

P. 577

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

In cel de al V-lea an de apariție (1960) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde aceleași serii:

- I. matematică, fizică, chimie;
 - II. geologie, geografie, biologie;
 - III. filozofie, economie politică, psihologie, pedagogie, științe juridice;
 - IV. istorie, lingvistică, literatură.
- Fiecare serie apare anual în 2 fascicule.

V. (1960-as) évfolyamában a *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* változatlanul az alábbi sorozatokat öleli fel:

- I. matematika, fizika, kémia;
 - II. geológia, földrajz, biológia;
 - III. filozófia, politikai gazdaságtan, lélektan, pedagógia, jogtudomány;
 - IV. történet-, nyelv- és irodalomtudomány.
- Minden sorozatban évente két füzet jelenik meg.

На V году издания (1960), *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит теми сериями:

- I. математика, физика, химия;
 - II. геология, география, биология;
 - III. философия, политэкономия, психология, педагогика, юридические н.
 - IV. история, языкознание, литературоведение.
- В каждой серии ежегодно выходят два выпуска.

Dans leur V-me année de la publication (1960) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les mêmes séries:

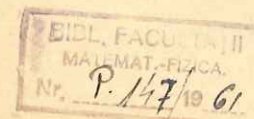
- I-e mathématiques, physique, chimie;
 - II-e géologie, géographie, biologie;
 - III-e philosophie, économie politique, psychologie, pédagogie, sciences juridiques;
 - IV-e histoire, linguistique, littérature.
- Chaque série comprend deux fascicules par année.

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
PHYSICA

CLUJ



BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00338

COMITETUL DE REDACȚIE — SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ — COMITÉ DE REDACTION

Acad. Prof. C. DAICOVICIU (redactor responsabil), Conf. I. CETERCHI, Conf. V. I. CIMPIANU, Prof. J. DEMETER, Conf. Ö. FELSZEGHY, Conf. M. KALLÓS, Prof. N. LASCU, Prof. T. LÁSZLÓ, Prof. D. MACREA, Prof. GY. MARTON, Prof. T. MORARIU, membru coresp. Acad., Conf. L. NAGY, Prof. I. PÉTERFI, membru coresp. Acad. (redactor responsabil adjunct), Acad. Prof. E. PETROVICI, Prof. Gh. PIC, Prof. T. POPOVICIU, membru coresp. Acad., Prof. E. A. PORA, membru coresp. Acad., Acad. Prof. R. RIPAN, Prof. Al. ROȘCA, Conf. I. URSU

Redacția:
CLUJ, str. Kogălniceanu 1
Telefon 34—50

S U M A R

T. POPOVICIU, Opera științifică a lui J. Bolyai	9
E. KISS, Rezolvarea în numere naturale a ecuației diofantiene $x^2 + y^3 = z^4$	15
Gh. PIC, Despre o teoremă a lui B. H. Neumann	21
G. CALUGĂREANU, Asupra izotopiei curbilor închise	27
G. CALUGĂREANU, Asupra unui sistem de invarianți de izotopie	35
F. RADO, Generalizarea ȧesuturilor spațiale pentru structuri algebrice	41
M. FRODA-SCHECHTER, Studiul unei proprietăți a translațiilor de mulțimi	57
I. MARUȘCIAC, Asupra polinoamelor lui Cebîșev k-restrinse pe o mulțime mărgi- nită și închisă din planul complex	73
P. T. MOCANU, O teoremă asupra funcțiilor univalente	91
D. V. IONESCU, O teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare	97
F. MUNTEANU, Extinderea unei teoreme referitoare la sisteme de ecuații liniare	107
M. FERTIG, Despre comportarea integralelor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, care depind de un parametru	121
G. KALIK și P. SZILÁGYI, Despre rezolvarea problemei la limită a lui Neumann	131
L. NEMETI, Tensiuni termice în prisme lungi	143
A. NEY, Despre cazul de nehotărîre al criteriului de convergență al lui D'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Observații asupra problemei celei mai bune aproximații într-un spațiu abstract	163
F. CONSTANTINESCU, Asupra distanței a două mulțimi într-un spațiu vectorial normat	167
T. MIHAILESCU, Rețele izoterm-conjugate situate pe suprafețele riglate	169
E. GERGELY, Despre ovale pe baza ecuațiilor lor intrinseci	175
L. BAL, Asupra unor suprafețe ce intervin în nomografie	181
D. D. STANCU, Asupra calculului coeficienților unei formule generale de cuadratură	187
F. COȚIU și A. COȚIU, Delimitarea erorii procedurii de ordinul al cincilea a lui Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	193
E. TATARU, Studiu asupra proprietăților de radiație ale antenelor lentile excitate de pîlnii electromagnetice piramidale sau sectoriale	199
F. KELEMEN, Influența temperaturii asupra potențialului de mișcare al metalelor în apă distilată	205
V. MERCEA, Viscosimetrul cu capilară înelară	217
V. MERCEA, Rezistențe la scurgere în scurgeri capilare de gaze și măsurarea lor cu viscosimetrul cu capilară	239
I. MAXIM, IULIU POP și A. NICULA, O metodă sensibilă pentru determinarea relativă a susceptibilității magnetice, cu compensare în câmpul gravitațional	254
I. MAXIM, A. NICULA și IULIU POP, O metodă magnetometrică pentru măsurarea remanenței magnetice	265
KOCH F., Unele probleme legate de variația cu temperatura a efectului Procopiu	269

