143
A. NEY, Despre cazul de nehotărîre al criteriului de convergență al lui D'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Observații asupra problemei celei mai bune aproximații într-un spațiu abstract	163
F. CONSTANTINESCU, Asupra distanței a două mulțimi într-un spațiu vectorial normat	167
T. MIHĂILESCU, Rețele izoterm-conjugate situate pe suprafețele riglate	169
E. GERGELY, Despre ovale pe baza ecuațiilor lor intrinseci	175
L. BAL, Asupra unor suprafețe ce intervin în nomografie	181
D. D. STANCU, Asupra calculului coeficienților unei formule generale de cuadratură	187
F. COTIU și A. COTIU, Delimitarea erorii procedurii de ordinul al cincilea a lui Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	193
E. TATARU, Studiu asupra proprietăților de radiație ale antenelor lentile excitate de pîlnii electromagnetice piramidale sau sectoriale	199
F. KELEMEN, Influența temperaturii asupra potențialului de mișcare al metalelor în apă distilată	205
V. MERCEA, Viscosimetru cu capilară inelară	217
V. MERCEA, Rezistențe la scurgere în scurgeri capilare de gaze și măsurarea lor cu viscosimetru cu capilară	239
I. MAXIM, IULIU POP și A. NICULA, O metodă sensibilă pentru determinarea relativă a susceptibilității magnetice, cu compensare în câmpul gravitațional	254
I. MAXIM, A. NICULA și IULIU POP, O metodă magnetometrică pentru măsurarea remanenței magnetice	265
KOCH F., Unele probleme legate de variația cu temperatura a efectului Procopiu	269

Cronică

Ecuații funcționale în legătură cu nomografia (F. RADÓ)	277
Mulțimi de funcții interpolatoare și noțiunea de funcție convexă (E. MOLDOVAN)	279
Cursuri speciale: Curs special predat de prof. G. CALUGĂREANU	
Curs special predat de prof. T. POPOVICIU	
Curs special predat de prof. E. MOLDOVAN	285

СОДЕРЖАНИЕ

Т. ПОПОВИЧУ, Научная деятельность И. Бойан	9
Э. КИШШ, Решение в натуральных числах диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^4$	15
Г. ПИК, Об одной теореме Б. Х. Неймана	21
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об изотопии замкнутых кривых	27
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об одной системе инвариантов изотопии	35
Ф. РАДО, Обобщение пространственных тканей для алгебраических структур	41
М. ФРОДА-ШЕХТЕР, Исследование одного свойства переносов множеств	57
И. МАРУЩАК, О полиномах Чебышева k -условных на замкнутом и ограниченном множестве комплексной плоскости	73
П. Т. МОКАНУ, Одна теорема об однолистных функциях	91
Д. В. ИОНЕСКУ, Одна теорема о системах линейных уравнений	97
Ф. МУНТЯНУ, Расширение одной теоремы, относящейся к системе уравнений	107
М. ФЕРТИГ, О поведении интегралов дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от одного параметра	121
К. КАЛИК, П. СИЛАДИ, О решении проблемы Неймана	131
Л. НЕМЕТИ, Тепловые напряжения в длинных призмах	143
А. НЕИ, О случае сомнения признака сходимости Даламбера	153
Е. МОЛДОВАН, Замечания относительно наилучшего приближения в абстрактных пространствах	163
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расстоянии двух множеств в нормированном векторном пространстве	167
Т. МИХЭИЛЕСКУ, Изотермо-сопряженные сети на линейчатых поверхностях	169
Е. ГЕРГЕЙ, Об овалах на основании их внутренних уравнений	175
Л. БАЛ, О некоторых поверхностях, возникающих в номографии	181
Д. Д. СТАНКУ, О вычислении коэффициентов одной общей формулы квадратуры	187
Ф. КОЦИЮ, А. КОЦИЮ, Оценка ошибки способа пятой степени Кутта числового интегрирования дифференциальных уравнений	193
Э. ТЭТАРУ, Изучение излучительных свойств линзовых антенн, раздраженных электромагнитными пирамидальными или секториальными рупорами	199
Ф. КЕЛЕМЕН, Влияние температуры на потенциал движения металлов в дистиллированной воде	205
В. МЕРЧА, Вискозиметр с кольцевым капилляром	217
В. МЕРЧА, Сопротивление истечения при капиллярных истечениях газов и измерение их при помощи вискозиметра с кольцевыми капиллярами	239
И. МАКСИМ, Ю. ПОП, А. НИКУЛА, Чувствительный метод для относительного определения магнитной восприимчивости с компенсацией в гравитационном поле	259
И. МАКСИМ, А. НИКУЛА, Ю. ПОП, Магнитометрический метод для измерения остаточного магнетизма	265
Ф. КОХ, Некоторые проблемы в связи с температурной вариацией эффекта Прокопиу	269
Хроника	279

