

SUR LES CLASSES D'ISOTOPIE DES NOEUDS TRIDIMENSIONNELS
ET LEURS INVARIANTS

G. CĂLUGĂREANU, Cluj

(Reçu le 22 juin 1960)

On étudie les classes d'isotopie des noeuds et leurs approximations par des noeuds algébriques. On construit certains invariants d'isotopie, exprimés par des intégrales curvilignes dans lesquelles figurent la courbure et la torsion aux points de la courbe représentant le noeud.

On sait que le problème de la classification des noeuds (courbes fermées sans points multiples dans l'espace tridimensionnel) au point de vue de l'isotopie est loin d'être épuisé. Quelques difficultés apparaissent déjà quand on essaie de préciser la définition des noeuds isotopes conformément aux données de l'intuition géométrique, et ces difficultés sont dues à la trop grande diversité de formes spatiales qu'offre la notion de courbe fermée simple (sans points multiples). On a évité ces difficultés en admettant comme représentants des classes de noeuds des contours polygonaux simples à un nombre fini de côtés, et cette méthode (voir [1]) a conduit à des résultats importants, quoique incomplets.

Le nombre des classes d'isotopie distinctes étant infini, la classification des noeuds exige la connaissance d'une suite infinie d'invariants, calculables dans chaque cas particulier, dont les valeurs puissent caractériser chaque classe d'isotopie, en formant ainsi un système complet d'invariants d'isotopie. Ce problème n'est pas résolu.

Dans ce travail, nous essayons de construire une théorie des noeuds en prenant comme représentants des classes d'isotopie, à la place des contours polygonaux, des courbes fermées C simples et lisses (ayant en chaque point une tangente qui varie continûment le long de la courbe). En admettant l'existence et la continuité des dérivées des cordonnées jusqu'à l'ordre 3, ou >3 , nous avons la possibilité d'utiliser les invariants différentiels (courbure et torsion) attachés à la courbe; malgré leur caractère local, nous verrons que le comportement de ces invariants joue un rôle dans l'étude de la déformation isotope. Nous aboutissons à la formation d'invariants d'isotopie d'ordre 2 et 3, exprimables par des intégrales curvilignes étendues à C , dans lesquelles figurent la courbure et la torsion, $\varrho(s)$ et $\tau(s)$, aux points de C .

Commençons par préciser les notions fondamentales dont nous aurons à faire usage.

1. Noeuds. Déformation isotope. Nous appelons *noeud* toute courbe fermée simple C , orientée, ayant en chaque point une tangente qui varie continûment (en direction et sens) en fonction de l'arc s . Ceci exclut la présence des points anguleux ou de rebroussement.

Passons à la définition de la *déformation isotope*. Il est naturel d'appeler ainsi toute déformation continue pendant laquelle la courbe C reste un noeud (ce qui empêche que la courbe se traverse elle-même). Mais on constate ([2], p. 323) que, avec cette définition, tous les noeuds sont isotopes entre eux, et le problème de la classification est sans objet. En effet, chaque noeud peut être déformé continûment, sans qu'il se traverse lui-même, de manière à coïncider finalement avec un cercle. En supposant le noeud matérialisé par un fil inextensible, il suffit de saisir le fil en deux points très rapprochés, par les deux mains, puis d'éloigner les mains en laissant glisser le fil; l'une des deux branches de fil joignant les mains deviendra rectiligne, tandis que le noeud existant sur l'autre pourra être obligé à se resserrer indéfiniment autour d'un point. Cette opération correspond à une déformation continue en un cercle, pendant laquelle le noeud ne se traverse pas lui-même. On évite cette possibilité, qui entraîne la fusion des classes d'isotopie en une seule, en imposant à nos déformations des restrictions supplémentaires. Les restrictions que nous imposons ici nous paraissent assez naturelles, et sans doute il est important de savoir si elles suffisent pour assurer l'existence des classes d'isotopie, question à laquelle nous répondons affirmativement.

$C[x(t), y(t), z(t)]$ et $C_1[x_1(t), y_1(t), z_1(t)]$, $0 \leq t \leq T$, étant deux noeuds, une déformation continue de C en C_1 s'écrit

$$X = X(t, \lambda), \quad Y = Y(t, \lambda), \quad Z = Z(t, \lambda), \quad \lambda \in [0, 1]$$

les fonctions X, Y, Z étant continues en (t, λ) dans le rectangle $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, 1]$, et telles que $X(t, 0) = x(t)$, $X(t, 1) = x_1(t)$, etc. Nous désignerons par C_λ la courbe fermée correspondant à $\lambda = \text{const}$, $t \in [0, T]$, et nous appellerons *trajectoire* toute courbe $t = \text{const}$, $\lambda \in [0, 1]$, décrite par un point de C pendant la déformation.

Appelons *déformation isotope* une déformation de cette nature, telle que pour chaque $\lambda = \text{const}$ la courbe $C_\lambda(X, Y, Z)$ soit un noeud, et que les tangentes à C_λ varient continûment pendant la déformation. Ceci revient à admettre que $\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$

sont des fonctions continues de (t, λ) dans le rectangle $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, 1]$.

Deux noeuds seront dits *isotopes* s'il existe une déformation isotope de l'un dans l'autre. On voit sans peine que l'isotopie est une relation d'équivalence. (Avec cette définition de l'isotopie, la difficulté signalée par MM. SEIFERT-THRELFALL se trouve éloignée, car, dans l'exemple du noeud que l'on „concentre“ en un point, il est clair que les tangentes au noeud, dans la région soumise à cette concentration, ne tendent pas toutes vers une direction unique.)