Cronică

Ecuații funcționale în legătură cu nomografia (F. RADO)	277
Mulțimi de funcții interpolatoare și noțiunea de funcție convexă (E. MOLDOVAN)	279
Cursuri speciale: Curs special predat de prof. G. CALUGĂREANU Curs special predat de prof. T. POPOVICIU Curs special predat de prof. E. MOLDOVAN	285

СОДЕРЖАНИЕ

Т. ПОПОВИЧУ, Научная деятельность И. Бойан	9
Э. КИШШ, Решение в натуральных числах диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^4$	15
Г. ПИК, Об одной теореме Б. Х. Неймана	21
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об изотопии замкнутых кривых	27
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об одной системе инвариантов изотопии	35
Ф. РАДО, Обобщение пространственных тканей для алгебраических структур	41
М. ФРОДА-ШЕХТЕР, Исследование одного свойства переносов множеств	57
И. МАРУЩАК, О полиномах Чебышева k -условных на замкнутом и ограниченном множестве комплексной плоскости	73
П. Т. МОКАНУ, Одна теорема об однолистных функциях	91
Д. В. ИОНЕСКУ, Одна теорема о системах линейных уравнений	97
Ф. МУНТЯНУ, Расширение одной теоремы, относящейся к системе уравнений	107
М. ФЕРТИГ, О поведении интегралов дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от одного параметра	121
К. КАЛИК, П. СИЛАДИ, О решении проблемы Неймана	131
Л. НЕМЕТИ, Тепловые напряжения в длинных призмах	143
А. НЕЙ, О случае сомнения признака сходимости Даламбера	153
Е. МОЛДОВАН, Замечания относительно наилучшего приближения в абстрактных пространствах	163
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расстоянии двух множеств в нормированном векторном пространстве	167
Т. МИХЭИЛЕСКУ, Изотермо-сопряженные сети на линейчатых поверхностях	169
Е. ГЕРГЕЙ, Об овалах на основании их внутренних уравнений	175
Л. БАЛ, О некоторых поверхностях, возникающих в номографии	181
Д. Д. СТАНКУ, О вычислении коэффициентов одной общей формулы квадратуры	187
Ф. КОЦИЮ, А. КОЦИЮ, Оценка ошибки способа пятой степени Кутта числового интегрирования дифференциальных уравнений	193
Э. ТЭТАРУ, Изучение излучительных свойств линзовых антенн, раздраженных электромагнитными пирамидальными или секторными рупорами	199
Ф. КЕЛЕМЕН, Влияние температуры на потенциал движения металлов в дистиллированной воде	205
В. МЕРЧА, Вискозиметр с кольцевым капилляром	217
В. МЕРЧА, Сопротивление истечения при капиллярных истечениях газов и измерение их при помощи вискозиметра с кольцевыми капиллярами	239
И. МАКСИМ, Ю. ПОП, А. НИКУЛА, Чувствительный метод для относительного определения магнитной восприимчивости с компенсацией в гравитационном поле	259
И. МАКСИМ, А. НИКУЛА, Ю. ПОП, Магнитометрический метод для измерения остаточного магнетизма	265
Ф. КОХ, Некоторые проблемы в связи с температурной вариацией эффекта Прокопну	269
Хроника	279