SOMMAIRE

T. POPOVICIU, L'oeuvre scientifique de J. Bolyai	9
E. KISS, Résolution en nombres naturels de l'équation diophantienne $x^2 + y^3 = z^4$	15
GH. PIC, Sur un théorème de B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Sur l'isotopie des courbes fermées	27
G. CALUGAREANU, Sur un système d'invariants d'isotopie	35
F. RADO, Généralisation des tissus spatiaux, pour certaines structures algébriques	41
M. FRODA-SCHECHTER, Etude d'une propriété des translations d'ensembles	57
I. MARUSCIAC, Sur les polynômes de Tchebychev k-restreints à un ensemble limité et fermé du plan complexe	73
P. T. MOCANU, Un théorème sur les fonctions univalentes	91
D. V. IONESCU, Un théorème sur les systèmes d'équations linéaires	97
F. MUNTEANU, Extension d'un théorème relatif à des systèmes d'équations	107
M. FERTIG, Sur le comportement des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui dépendent d'un paramètre	121
C. KALIK, P. SZILAGYI, Sur la solution du problème de la limite de Neumann	131
L. NEMETI, Tensions thermiques dans des prises longs	143
A. NEY, Sur le cas d'indétermination du critérium de convergence de d'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Sur la meilleure approximation dans espaces abstraits	163
F. CONSTANTINESCU, Sur la distance de deux ensembles dans un espace vectoriel normé	167
T. MIHAILESCU, Les réseaux isothermes-conjugués situés sur des surfaces réglées	169
E. GERGELY, Problèmes des ovales fondés sur leurs équations itrisèques	175
L. BAL, Sur certaines surfaces intervenant en nomographie	181
D. D. STANCU, Sur le calcul des coefficients d'une formule générale de quadrature	187
F. COȚIU et A. COȚIU, Délimitation de l'erreur du procédé de cinquième ordre de Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles	193
E. TĂTARU, Etude sur les propriétés de radiation des antennes lentilles excitées par des pavillons électromagnétiques, pyramidaux ou sectoriaux	199
F. KELEMEN, L'influence de la température sur le potentiel de mouvement des métaux dans l'eau distillée	205
V. MERCEA, Le viscosimètre à capillaire annulaire	217
V. MERCEA, Les résistances à l'écoulement dans les écoulements capillaires de gaz et leur mesure avec le viscosimètre à capillaires annulaires	238
I. MAXIM, I. POP, A. NICULA, Sur une méthode sensible pour la détermination relative de la susceptibilité magnétique, avec compensation dans le champ gravitationnel	259
I. MAXIM, A. NICULA, I. POP, Méthode magnétométrique pour la mesure de la rémanence magnétique	265
F. KOCH, Problèmes liés à la variation de l'effet Procopiu en fonction de la température	269
Chronique	297

ИЗОТЕРМО-СОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ НА ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ (Краткое содержание)

Соприкасающиеся плоскости в одной точке A_0 одной линейчатой поверхности (S) на кривых пучка сопряженных сетей, построенного на сопряженной сети, представленной как основная сеть, являются касательными к одному и тому же конусу (Γ) II-го класса. Через образующую прямую (S) , содержащую точку A_0 , можно провести две касательные плоскости к конусу (Γ) . Одна из них является касательной плоскостью к (S) в A_0 , а другая касательной к (Γ) вдоль одной прямой (8) , замещающей ось возврата, ассоциированную с одной сопряженной сетью, находящейся на нелинейчатой поверхности. Сопряженные сети, для которых конгруэнтность, образуемая прямыми (8) , является сопряженной линейчатой поверхности (S) , являются изотермо-сопряженными сетями.

LES RÉSEAUX ISOTHERMES-CONJUGUÉS SITUÉS SUR DES SURFACES RÉGLÉES (Résumé)

Les plans osculateurs en un point A_0 d'une surface réglée (S) aux courbes d'un faisceau de réseaux conjugués construit sur un réseau donné comme réseau de base, sont tangents à un même cône de II-ème classe (Γ) . Par la génératrice rectiligne de (S) qui passe par A_0 , on peut mener deux plans tangents au cône (Γ) . L'un d'eux est le plan tangent à (S) au point A_0 et l'autre touche (Γ) le long d'une droite (8) qui remplace l'axe cuspidal associé à un réseau conjugué situé sur une surface non réglée. Les réseaux conjugués de (S) pour lesquels la congruence des droites (8) est conjuguée à (S) sont les réseaux isothermes-conjugués.