Nous aurons aussi à considérer, dans ce qui suit, des *noeuds lisses d'ordre 2*. Nous

appelons ainsi un noeud pour lequel $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ont partout des dérivées continues jusqu'à l'ordre 2, la courbe ayant en chaque point une courbure ϱ qui est une fonction continue de l'arc s . Ceci exclut les points à courbure infinie, qu'on peut appeler des *pics*. Ces points ne sont pas nécessairement des points de rebroussement. (Exemple: La développante

$$X = \frac{5t^2 + 2}{6} - \frac{1}{3\sqrt{1+t^2}}, \quad Y = \frac{2t^3 + t}{3} - \frac{t}{3\sqrt{1+t^2}}$$

passant par l'origine, de la courbe $x = t^2$, $y = t^3$; l'origine est un point à courbure infinie, malgré la continuité des dérivées premières et secondes de X et Y .) Nous aurons également l'occasion d'envisager des *noeuds lisses d'ordre n* , pour lesquels x , y , z ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre n , et ϱ , τ , $\frac{d\varrho}{ds}$, $\frac{d\tau}{ds}$, ..., $\frac{d^{n-2}\varrho}{ds^{n-2}}$, $\frac{d^{n-3}\tau}{ds^{n-3}}$ étant continues le long de la courbe. Nous appelons *déformation isotope d'ordre n* une déformation isotope telle que C_λ soit un noeud lisse d'ordre n , pour chaque $\lambda \in [0, 1]$, et que ϱ , τ , $\frac{d\varrho}{ds}$, ..., $\frac{d^{n-3}\tau}{ds^{n-3}}$ relatives à C_λ soient des fonctions continues de (t, λ) dans le rectangle $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, 1]$.

2. Déformation continue d'ordre 1. Déformation isométrique. Appelons *déformation continue d'ordre 1* une déformation (C_λ) de C_0 en C_1 telle que $X(t, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial t} X(t, \lambda)$, $Y(t, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial t} Y(t, \lambda)$, $Z(t, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial t} Z(t, \lambda)$ sont continues en (t, λ) dans le rectangle $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, 1]$. Ceci n'exclut pas l'existence de points multiples ou de rebroussement sur C_λ , pour certaines valeurs de λ , autres que 0 ou 1; une telle déformation n'est donc pas isotope, en général. L'arc sur la courbe C_λ est donné par

$$s(t, \lambda) = \int_0^t \left[\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt, \quad s(T, \lambda) = L(\lambda).$$

On voit que s et $\frac{\partial s}{\partial t}$ sont continues en (t, λ) , et $L(\lambda)$, longueur de la courbe C_λ , est continue en λ . En posant

$$(1) \quad \bar{X} = \frac{2\pi}{L(\lambda)} X(t, \lambda), \quad \bar{Y} = \frac{2\pi}{L(\lambda)} Y(t, \lambda), \quad \bar{Z} = \frac{2\pi}{L(\lambda)} Z(t, \lambda)$$

on obtient une famille de courbes $\bar{C}_\lambda$ ayant toutes la longueur 2π , l'arc sur $\bar{C}_\lambda$ étant $\bar{s} = \frac{2\pi}{L(\lambda)} s(t, \lambda)$. Un changement de paramètre, $t = \varphi(t', \lambda)$, où φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t'}$ sont continues en (t', λ) , φ étant croissante avec t' , transforme la déformation $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ en une autre, continue d'ordre 1, pour laquelle les courbes $\bar{C}_\lambda$ resteront inchangées, les trajectoires

seules étant modifiées. Tirons alors $t = \varphi(\bar{s}, \lambda)$ de $\bar{s} = \frac{2\pi}{L(\lambda)} s(t, \lambda)$ et introduisons dans

(1). On obtient une déformation continue d'ordre 1

$$\bar{X} = \bar{X}(\bar{s}, \lambda), \quad \bar{Y} = \bar{Y}(\bar{s}, \lambda), \quad \bar{Z} = \bar{Z}(\bar{s}, \lambda)$$

de $\bar{C}_0$ en $\bar{C}_1$, qui conserve la longueur d'un arc quelconque pris sur $\bar{C}_0$; cela signifie que deux trajectoires quelconques interceptent sur $\bar{C}_\lambda$ un arc dont la longueur est indépendante de λ .

Il est clair que toute homothétie de C est une déformation continue d'ordre 1, et même une déformation isotope lorsque C est un noeud. Ainsi, à chaque couple de noeuds reliés par une déformation continue d'ordre 1 on peut faire correspondre deux noeuds de même longueur 2π , homothétiques respectivement aux noeuds initialement donnés, que l'on peut déformer isométriquement l'un dans l'autre. On a l'énoncé:

Toute déformation continue d'ordre 1 peut être remplacée par une déformation isométrique continue d'ordre 1, précédée et suivie d'homothéties. Lorsque C_0 et C_1 sont isotopes, nous obtenons l'énoncé:

Toute déformation isotope peut être remplacée par une déformation isométrique et isotope, précédée et suivie par des homothéties.

On voit donc que, dans l'étude des déformations, isotopes ou seulement continues d'ordre 1, on peut se borner au cas des déformations isométriques, sans perdre la généralité.

3. Fonction discriminante. Valeurs critiques. Lorsqu'il s'agit d'exprimer analytiquement le fait qu'une courbe fermée C , lisse d'ordre 1, est un noeud, il est utile d'employer la fonction

$$\Phi(s, s') = S \left[\frac{x(s) - x(s')}{s - s'} \right]^2, \quad \Phi(s, s) = 1.$$

Ici, le symbole S indique une somme de 3 termes, le second et le troisième s'obtenant par remplacement de x par y , puis par z , dans le terme déjà écrit. Alors:

Pour que la courbe fermée C , lisse d'ordre 1, soit un noeud, il faut et il suffit qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que

$$\Phi(s, s') \geq a, \quad s \in [0, 2\pi], \quad s' \in [0, 2\pi].$$

En effet, si C est un noeud, la fonction Φ est continue dans le carré K : $s \in [0, 2\pi]$, $s' \in [0, 2\pi]$. C'est évident pour $s' \neq s$. Pour $s' = s$, on peut, grâce à nos hypothèses, appliquer le théorème des accroissements finis aux trois rapports qui figurent dans Φ . On a

$$x(u) - x(u') = (u - u') x'(u_1), \quad u_1 \in (u, u'); \\ u \rightarrow s, \quad u' \rightarrow s, \quad u_1 \rightarrow s, \quad x'(u_1) \rightarrow x'(s).$$

On a $S[x'(s)]^2 = 1$, C n'ayant pas de points de rebroussement. D'ailleurs $\Phi(s, s') \geq 0$, et, C n'ayant pas de point multiple, $\Phi(s, s')$ ne s'annule pas dans K , donc $\Phi(s, s') \geq a > 0$.

Réciproquement, si a existe, C ne possède aucun point multiple ou de rebroussement, donc C est un noeud.