SOMMAIRE

T. POPOVICIU, L'oeuvre scientifique de J. Bolyai	9
E. KISS, Résolution en nombres naturels de l'équation diophantienne $x^2 + y^3 = z^4$	15
GH. PIC, Sur un théorème de B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Sur l'isotopie des courbes fermées	27
G. CALUGAREANU, Sur un système d'invariants d'isotopie	35
F. RADO, Généralisation des tissus spatiaux, pour certaines structures algébriques	41
M. FRODA-SCHECHTER, Étude d'une propriété des translations d'ensembles	57
I. MARUȘCIAC, Sur les polynômes de Tchebychev k-restreints à un ensemble limité et fermé du plan complexe	73
P. T. MOCANU, Un théorème sur les fonctions univalentes	91
D. V. IONESCU, Un théorème sur les systèmes d'équations linéaires	97
F. MUNTEANU, Extension d'un théorème relatif à des systèmes d'équations	107
M. FERTIG, Sur le comportement des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui dépendent d'un paramètre	121
C. KALIK, P. SZILAGYI, Sur la solution du problème de la limite de Neumann	131
L. NEMETI, Tensions thermiques dans des prises longs	143
A. NEY, Sur le cas d'indétermination du critérium de convergence de d'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Sur la meilleure approximation dans espaces abstraits	163
F. CONSTANTINESCU, Sur la distance de deux ensembles dans un espace vectoriel normé	167
T. MIHAILESCU, Les réseaux isothermes-conjugués situés sur des surfaces réglées	169
E. GERGELY, Problèmes des ovales fondés sur leurs équations itrisèques	175
L. BAL, Sur certaines surfaces intervenant en nomographie	181
D. D. STANCU, Sur le calcul des coefficients d'une formule générale de quadrature	187
F. COȚIU et A. COȚIU, Délimitation de l'erreur du procédé de cinquième ordre de Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles	193
E. TATARU, Étude sur les propriétés de radiation des antennes lentilles excitées par des pavillons électromagnétiques, pyramidaux ou sectoriaux	199
F. KELEMEN, L'influence de la température sur le potentiel de mouvement des métaux dans l'eau distillée	205
V. MERCEA, Le viscosimètre à capillaire annulaire	217
V. MERCEA, Les résistances à l'écoulement dans les écoulements capillaires de gaz et leur mesure avec le viscosimètre à capillaires annulaires	238
I. MAXIM, I. POP, A. NICULA, Sur une méthode sensible pour la détermination relative de la susceptibilité magnétique, avec compensation dans le champ gravitationnel	259
I. MAXIM, A. NICULA, I. POP, Méthode magnétométrique pour la mesure de la rémanence magnétique	265
F. KOCH, Problèmes liés à la variation de l'effet Procopiu en fonction de la température	269
Chronique	297

SUR LE CAS D'INDÉTERMINATION DU CRITÉRIUM DE CONVERGENCE DE
D'ALEMBERT

(Résumé)

On envisage la série à termes positifs, $\sum_1^{\infty} u_n$, dont le terme général tend vers zéro. On examine le cas où $\lambda_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), en partant du rapport $\frac{\Delta \lambda_n}{\Delta u_n} = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{u_{n+1} - u_n}$. On démontre que, si à partir d'un indice n suffisamment grand, on a $\frac{\Delta \lambda_n}{\Delta u_n} > -m$ ($m > 0$), la série $\sum_1^{\infty} u_n$ est divergente. On en conclut de plus, qu'une condition nécessaire de la convergence — dans le cas où $\lambda_n \rightarrow 1$ — est : $\liminf \frac{\Delta \lambda_n}{\Delta u_n} = -\infty$.