DESPRE OVALE PE BAZA ECUAȚIILOR LOR INTRINSECI

de
EUGEN GERGELY

Este cunoscut că o curbă plană este dată univoc (făcînd abstracție de mișcările în plan), dacă dăm curbura sa ca funcție de lungimea arcului, adică funcția $K = K(s)$, unde K este curbura curbei, iar s lungimea arcului. $K = K(s)$ este numită ecuația intrinsecă a curbei.

Caracterizarea diferitelor clase de curbe prin condiții impuse ecuației intrinseci, este puțin studiată. În cele ce urmează vom studia ecuația intrinsecă a ovaletor și a unei familii de ovale din acest punct de vedere.

Fie într-un sistem ortogonal de coordonate

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

ecuația parametrică a unei curbe plane, unde parametrul S este lungimea de arc. Se știe că funcțiile $x(s)$, $y(s)$, $K(s)$ sînt legate prin sistemul de ecuații diferențiale

$$x'' = -K(s)y', \quad y'' = K(s)x'. \quad (1)$$

Sînt deasemenea cunoscute formulele

$$x(s) = \int_0^s \cos f(u) du, \quad y(s) = \int_0^s \sin f(u) du, \quad f(s) = \int_0^s K(u) du \quad (2)$$

pentru curbele tangente în originea axei x . Formulele (2) se obțin ușor din definiția curburii. Aceste formule permit calculul ecuațiilor parametrice ale curbei cînd se dă funcția $K(s)$. Pentru aceasta este suficient să presupunem că funcția $K(s)$ este integrabilă.

1. Vom da întîi soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale (1) și vom regăsi în particular, pe această cale, ecuațiile (2) (fără considerații geometrice directe). Aici însă facem ipoteza restrictivă că funcția dată $K(s)$ are derivată continuă.

Obținem din (1) că atît $x(s)$ cît și $y(s)$ verifică ecuația diferențială

$$Kx''' - K'x'' + K^3x' = 0 \quad (3)$$

Introducând funcția $z(s) = x'(s)$, problema revine la rezolvarea ecuației

$$K(s)z''(s) - K'(s)z'(s) + K^3(s)z(s) = 0 \quad (4)$$

care în forma autoadjunctă

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{K(s)} \frac{dz}{ds} \right) + K(s)z(s) = 0$$

devine prin substituția

$$\xi = \int_0^s K(u) du$$

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + z(\xi) = 0$$

Soluția generală a ecuației (4) este

$$z(s) = C_1 \sin \int_0^s K(u) du + C_2 \cos \int_0^s K(u) du.$$

și din aceasta obținem soluția ecuației (3)

$$x(s) = C_1 \int_0^s \left[\sin \int_0^v K(u) du \right] dv + C_2 \int_0^s \left[\cos \int_0^v K(u) du \right] dv + k \quad (5)$$

Luând $x(s)$ și $y(s)$ ca două soluții linear independente ale ecuației (5), care îndeplinesc (1), și condiția $x'^2 + y'^2 = 1$, obținem în forma parametrică ecuația curbei

$$x = x(s), y = y(s)$$

Este ușor de demonstrat că într-un sistem ortogonal de coordonate toate aceste curbe integrale (5), sînt congruente la mișcările planului și că $K(s)$ este curbura lor dată de definiția geometrică obișnuită.

*

2. Ne restrîngem la ovalele definite ca curbe închise, convexe care au în fiecare punct o tangentă bine definită, care variază continuu. La ovalul astfel definit, curbura $K(s)$ nu este în general o funcție continuu derivabilă, nici măcar continuă. Să luăm de exemplu ovalul care constă dintr-un semicerc și dintr-o semielipsă; în punctul de racordare al acestora, $K(s)$ nu este în general continuu, are un salt. Punctele de acest fel, pot să formeze la o curbă, o mulțime numerabilă de puncte.

Vom presupune că curbura $K(s)$ este o funcție integrabilă. Este cunoscut că există curbe algebrice de orice ordin, cu ramuri ovale, adică unele părți reale curbei sînt ovale. Calculînd pentru curbele acestea $K(s)$, care în general este o funcție foarte complicată, definită sau pentru toate valorile variabilei s , sau numai pentru anumite intervale și dîndu-se numai

pentru anumite intervale părțile reale ale curbei, vedem că relațiile între funcțiile $K(s)$ și ovale, sînt foarte multiple.