Considérons maintenant une déformation continue d'ordre 1, (C_λ) , et attachons-lui la fonction discriminante

$$\Phi(s, s', \lambda) = S \left[\frac{X(s, \lambda) - X(s', \lambda)}{s - s'} \right]^2, \quad \Phi(s, s, \lambda) = 1.$$

On voit alors que:

Pour que la déformation (C_λ) , continue d'ordre 1, soit isotope, il faut et il suffit que

$$\Phi(s, s', \lambda) \geq a > 0, \quad s \in [0, 2\pi], \quad s' \in [0, 2\pi], \quad \lambda \in [0, 1].$$

Ce critère nous permettra de démontrer, dans la suite, certains théorèmes d'approximation.

Si (C_λ) n'est pas une déformation isotope, la courbe C_λ présente des points multiples ou de rebroussement, pour certaines valeurs de λ que nous appelons *valeurs critiques* de la déformation (C_λ) . Si λ_0 est une valeur critique, $\Phi(s, s', \lambda_0)$ s'annule en certains points du carré K .

Si λ_1 n'est pas une valeur critique, on a $\Phi(s, s', \lambda_1) \geq a_1 > 0$ dans K , C_{λ_1} est un noeud, et il existe un voisinage de λ_1 pour lequel C_λ est encore un noeud. Les valeurs non-critiques de λ forment donc un ensemble ouvert sur $[0, 1]$, et l'ensemble des valeurs critiques est fermé. Dans chaque intervalle contigu à cet ensemble, la déformation (C_λ) est isotope. On peut encore énoncer:

Toute déformation (C_λ) continue d'ordre 1 d'un noeud C_0 est isotope pour λ suffisamment petit, $0 \leq \lambda < \lambda_0$.

4. Classes d'isotopie. L'isotopie étant une relation d'équivalence, elle partage l'ensemble des noeuds en classes d'isotopie.

D'autre part, une autre définition des classes d'isotopie, que nous avons déjà mentionnée ([1], p. 3), a été donnée relativement aux noeuds qui sont des contours polygonaux fermés et simples, que nous appellerons *noeuds polygonaux*; suivant K. REIDEMEISTER, deux noeuds polygonaux sont isotopes si l'un d'eux résulte de l'autre par l'application des opérations Δ et Δ' (M_i et M_{i+1} étant deux sommets consécutifs du noeud, et P un point non situé sur le noeud et tel que l'aire du triangle $M_i P M_{i+1}$ n'ait en commun avec le noeud que le côté $M_i M_{i+1}$, l'opération Δ consiste à remplacer sur le noeud le côté $M_i M_{i+1}$ par le contour $M_i P M_{i+1}$; Δ' est l'inverse de l'opération Δ). Nous dirons que deux noeuds polygonaux sont *isotopes* (Δ) si l'un d'eux résulte de l'autre par l'application, répétée un nombre fini de fois, des opérations Δ et Δ' . La relation d'isotopie (Δ) partage l'ensemble des noeuds polygonaux en *types* de noeuds polygonaux, suivant la terminologie adoptée. Nous désignerons par $[\Pi]$ le type (ou classe d'isotopie (Δ)) qui contient le noeud polygonal Π .

Or, les noeuds polygonaux n'étant pas des noeuds dans notre acception, nos classes d'isotopie n'ont, au premier abord, rien de commun avec les types. Mais nous montrerons que:

A) Les types de noeuds polygonaux et les classes d'isotopie se correspondent d'une manière biunivoque, et peuvent donc être identifiés deux à deux. Nous démontrerons, à cet effet, les théorèmes suivants:

B) A chaque type $[\Pi]$ il correspond une classe d'isotopie et une seule.

C) A chaque classe d'isotopie il correspond un type $[\Pi]$ et un seul.

La correspondance à établir entre les types de noeuds polygonaux et les classes de noeuds lisses s'impose d'elle-même.

En effet, quoique un noeud polygonal ne soit pas un noeud lisse, puisque en chaque sommet la tangente fait défaut, à chaque noeud polygonal on peut faire correspondre des noeuds lisses, en arrondissant convenablement ses sommets.

AB et AC étant deux cotés consécutifs du noeud polygonal Π , menons un arc de cercle PQ tangent en P à AB et en Q à AC , et tel que l'aire du triangle curviligne PQA n'ait en commun avec Π que les segments AP et AQ . Désignons par $(*)$ l'opération qui consiste à remplacer sur Π le contour PAQ par l'arc de cercle PQ . En appliquant l'opération $(*)$ à chaque sommet de Π , on obtient des noeuds Π^* en nombre infini, puisque les rayons des arcs de cercle utilisés à chaque opération $(*)$ restent arbitraires entre 0 et une certaine limite supérieure positive. On voit facilement que:

D) Deux noeuds Π_1^* et Π_2^* déduits du noeud polygonal Π par des opérations $(*)$ sont isotopes.

En effet, Π_1^* et Π_2^* ne diffèrent qu'au voisinage des sommets de Π . Si $P_1 Q_1$ et $P_2 Q_2$ sont les arcs de cercle utilisés en appliquant $(*)$ au sommet A de Π , on amènera $P_2 Q_2$ sur $P_1 Q_1$ par une homothétie de centre A , accompagné d'une dilatation (ou contraction) linéaire des côtés rectilignes qui prolongent $P_2 Q_2$ sur Π_2^* , ce qui constitue visiblement une déformation isotope de Π_2^* en un noeud qui ne diffère plus de Π_1^* qu'au voisinage des sommets autres que A . En reprenant l'opération pour les sommets restants, on finira par obtenir une déformation isotope de Π_1^* en Π_2^* .

Π étant un noeud polygonal, nous dirons que un noeud C appartient à la classe (Π) si C est isotope à un noeud Π^* (donc à tous les noeuds Π^* déduits de Π par l'opération $(*)$). Quel que soit Π , la classe (Π) n'est pas vide, puisqu'elle contient au moins les noeuds Π^* . De cette manière, à chaque noeud polygonal Π se trouve attaché un type $[\Pi]$ et une classe d'isotopie (Π) . Mais

E) La classe (Π) ne dépend pas du choix de Π dans sa classe $[\Pi]$.