OBSERVAȚII ASUPRA PROBLEMEI CELEI MAI BUNE
APROXIMAȚII INTR-UN SPAȚIU ABSTRACT

de

ELENA MOLDOVAN

1. Fie $C[a, b]$ spațiul funcțiilor continue pe intervalul închis $[a, b]$. Norma este definită prin

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Să notăm cu $\mathcal{P}_n$ mulțimea polinoamelor de grad cel mult egal cu n . Este bine cunoscută formularea problemei celei mai bune aproximații a unei funcții oarecare $f(x) \in C[a, b]$ prin elemente ale mulțimii $\mathcal{P}_n$. Să notăm cu $\mathcal{E}_n(f)$ cea mai bună aproximație a funcției $f(x) \in C[a, b]$, prin polinoame din $\mathcal{P}_n$. Avem

$$\mathcal{E}_n(f) = \inf_{P(x) \in \mathcal{P}_n} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \right\}$$

Dacă se notează cu $T_n(x)$ polinomul de cea mai bună aproximație de gradul n , al funcției $f(x) \in C[a, b]$, atunci

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - T_n(x)| = \mathcal{E}_n(f)$$

În teoria constructivă a funcțiilor se demonstrează existența și unicitatea polinomului $T_n(x)$ pentru orice funcție $f(x) \in C[a, b]$.

2. Fie

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$$

puncte distincte ale intervalului $[a, b]$. Se notează cu $L_n(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)$ polinomul de interpolare al lui Lagrange pe nodurile (1), corespunzător funcției $f(x)$, definită pe aceste noduri. Vom nota cu $\mathcal{L}_n(f)$ submulțimea lui $\mathcal{P}_n$ definită astfel :

$f(x)$ fiind o funcție dată din $C[a, b]$, $\mathcal{L}_n(f)$ este mulțimea polinoamelor din $\mathcal{P}_n$, de forma $L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)$ punctele distincte (1), fiind oarecari în $[a, b]$.

Evident mulțimea $\mathcal{L}_n(f)$ nu este vidă și ea conține în general o infinitate de elemente, afară de cazul când $f(x) \in \mathcal{P}_n$. În acest ultim caz $\mathcal{L}_n(f)$ se reduce la un singur element.

Observație. Din definiția mulțimii $\mathcal{L}_n(f)$, rezultă că pentru o funcție dată $f(x) \in C[a, b]$, dacă $P(x) \in \mathcal{L}_n(f)$ există cel puțin $n + 1$ puncte distincte (1), astfel ca $P(x)$ să coincidă cu $L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)$. Se poate întâmpla ca un polinom $P(x) \in \mathcal{L}_n(f)$ să coincidă cu $f(x)$ pe un număr mai mare de puncte decât $n + 1$, sau chiar pe un interval. Acest caz este exclus numai dacă $f(x)$ este o funcție convexă sau concavă¹ pe $[a, b]$ față de mulțimea $\mathcal{P}_n$.

Pe baza teoremei lui Cebîșev [2] rezultă că $T_n(x) \in \mathcal{L}_n(f)$ și deci

$$(2) \quad \inf_{P(x) \in \mathcal{P}_n} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \right\} = \inf_{P(x) \in \mathcal{L}_n(f)} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \right\}$$

oricare ar fi $f(x) \in C[a, b]$.

3. Fie

$$(3) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

un sistem de funcții din $C[a, b]$ liniar independente pe $[a, b]$. Dacă ele formează un sistem al lui Cebîșev și $f(x) \in C[a, b]$, atunci are loc analogul relației (2)

$$(4) \quad \inf_{\varphi(x) \in \Phi_n} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \right\} = \inf_{\varphi(x) \in \Psi_n(f)} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \right\}$$

unde cu Φ_n s-a notat mulțimea combinațiilor liniare $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$ iar cu $\Psi_n(f)$ mulțimea acelor elemente din Φ_n , care coincid cu $f(x)$, pe cel puțin n puncte distincte din $[a, b]$. Dacă $\varphi^*(f; x)$ este elementul de cea mai bună aproximație din Φ_n al funcției $f(x)$ atunci $\varphi^*(f; x) \in \Psi_n(f)$.