Dacă funcția $K(s)$ este definită în intervalul $s_1 \leq s \leq s_2$, $K(s_1) = K(s_2)$, și în acest interval $K(s)$ este funcția de curbura a unui oval și dacă prelungim definiția funcției $K(s)$ ca funcție periodică cu perioada $S = s_2 - s_1$, $K(s + S) = K(s)$ pentru toate valorile reale ale variabilei s , atunci primim ovalul definit de $K(s)$ inițial, repetîndu-se de o infinitate de ori. Dacă în schimb, — cum am amintit mai înainte — $K(s)$ este dat ca mai înainte, ca o funcție definită pe axa întregă s sau pe un interval al axei, atunci primim o curbă generală care eventual alcătuiește una sau mai multe ovale, dar acestea în general nu sînt congruente.

*

3. La un oval, funcția $K = K(s)$ are un semn constant, de exemplu $K(s) > 0$. Ținînd seama de ecuațiile (2), rezultă că $f(s)$ este o funcție monoton crescătoare. Deoarece un oval este o curbă închisă, fără puncte multiple, din ecuațiile (2) rezultă că există o valoare S astfel ca

$$\int_0^S \cos f(u) du = \int_0^S \sin f(u) du = 0$$

iar dacă $0 < s < S$, atunci

$$\left(\int_0^s \cos f(u) du \right)^2 + \left(\int_0^s \sin f(u) du \right)^2 = 0 \text{ și } \int_0^S K(s) ds = f(S) = 2\pi.$$

Se vede foarte ușor că aceste condiții sînt și suficiente. Astfel am demonstrat teorema următoare:

TEOREMA 1. Fie $K(s) > 0$ o funcție integrabilă pe intervalul

$[0, S]$ și $f(s) = \int_0^s K(u) du$. Condițiile următoare sînt necesare și suficiente

pentru ca ecuația $K = K(s)$ să fie ecuația intrinsecă a unui oval tangent în origine la axa x :

$$1) \quad \int_0^S \cos f(u) du = \int_0^S \sin f(u) du = 0,$$

$$2) \quad \left(\int_0^s \cos f(u) du \right)^2 + \left(\int_0^s \sin f(u) du \right)^2 \neq 0, \quad 0 < s < S.$$

$$3) \quad f(S) = 2\pi.$$

O b s e r v a Ț i e. Dacă funcția $K=K(s)$ generează în intervalul $[s_1, s_2]$ un oval, atunci cu o translație a variabilei s , funcția $K(s)$ este transformabilă la forma folosită în teorema I.

*

4. Din definiția curburei $K(s)$ rezultă că $f(s) = \vartheta$, unde ϑ este unghiul format de tangenta (cu direcția pozitivă) și de axa x pozitivă.

La un oval, $K(s)$ fiind pozitiv, $f(s)$ este o funcție monoton crescătoare și astfel ecuația $\vartheta = f(s)$ se rezolvă univoc în raport cu s

$$s = \Phi(\vartheta)$$

unde și funcția $\Phi(\vartheta)$ este o funcție monotonă. Astfel

$$K(s) = K[\Phi(\vartheta)] = K(\vartheta);$$

aici curbura este exprimată în funcție de unghiul ϑ .

Să fie în cele ce urmează $h(\vartheta)$ distanța de la originea 0 a sistemului de coordonate la tangenta ovalului care formează cu axa pozitivă x unghiul ϑ , adică funcția de sprijin a curbei. Atunci, cum este cunoscut, $h(\vartheta)$ satisface următoarea ecuație diferențială

$$L(\vartheta) = \frac{1}{K(\vartheta)} = h(\vartheta) + h''(\vartheta). \quad (6)$$

Dacă este dată ecuația intrinsecă $K = K(s)$, atunci cunoaștem și funcțiile $K(\vartheta)$ și $L(\vartheta)$ și soluția generală a ecuației (1) este

$$h(\vartheta) = C_1 \cos \vartheta + C_2 \sin \vartheta + \sin \vartheta \int_0^{\vartheta} L(u) \cos u \, du - \cos \vartheta \int_0^{\vartheta} L(u) \sin u \, du \quad (7)$$

La un oval $L(\vartheta) > 0$ și $L(\vartheta) = L(\vartheta + 2\pi)$.