Il s'agit de vérifier que si Π_1 résulte de Π par une opération Δ , Π^* et Π_1^* sont isotopes. Il suffit pour cela de construire une déformation convenable de Π^* en Π_1^* , et nous croyons que notre figure 1 présente assez clairement une construction de cette nature. On en conclut que à chaque type $[\Pi]$ il correspond une classe (Π) au moins. Mais cette classe (Π) est unique, car, si C et C_1 sont isotopes à Π^* , C et C_1 sont isotopes entre eux, et appartiennent donc à une même classe (Π) .

Ainsi, B) est démontré.

Il nous reste à démontrer le théorème C) et

F) Chaque noeud C appartient effectivement à une seule classe (II).

A cet effet, nous ferons usage des lemmes suivants:

I. AB étant un arc de courbe lisse et tel que l'angle de deux tangentes (orientées dans le sens AB) quelconques à AB est $\leq \varepsilon < \frac{1}{4}\pi$.

1°. L'arc AB coupe toute sphère ayant son centre sur AB en deux points au plus.

2°. a et b étant deux points de AB , chaque tangente en un point de l'arc ab fait avec la corde ab un angle $\leq 2\varepsilon$.

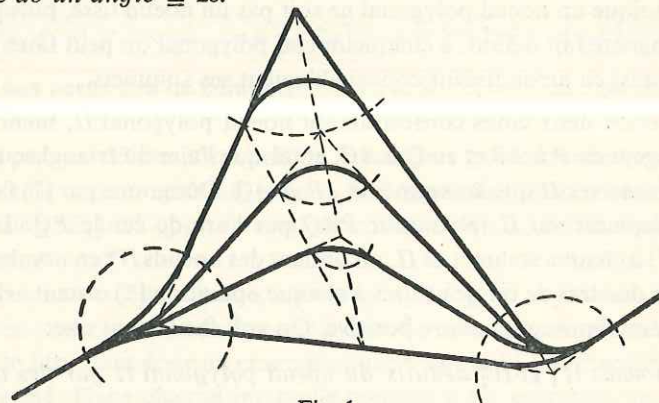


Fig. 1.

1°. Par le centre a de la sphère menons le plan normal à l'arc AB . On voit que l'arc AB tout entier est intérieur au cône ayant son sommet en a , son axe coïncidant avec la tangente en a à AB , et son demi-angle au sommet étant ε . En effet, en prenant cette tangente pour l'axe des x , et l'origine en a , on a

$$\frac{dx}{ds} > \cos \varepsilon, \quad x > s \cos \varepsilon \geq \overline{aM} \cdot \cos \varepsilon, \quad \frac{x}{\overline{aM}} \geq \cos \varepsilon,$$

M étant un point d'abscisse x pris sur l'arc AB , et s la longueur de l'arc aM . Dès lors, si l'arc AB coupait la calotte sphérique découpée par ce cône en plus d'un point, il existerait sur l'arc AB un point où la tangente ferait avec la tangente en O un angle $> \frac{1}{4}\pi$, ce qui est contradictoire.

2°. Toute corde ab , avec $b \in AB$, étant intérieure au cône déjà utilisé, la tangente en a fait avec la corde ab un angle $\leq \varepsilon$. Toute autre tangente à l'arc ab fait avec la tangente en a un angle $\leq \varepsilon$, donc elle fait avec la corde ab un angle $\leq 2\varepsilon$.

II. C étant un noeud et ε étant donné, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\pi$, il existe un nombre fini $R_\varepsilon(C) > 0$ tel que:

1°. Toute sphère de rayon $< R_\varepsilon(C)$, ayant son centre sur C , coupe C en deux points exactement.

2°. AB étant l'arc de C intérieur à une telle sphère, deux tangentes quelconques à AB font un angle $< \varepsilon$.

3°. Quel que soit $r > R_\varepsilon(C)$, il existe une sphère de rayon r , ayant son centre sur C , qui ne jouit pas de l'une au moins des propriétés 1° ou 2°.

Désignons par $u(s_1, s_2)$ l'angle formé par deux tangentes à C aux points $M(s_1)$ et $M(s_2)$. On a $\cos u = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$ avec $\alpha_1 = \alpha(s_1)$, etc., donc u est une fonction continue de (s_1, s_2) dans le carré $s_1 \in [0, L]$, $s_2 \in [0, L]$. De plus, $u(s, s) = 0$, donc $u(s_1, s_2) < \varepsilon$ pour $|s_1 - s_2| < \delta_\varepsilon$, avec $\delta_\varepsilon > 0$. Soit $S(s)$ une sphère de centre $M(s) \in C$, $M(s_1)$ le premier point d'intersection de C avec $S(s)$ et $M(s_2)$ le dernier de ces points (dans le sens des s croissants). Nous appellerons $M(s_1)$ et $M(s_2)$ points extrêmes d'intersection de C avec $S(s)$. Il suffit que $\varepsilon < \frac{1}{4}\pi$, $|s_1 - s_2| < \delta_\varepsilon$ pour que $u(s_1, s_2) < \varepsilon$, et C rencontre alors $S(s)$ en deux points exactement, conformément au lemme précédent. Mais on a $s_2 - s_1 < \delta_\varepsilon$ dès que le rayon de $S(s)$ est inférieur à un nombre $h_\varepsilon > 0$; car, si un tel nombre n'existait pas, on pourrait trouver les suites $\{s_n\}$ et $\{R_n\}$ avec $R_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, de manière que la sphère $S(s_n)$ de rayon R_n rencontre C aux points extrêmes $M(s'_n)$ et $M(s''_n)$ avec $s''_n - s'_n \geq \delta_\varepsilon$. De $\{s_n\}$ on peut extraire une suite partielle $\{s_{n_k}\}$ telle que $s_{n_k} \rightarrow s_0$, $s'_{n_k} \rightarrow s'_0$, $s''_{n_k} \rightarrow s''_0$ pour $k \rightarrow \infty$, et l'on aura encore $s'_0 \leq s_0 \leq s''_0$, $s''_0 - s'_0 \geq \delta_\varepsilon$. Or, la courbe C étant simple, la corde qui joint $M(s'_0)$ à $M(s''_0)$ a une longueur l non nulle. La corde $M(s'_{n_k})M(s''_{n_k})$ a donc une longueur $> \frac{1}{2}l$ pour $k > k_0$, ce qui est contradictoire puisque cette même longueur est $\leq 2R_{n_k}$, et $R_{n_k} \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$. En somme, il existe $h_\varepsilon > 0$ tel que toute sphère centrée en un point de C et de rayon $< h_\varepsilon$ jouit des propriétés 1° et 2°. Soit R_ε la borne supérieure des nombres H_ε tels que toute sphère centrée en un point de C et de rayon $< H_\varepsilon$ jouisse des propriétés 1° et 2°. On a $H_\varepsilon \geq h_\varepsilon > 0$, donc $R_\varepsilon > 0$. D'ailleurs, R_ε est fini, car, le noeud C étant à distance finie, toute sphère centrée en un point de C , de rayon assez grand, contient C à son intérieur et ne jouit donc pas de la propriété 1°. L'existence du nombre $R_\varepsilon(C)$ est ainsi établie.