Dacă funcțiile (3) nu formează un sistem al lui Cebîșev, atunci proprietatea $\varphi^*(f; x) \in \Psi_n(f)$ nu este în general asigurată pentru orice element de cea mai bună aproximație $\varphi^*(f; x)$. Să dăm un exemplu simplu din care rezultă această afirmație. Să considerăm mulțimea polinoamelor de forma αx , cu α real, oarecare, pe intervalul $[0, 1]$. Dacă $f(x) = -x + 1$, $x \in [0, 1]$, există o infinitate de polinoame de cea mai bună aproximație de forma αx , pentru $f(x)$ pe $[0, 1]$ și anume toate acelea care se obțin pentru $-1 \leq \alpha \leq 1$. Pentru $-1 \leq \alpha < 0$, nici unul dintre polinoamele αx nu coincide cu $f(x)$ pe vreun punct din $[0, 1]$.

4. Fie E un spațiu liniar normat și $g_1, g_2, \dots, g_n$, n elemente liniar independente ale sale. Să notăm cu S subspațiul generat de elementele $g_1, g_2, \dots, g_n$. În acest caz, problema celei mai bune aproximații se formulează în felul următor: v fiind un element dat din E , să se studieze existența și unicitatea elementului $s \in S$, pentru care este minimă distanța $\|v - s\|$. Notînd

$$(5) \quad \mathcal{E}_n(v) = \inf_{s \in S} \|v - s\|$$

¹ ne referim la convexitate respectiv concavitate de ordinul n .

se știe că este asigurată — pentru orice $v \in E$ — existența a cel puțin unui element $s^* \in S$, astfel ca

$$(6) \quad \|v - s^*\| = \mathcal{E}_n(v)$$

Unicitatea elementului de cea mai bună aproximație are loc numai în condiții suplimentare [1].

5. Fie $\mathcal{U}$ o mulțime de operații liniare și continue definite pe E și cu valorile în S , astfel ca:

- 1° dacă $v \in E$, atunci pentru orice $U \in \mathcal{U}$, să avem $U[v] \in S$,
- 2° dacă $v \in S$, atunci pentru orice $U \in \mathcal{U}$, să avem $U[v] = v$.

Să notăm cu $\mathcal{U}(v)$ mulțimea elementelor din S , care se obțin aplicînd elementului $v \in E$, toate operațiile din $\mathcal{U}$. Se poate formula următoarea problemă de cea mai bună aproximație²: să se studieze în ce condiții este asigurată existența unui element $\tilde{s} \in \mathcal{U}(v)$ pentru care este atins³

$$\inf_{s \in \mathcal{U}(v)} \|v - s\| = \tilde{\mathcal{E}}_n(v)$$

6. Definiție. Dacă pentru orice $v \in E$, toate elementele de cea mai bună aproximație în sensul (5) aparțin mulțimii $\mathcal{U}(v)$, atunci spunem că elementele $g_1, g_2, \dots, g_n$ formează un sistem (T) față de mulțimea $\mathcal{U}$.

TEOREMA I. Dacă $g_1, g_2, \dots, g_n$ formează un sistem (T) față de mulțimea $\mathcal{U}$, atunci pentru orice $v \in E$ există un singur element $s^* \in S$ pentru care are loc (6).

Pentru demonstrația teoremei 1; să presupunem satisfăcută ipoteza din enunț. Fie $v \in E$ un element pentru care există două elemente de cea mai bună aproximație în sensul (5). Fie acestea s_1^* și s_2^* . Avem

$$(7) \quad \|v - s_1^*\| = \|v - s_2^*\| = \mathcal{E}_n(v) = \tilde{\mathcal{E}}_n(v)$$

Avem de asemenea

$$s_1^* \in \mathcal{U}(v), s_2^* \in \mathcal{U}(v)$$

Dar $g_1, g_2, \dots, g_n$ fiind un sistem (T) față de mulțimea $\mathcal{U}$, și elementul $\frac{s_1^* + s_2^*}{2}$ trebuie⁴ să aparțină mulțimii $\mathcal{U}(v)$. Să arătăm că putem alege pe $z \in E$ astfel ca $s_1^*(z)$ și $s_2^*(z)$ să fie elemente de cea mai bună aproximație ale lui z și totuși $\frac{s_1^*(z) + s_2^*(z)}{2} \notin \mathcal{U}(z)$. Să considerăm pe $z = v + s$, unde v este elementul din (7) iar s un element oarecare din S . Se observă im-

² ea prezintă interes numai dacă $\mathcal{U}(v) \neq S$.