Dacă ovalul dat este tangent în 0 la axa x , atunci $h(0) = 0$ și $L(0) = L(2\pi)$. În acest caz funcția de sprijin $h(\vartheta)$ va avea forma următoare

$$h(\vartheta) = \sin \vartheta \int_0^{\vartheta} \frac{\cos u}{K(u)} \, du - \cos \vartheta \int_0^{\vartheta} \frac{\sin u}{K(u)} \, du = \int_0^{\vartheta} \frac{\sin(\vartheta - u)}{K(u)} \, du \quad (8)$$

*

O clasă importantă a ovalelor este clasa ovalelor de lărgime constantă.

Lărgimea ovalului într-o direcție dată este distanța celor două tangente paralele ale ovalului care sînt perpendiculare pe direcția dată. Lărgimea ovalului o notăm cu $d(\vartheta)$, unde ϑ este unghiul între direcția dată și axa pozitivă x . $\min d(\vartheta)$ este numit lărgimea ovalului.

$$0 < \vartheta \leq 2\pi$$

Dacă $d(\vartheta) = \text{constant}$, ovalele se numesc ovale de lărgime constantă. Pentru poziția particulară folosită mai înainte avem

$$d\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = h(\vartheta) - h(\vartheta + \pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{K(u + \vartheta)}. \quad (9)$$

(am aplicat expresia (8) și câteva transformări evidente).

Pentru ovale cu lărgime constantă, obținem din aceasta condiția necesară și suficientă

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{K(u + \vartheta)} = \text{constant} \quad (10)$$

pentru toate valorile ϑ . Am demonstrat astfel.

TEOREMA 2. Condițiile arătate în teorema I și condiția (10) sînt necesare și suficiente pentru ca curba tangentă în origine la axa x , dată cu ecuația intrinsecă $K = K(S)$, să fie un oval de lărgime constantă.

Catedra de geometrie

ОБ ОВАЛЬНЫХ НА ОСНОВАНИИ ИХ ВНУТРЕННИХ УРАВНЕНИИ (Краткое содержание)

Уравнение одной кривой даётся в виде

$$x(S) = \int_0^S \cos f(u) \, du, \quad y(S) = \int_0^S \sin f(u) \, du,$$

где

$$f(S) = \int_0^S k(u) \, du$$

$K = K(S)$ является внутренним уравнением кривой. На основании этого уравнения доказываются теоремы I и II, выражая при помощи функции $K = K(S)$ необходимые и достаточные условия, чтобы $K = K(S)$ стала внутренним уравнением овала, соответственно — одного овала постоянной ширины.

PROBLÈMES DES OVALES FONDÉS SUR LEURS ÉQUATIONS INTRINSÈQUES

(Résumé)

Dans cet article, l'équation d'une courbe est donnée sous la forme

$$x(s) = \int_0^s \cos f(u) du, \quad y(s) = \int_0^s \sin f(u) du,$$

où

$$f(s) = \int_0^s k(u) du$$

et $k = k(S)$ est l'équation intrinsèque de la courbe. En s'appuyant sur cette équation, on démontre les théorèmes I et II qui expriment à l'aide de la fonction $k(S)$ les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $k = k(S)$ soit l'équation intrinsèque d'un ovale, respectivement d'un ovale de largeur constante.

ASUPRA UNOR SUPRAFETE CE INTERVIN
IN NOMOGRAFIE

de

LASCU BAL

1. Într-un articol recent [2] am semnalat o clasă de suprafețe ce intervin în nomografie, în cadrul rezolvării aproximative a ecuațiilor cu trei variabile, cu ajutorul nomogramelor cu puncte aliniate formate din trei scări rectilinii. Aceste suprafețe sînt de forma

$$h(z) = f(x) + g(y) \quad (1)$$

și generalizează suprafețele de translație și rotație.

În acest articol voi căuta condiții necesare și suficiente ca o suprafață să fie riglată, sub o formă care să-mi permită aplicarea lor la suprafețele de tipul (1). Ecuația funcțională obținută va fi rezolvată în cazuri particulare. Vom demonstra teorema:

Condițiile necesare și suficiente ca o suprafață să fie riglată sînt

$$\begin{aligned} d\vec{N} \cdot d\vec{r} &= 0 \\ d^2\vec{N} \cdot d\vec{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

unde $\vec{N}$ este un vector normal la suprafață și $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct situat pe suprafață.

Aceste condiții corespund proprietății geometrice a suprafeței riglate, că o familie a liniilor asimptotice e formată din generatoarele rectilinii.

Condițiile (2) sînt necesare. În adevăr dacă

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (3)$$

este ecuația vectorială a unei suprafețe și $\frac{d\vec{r}}{ds}$, versorul tangentei unei linii asimptotice, într-un punct al ei, atunci dacă linia asimptotică considerată este dreaptă avem

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0. \quad (4)$$