III. C étant un noeud, et $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}\pi$, on peut choisir sur C un nombre fini de points $M_i = M(s_i)$, $i = 1, 2, \dots$, $s_i < s_{i+1}$, $s_{n+i} = s_i + L$ (L = longueur de C), suffisamment rapprochés, de manière que:

1°. Les cordes $M_i M_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ forment un noeud polygonal dont tous les angles sont inférieurs à 2ε (nous entendons par angle au sommet M_i l'angle des vecteurs $M_{i-1}M_i$ et $M_i M_{i+1}$).

2°. Le plan normal à un côté $M_i M_{i+1}$ en un point quelconque μ de ce côté coupe l'arc de courbe $C(M_i M_{i+1})$ en un seul point ν , et les segments $\mu\nu$ forment une bande de surface réglée (étranglée aux points M_i) qui n'a pas de points multiples.

Partageons C en N arcs égaux, par les points $M_i = M(s_i)$, avec $s_{i+1} - s_i = \eta = L/N$, et prenons N assez grand pour que $\eta < \frac{1}{2}R_\varepsilon(C)$. Soit $S'_\eta(s_i)$ la sphère de rayon η , centrée en M_i . Alors C coupe $S'_\eta(s_i)$ en deux points, et deux tangentes quelconques à l'arc de C intérieur à cette sphère font un angle $< \varepsilon$. Les points M_{i-1} et M_{i+1} sont intérieurs à $S'_\eta(s_i)$, tandis que les autres points M_j , $|i - j| \geq 2$, lui sont extérieurs; il suffit d'envisager les points M_j , $j = i + 2, \dots, i + p$ qui suivent M_{i+1} (dans le sens

des s croissants) et sont strictement intérieurs à la sphère $S(s_i)$ de rayon $R_\varepsilon(C)$, centrée en M_i ; en désignant par l_j la longueur de la corde $M_i M_j$, on a, avec $j > i$,

$$(j-i)\eta = s_j - s_i = \int_0^{l_j} \frac{dl}{\cos \varphi} \leq \int_0^{l_j} \frac{dl}{\cos \varepsilon} = \frac{l_j}{\cos \varepsilon},$$

$$(j-i)\eta \cos \varepsilon \leq l_j \leq (j-i)\eta,$$

φ étant l'angle de la tangente en un point de l'arc $M_i M_j$ avec sa corde. Or, $\varphi < \varepsilon$, $\cos \varepsilon > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, donc $l_j \geq \eta\sqrt{3}$ dès que $j-i > 1$. Un calcul analogue montre que les points M_j , $i-q \leq j \leq i-2$, qui précèdent M_{i-1} et sont strictement intérieurs à la sphère $S(s_i)$, sont aussi extérieurs à $S'_\eta(s_i)$. En somme, M_{i-1} , M_i , M_{i+1} sont les seuls points M_j intérieurs à $S'_\eta(s_i)$ (ou situés sur la surface de cette sphère, M_i excepté). (V. Fig. 2.)

Ensuite, les côtés $M_{i-1}M_i$ et M_iM_{i+1} font avec la tangente à C en M_i des angles $< \varepsilon$. Donc l'angle de ces côtés est $< 2\varepsilon$, et ceci a lieu pour chaque i . Considérons le demi-cône de sommet M_i , demi-angle au sommet ε , ayant pour axe la tangente à C en M_i et contenant M_{i+1} à son intérieur. Soit D_i le domaine que l'on obtient en coupant ce demi-cône par la sphère de centre M_i , passant par M_{i+1} . Alors D_i contient l'arc $C(M_i M_{i+1})$ et sa corde, et, étant un domaine convexe, il contient aussi la bande de surface réglée générée par les segments $\mu\nu$, avec $\mu \in M_i M_{i+1}$.

De même, considérons le demi-cône de sommet M_i , opposé à celui que nous venons de considérer, et soit D'_i le domaine commun à ce demi-cône et à la sphère de centre M_i , passant par M_{i-1} . Alors D'_i contient $C(M_{i-1}M_i)$ et sa corde, donc aussi la bande de surface réglée correspondante. Or, D_i et D'_i étant disjoints, on voit que les bandes de surface réglée correspondant à deux côtés consécutifs n'ont en commun que le sommet commun à ces côtés. D'ailleurs, D_i et D'_i sont intérieurs à $S'_\eta(s_i)$.

La tangente à C en M_i fait avec toute tangente à $C(M_i M_{i+p})$ un angle $< \varepsilon$. Toute corde ab ayant ses extrémités sur cet arc fait avec la tangente à C en a un angle $< \varepsilon$; donc ab fait avec la tangente en M_i un angle $< 2\varepsilon$, donc chaque côté $M_j M_{j+1}$, $i+1 \leq j \leq i+p-1$ fait avec cette tangente un angle $< 2\varepsilon$. De même, la tangente à C en M_j fait avec $M_i M_j$ un angle $< 2\varepsilon$. L'arc $C(M_j M_{j+1})$ et sa corde sont intérieurs au demi-cône de sommet M_j , demi-angle au sommet ε , ayant pour axe la tangente à C en M_j , et contenant M_{j+1} à son intérieur. Si $3\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$, le domaine intérieur à ce demi-cône n'a pas de point commun avec l'intérieur de la sphère de centre M_i passant par M_j . La sphère de centre M_i , passant par M_{j+1} , coupe dans ce demi-cône un domaine convexe qui contient $C(M_j M_{j+1})$ et sa corde, donc aussi toute la bande de surface réglée formée par les segments $\mu\nu$ avec $\mu \in M_j M_{j+1}$. Pour $j = i+1$, on voit que ce domaine ne coupe ni D_i , ni D'_i . Pour $i+2 \leq j \leq i+p-1$, ce domaine est entièrement extérieur à la sphère de centre M_i passant par M_j ; on voit donc que, pour $i+1 \leq j \leq i+p-1$, $M_j M_{j+1}$ ne rencontre ni $M_i M_{i+1}$ ni $M_{i-1}M_i$, qui sont intérieurs à cette sphère, et l'on peut en dire autant de la bande de surface réglée $\mu\nu$ correspondant à $M_j M_{j+1}$ et celle qui correspond à $M_i M_{i+1}$ et $M_{i-1}M_i$. Soient $M_{i-1}, \dots, M_{i-q}$ les sommets qui précèdent M_i et sont intérieurs à la sphère $S(s_i)$. Le même