³ Presupunem că $\mathcal{U}(v)$ satisface condiția C^* pentru orice $v \in E$. Aceasta înseamnă că dacă $\|v - s_1^*\| = \|v - s_2^*\| = \tilde{\mathcal{E}}_n(v)$, atunci există un $s \in S$ astfel ca $\frac{s_1^* + s_2^*}{2} + s \in \mathcal{U}(v + s)$.

⁴ $\tilde{\mathcal{E}}(v)$ este cea mai bună aproximație a lui v prin elemente din $\mathcal{U}(v)$.

⁵ se știe că mulțimea elementelor de cea mai bună aproximație ale unui element $v \in E$ este convexă.

diat că $s_1^* + s = s_1^*(z)$ și $s_2^* + s = s_2^*(z)$ sînt elemente de cea mai bună aproximație ale lui z pentru că

$$\inf_{U \in \mathcal{U}(v)} \|U[v + s] - (v + s)\|$$

coincide cu

$$\inf_{U \in \mathcal{U}(v)} \|U[v] - v\|$$

deoarece U este o operație liniară și $U[s] = s$.

Avem $\frac{s_1^*(z) + s_2^*(z)}{2} = \frac{s_1^* + s_2^*}{2} + s$. Este clar pe baza ipotezelor făcute asupra lui $\mathcal{U}(v)$ că putem alege pe $s \in S$ în așa fel ca $\frac{s_1^*(z) + s_2^*(z)}{2} \in \mathcal{U}(z)$.

Astfel ajungem în contradicție cu ipoteza din enunț. Concluzia din teoremă are deci loc.

Teorema enunțată prezintă interes deoarece condiția impusă în ea se referă la sistemul $g_1, g_2, \dots, g_n$. În felul acesta ea este analoagă condiției din teorema cunoscută a lui Haar.

Catedra de analiză matematică

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Ahieser, *Lecții de teoria aproximației*. 1947.
2. I. P. Natanson, *Teoria constructivă a funcțiilor*. 1950.

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ (Краткое содержание)

Автор развивает одну теорему Чебышева в абстрактных пространствах. Вводится понятие система Чебышева в нормированном линейном пространстве.

SUR LA MEILLEURE APPROXIMATION DANS DES ESPACES ABSTRAITS (Résumé)

Dans ce travail l'auteur donne une extension d'un théorème de Tchebycheff aux espaces abstraits. On donne aussi la définition d'un système (T) dans les espaces linéaires normés.

ASUPRA DISTANȚEI A DOUĂ MULȚIMI INTR-UN SPAȚIU VECTORIAL NORMAT

de

FLORIN CONSTANTINESCU

Fie E un spațiu vectorial normat, iar X și Y două mulțimi de dimensiune finită, închise din acest spațiu. Vom mai presupune că mulțimea X este mărginită.

Prin analogie cu problema celei mai bune aproximații [1], o pereche de elemente $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ pentru care avem:

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\| = \|x_0 - y_0\|$$

se numește cuplu de cea mai bună aproximație.

TEOREMA 1.

Ori care ar fi mulțimile X , Y satisfăcând condițiile impuse, există un cuplu de cea mai bună aproximație.

Funcționala $\rho(x, X)$ definită pe mulțimea X își atinge minimul într-un punct $x_0 \in X$; $\rho(X, Y) = \rho(x_0, Y)$.

Considerăm sfera $S(x_0, \rho(x_0, Y) + a)$ de centru x_0 și rază $\rho(x_0, Y) + a$, $a > 0$. Mulțimea $P = Y \cup S(x_0, \rho(x_0, Y) + a)$ va fi o mulțime nevidă, închisă, și mărginită. Rezultă că există un element $y_0 \in P \subset Y$ astfel încît

$$\rho(x_0, Y) = \rho(x_0, P) = \rho(x_0, y_0).$$

Deci (x_0, y_0) este un cuplu de cea mai bună aproximație.

TEOREMA 2.

Dacă mulțimile X și Y sînt strict convexe, cuplul de cea mai bună aproximație este unic.

Presupunem contrarul, și fie (x_1, y_1) , (x_2, y_2) două cupluri de cea mai bună aproximație;