raisonnement montre que, pour $i-q \leq j \leq i-2$, $M_j M_{j+1}$ et la bande de surface réglée correspondante ne rencontrent pas $M_{i-1}M_i$ et $M_i M_{i+1}$, et les bandes correspondantes. Pour les autres valeurs de j , une extrémité de $M_j M_{j+1}$ au moins est extérieure à $S(s_i)$, ou située sur $S(s_i)$, l'autre est toujours extérieure à la sphère $S'_\eta(s_i)$ de rayon $\frac{1}{2}R_\varepsilon(C)$. On voit donc que l'arc $C(M_j M_{j+1})$ et sa corde sont intérieurs à la sphère $S'_\eta(s_j)$ de rayon $\frac{1}{2}R_\varepsilon(C)$, ayant son centre en M_j , la distance $M_i M_j$ étant $\geq R_\varepsilon(C)$. Les sphères $S'_\eta(s_i)$ et $S'_\eta(s_j)$ sont donc disjointes, et la bande de surface réglée correspondant à $C(M_j, M_{j+1})$ ne peut rencontrer la bande analogue correspondant à $C(M_i, M_{i+1})$, pour $|i-j| \geq 2$. Il est clair que chaque pareille bande est dépourvue de points multiples, et notre lemme est établi.

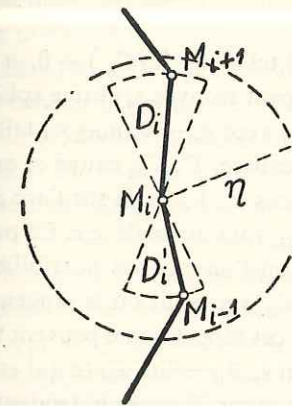


Fig. 2.

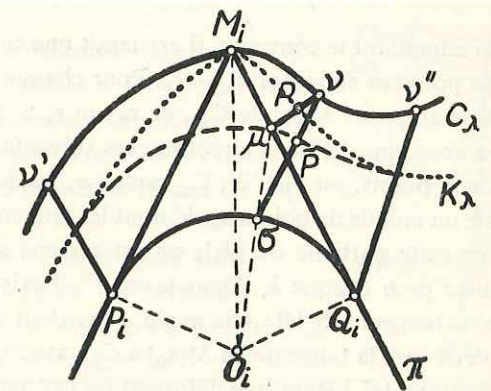


Fig. 3.

Montrons maintenant que:

G) Chaque noeud C appartient à une classe (Π) au moins.

Construisons un noeud polygonal Π inscrit à C , conformément au lemme III. Sur chaque segment $\mu\nu$, orthogonal à $M_i M_{i+1}$ et s'appuyant sur C , construisons le point P_λ qui partage le segment $\mu\nu$ dans le rapport λ .

Lorsque μ varie sur $M_i M_{i+1}$, le point P_λ décrit un arc de courbe lisse $K_\lambda(M_i, M_{i+1})$, d'extrémités M_i et M_{i+1} , et sans points multiples. Ces arcs forment une courbe fermée K_λ , lisse à l'exception des points M_i . La courbe K_λ est simple, puisque deux arcs $K_\lambda(M_i, M_{i+1})$ ne peuvent avoir un point commun, conformément au lemme III. Enfermons maintenant chaque sommet M_i dans un voisinage sphérique, et choisissons ces voisinages assez petits pour qu'ils soient disjoints deux à deux. A l'intérieur du voisinage de M_i traçons un arc de cercle $P_i Q_i$ tangent aux côtés $M_{i-1}M_i$ et $M_i M_{i+1}$, de manière que les points v' et v'' de C , qui se projettent orthogonalement en P_i et Q_i respectivement, soient aussi intérieurs au même voisinage. Nous modifierons la courbe K_λ au voisinage de M_i de manière à arrondir son point anguleux M_i . Soit O_i le centre du cercle $P_i Q_i$. μ étant un point du segment $M_i O_i$ et ν son correspondant sur C , joignons μ à O_i , et soit σ le point de rencontre de μO_i avec l'arc $P_i Q_i$. Remplaçons

le segment $\mu\nu$ par $\sigma\nu$ et le point P_λ par $\bar{P}_\lambda$ qui partage le segment $\sigma\nu$ dans le rapport λ . En opérant de même pour les points μ pris sur $P_i M_i$, on remplace la bande de surface réglée par une autre qui n'est plus étranglée en M_i , et la courbe K_λ ainsi modifiée n'a plus de point anguleux en M_i . En répétant cette construction au voisinage de chaque sommet M_i , on obtient $\bar{K}_\lambda$, qui est un noeud pour chaque $\lambda \in [0, 1]$. On a d'ailleurs $\bar{K}_0 = C$, $\bar{K}_1 = \Pi^*$, et $(\bar{K}_\lambda)$ représente bien une déformation isotope de C en Π^* , donc le théorème est établi. V. Fig. 3.

Afin d'obtenir les théorèmes C) et F), nous aurons à appliquer le nouveau lemme suivant:

IV. (C_λ) , $\lambda \in [0, 1]$ étant une déformation isotope, $R_e(C_\lambda)$ a un minimum positif par rapport à λ , $R_e^* = \inf_{\lambda} R_e(C_\lambda) > 0$.

En admettant le contraire, il existerait une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $R_e(C_{\lambda_n}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Nous pouvons supposer $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Pour chaque λ_n on peut trouver s_n et une sphère σ_n centrée au point $M(s_n)$ de C_{λ_n} , de rayon $r_n > R_e(C_{\lambda_n})$, avec $r_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, telle que l'une au moins des deux circonstances suivantes soit réalisée: 1°. C_{λ_n} coupe σ_n en plus de deux points, ou bien 2°. C_{λ_n} coupe σ_n en deux points a_n, b_n , mais sur l'arc $a_n b_n$ il existe un couple de points a'_n, b'_n dont les tangentes à C_{λ_n} font un angle $\geq \varepsilon$. En passant à une suite partielle de $\{\lambda_n\}$, on est ramené au cas où l'une de ces possibilités est réalisée pour chaque λ_n . Dans le cas 1°, il existe sur C_{λ_n} un point où la tangente fait avec la tangente en $M(s_n)$ un angle $> \frac{1}{3}\pi$. Pour $n \rightarrow \infty$, ces tangentes ne peuvent tendre les deux vers la tangente en $M(s_0)$ à C_{λ_0} , avec $s_0 = \lim s_n$, $\lambda_0 = \lim \lambda_n$, ce qui est contradictoire, (C_λ) étant une déformation isotope. Dans le cas 2°, a_n et b_n tendent aussi vers $M(s_0)$, de même que a'_n et b'_n , et l'on voit encore que les tangentes à C_{λ_n} en ces points, qui font un angle $\geq \varepsilon$, ne peuvent tendre les deux vers la tangente en $M(s_0)$ à C_{λ_0} .

Le nombre R_e^* jouit évidemment de la propriété suivante:

Toute sphère de rayon $< R_e^*$, ayant son centre sur un noeud C_λ , coupe C_λ en deux points exactement, et, sur l'arc de C_λ intérieur à cette sphère, les tangentes en deux points quelconques font un angle $< \varepsilon$.

Passons à la démonstration du théorème C).

A chaque classe (Π) il correspond une classe $[\Pi]$ et une seule.

Cet énoncé équivaut au suivant:

H) Si Π^* et Π_1^* sont isotopes, les noeuds polygonaux Π et Π_1 sont isotopes (Δ) .

De plus, de G) et H) le théorème F) résulte aussi, et de cette manière le théorème A) sera établi.

Pour démontrer H), il suffira de construire une suite finie de noeuds polygonaux permettant de passer de Π à Π_1 par les opérations Δ et Δ' . Les noeuds Π^* et Π_1^* attachés à Π et Π_1 peuvent être construits d'une infinité de manières, comme nous l'avons déjà remarqué. Nous construirons Π^* à partir de Π comme suit: Enfermons chaque sommet M_i et Π dans un voisinage sphérique $V(M_i)$ tel que l'intérieur de cette sphère

n'ait en commun avec Π que les points situés sur deux de ses rayons. Prenons les rayons de ces sphères assez petits pour qu'elles soient disjointes deux à deux. En appliquant l'opération $(*)$ au sommet M_i , nous pourrions arrondir ce sommet par un arc de cercle $P_i Q_i$ intérieur au voisinage $V(M_i)$. Nous observerons cette condition pour chaque sommet M_i de Π , et de même en passant de Π_1 à Π_1^* .

La déformation isotope reliant Π^* à Π_1^* peut être remplacée par une déformation isotope et isométrique, précédée et suivie d'homothéties. Il suffit de démontrer le théorème dans le cas d'une déformation isotope et isométrique. En effet, on voit facilement que si deux noeuds polygonaux sont homothétiques, ils sont isotopes (Δ) ; car, si $\bar{\Pi}$ est homothétique à Π dans le rapport k , on pourra construire une suite finie de noeuds polygonaux intermédiaires, homothétiques à Π , deux tels noeuds consécutifs étant sans point commun. On peut alors, par application des opérations Δ et Δ' , établir l'isotopie (Δ) de deux noeuds consécutifs, donc de Π et $\bar{\Pi}$. Ainsi, nous pouvons nous placer dans l'hypothèse d'une déformation isotope et isométrique reliant Π^* et Π_1^* .

La longueur commune des courbes C_λ étant égale à 2π , partageons cet intervalle en N intervalles égaux, par les points $M(s_i)$, $s_{i+1} - s_i = \eta = 2\pi/N$, et prenons N assez grand pour que $\eta < \frac{1}{2}R_e^*$. Soit $S'_\eta(s_i)$ la sphère de rayon η , centrée sur $M_i = M(s_i)$. La courbe C_λ coupe $S'_\eta(s_i)$ en deux points, et deux tangentes quelconques à l'arc de C_λ intérieur à cette sphère font un angle $< \varepsilon$. Les points M_{i-1} et M_{i+1} sont intérieurs à $S'_\eta(s_i)$, tandis que les autres points M_j , $|i - j| \geq 2$ qui sont intérieurs à la sphère $S(s_i)$ de rayon $R_e(C_\lambda)$, centrée en M_i , lui sont extérieurs. En prenant $\varepsilon < \frac{1}{6}\pi$, les points $M_{i+2}, \dots, M_{i+p}$ qui suivent M_{i+1} et sont intérieurs à la sphère $S(s_i)$, de même que les points $M_{i-q}, \dots, M_{i-2}$ qui précèdent M_{i-1} et se trouvent dans $S(s_i)$, sont extérieurs à $S'_\eta(s_i)$. On a vu, d'ailleurs, que les autres côtés $M_j M_{j+1}$, ayant l'une au moins de leurs extrémités à l'extérieur de $S(s_i)$, sont extérieurs à $S'_\eta(s_i)$. Ceci a lieu quel que soit $\lambda \in [0, 1]$ (voir Lemme III).

Soit N_i le milieu de l'arc $C_\lambda(M_i, M_{i+1})$, ayant donc l'abscisse curviligne $s'_i = s_i + \frac{1}{2}\eta$. Sur un noeud voisin $C_{\lambda'}$, prenons le point M'_i , d'abscisse curviligne s'_i , et posons les conditions

$$(2) \quad M_i M'_i < \eta, \quad M_{i+1} M'_i < \eta. \quad (\text{V. Fig. 4.})$$

On a

$$\begin{aligned} M_i M'_i &\leq M_i N_i + N_i M'_i \leq \frac{1}{2}\eta + N_i M'_i, \\ M_{i+1} M'_i &\leq M_{i+1} N_i + N_i M'_i \leq \frac{1}{2}\eta + N_i M'_i. \end{aligned}$$

Les inégalités (2) seront donc vérifiées lorsque $N_i M'_i < \frac{1}{2}\eta$, ce qui s'écrit

$$[X(s_i, \lambda) - X(s'_i, \lambda')]^2 + [Y(s_i, \lambda) - Y(s'_i, \lambda')]^2 + [Z(s_i, \lambda) - Z(s'_i, \lambda')]^2 < \frac{1}{4}\eta^2.$$

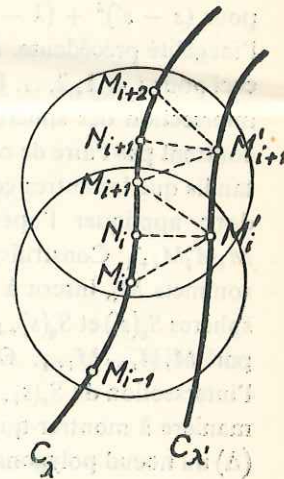


Fig. 4.

Or, cette inégalité est vérifiée pour $|\lambda' - \lambda| < \zeta(\eta)$, quel que soit i .

En effet, on a, vu la continuité uniforme de X, Y, Z

$$|X(s, \lambda) - X(s', \lambda')| < \frac{\eta}{2\sqrt{3}}, \quad |Y(s, \lambda) - Y(s', \lambda')| < \frac{\eta}{2\sqrt{3}},$$

$$|Z(s, \lambda) - Z(s', \lambda')| < \frac{\eta}{2\sqrt{3}}$$

pour $(s - s')^2 + (\lambda - \lambda')^2 < \zeta^2(\eta)$. Il suffit de faire ici $s' = s = s'_i$ pour retrouver l'inégalité précédente. Ainsi, les inégalités (2) seront vérifiées pour $|\lambda' - \lambda| < \zeta(\eta)$, et ceci pour $i = 1, 2, \dots$. Il en résulte que le triangle $M_i M'_i M_{i+1}$ est intérieur au domaine intersection des sphères $S'_\eta(s_i)$ et $S'_\eta(s_{i+1})$. Les côtés $M_{i-1} M_i$ et $M_{i+1} M_{i+2}$ ne rencontrent pas l'aire de ce triangle, les angles qu'ils font avec $M_i M_{i+1}$ étant $< 2\varepsilon < \frac{1}{3}\pi$, tandis que les autres côtés $M_j M_{j+1}$ sont extérieurs au domaine en question. On peut donc appliquer l'opération Δ , en remplaçant le côté $M_i M_{i+1}$ par le contour $M_i M'_i M_{i+1}$. Construisons les points N_i et M'_i pour chaque i , et le noeud polygonal de sommets M'_i , inscrit à C_λ . Le triangle $M'_i M_{i+1} M'_{i+1}$ est intérieur à l'intersection des sphères $S'_\eta(s'_i)$ et $S'_\eta(s'_{i+1})$, et, en appliquant l'opération Δ , on pourra remplacer $M'_i M_{i+1}$ par $M'_i M'_{i+1} M_{i+1}$. On passera ensuite au triangle $M_{i+1} M'_{i+1} M_{i+2}$, intérieur à l'intersection de $S'_\eta(s'_{i+1})$, $S'_\eta(s'_{i+2})$, et ainsi de suite alternativement. On arrive de cette manière à montrer que le noeud polygonal de sommets M_i , inscrit à C_λ , est isotope (Δ) au noeud polygonal de sommets M'_i , inscrit à C_λ . En partageant l'intervalle $[0, 1]$ par des points λ_k en nombre fini, tels que $\lambda_{k+1} - \lambda_k < \zeta(\eta)$, on pourra conclure que le noeud polygonal $\bar{\Pi}$, inscrit à Π^* , dont les sommets partagent la courbe Π^* en arcs de longueur η , est isotope (Δ) à un noeud polygonal analogue $\bar{\Pi}_1$ inscrit à Π^* , en appliquant successivement les opérations indiquées, à chaque paire $C_{\lambda_k}, C_{\lambda_{k+1}}$. Il reste à montrer que l'on peut faire en sorte que $\bar{\Pi}$ soit isotope (Δ) à Π , et $\bar{\Pi}_1$ à Π_1 , et le théorème sera ainsi démontré.

Rappelons-nous que, en construisant Π^* à partir de Π , nous avons observé une restriction. Conformément à celle-ci, chaque sommet μ_i de Π peut être enfermé dans une sphère Σ_i dont l'intérieur n'a en commun avec Π que deux rayons de cette sphère, et qui contient en entier l'arc $P_i Q_i$ ayant servi à arrondir le sommet μ_i ; de plus, les sphères Σ_i sont disjointes deux à deux. Dans ces conditions, on voit que pour $\eta = 2\pi/N$ assez petit, les côtés de $\bar{\Pi}$ qui ont au moins une extrémité sur $P_i Q_i$ sont situés à l'intérieur de Σ_i . Soient $M_1 M_2, M_2 M_3, \dots, M_{l-1} M_l$ ces côtés, M_1 étant situé sur $\mu_{i-1} \mu_i$ et M_l sur $\mu_i \mu_{i+1}$. L'aire du polygone $M_1 M_2 \dots M_l \mu_i M_1$ n'a en commun avec Π que les segments $\mu_i M_1$ et $\mu_i M_l$. On peut donc, en appliquant les opérations Δ et Δ' , remplacer sur Π le contour $M_1 \mu_i M_l$ par $M_1 M_2 \dots M_l$, donc Π et $\bar{\Pi}$ sont isotopes (Δ), de même que Π_1 et $\bar{\Pi}_1$.

5. Approximation algébrique d'un noeud. La formation effective d'un système d'invariants d'isotopie, permettant de caractériser chaque classe d'isotopie à l'aide de la courbure $\varrho(s)$ et de la torsion $\tau(s)$, ainsi que de leurs dérivées successives par rapport

à l'arc s , exige l'existence et la continuité de toutes ces fonctions. Il est avantageux, à cette fin, de prendre comme représentants des classes d'isotopie les noeuds algébriques. Le théorème suivant établit l'existence des noeuds algébriques dans chaque classe d'isotopie:

Chaque noeud peut être approché indéfiniment par des noeuds algébriques de même classe d'isotopie.

Notre démonstration emploie les développements de Fourier des cosinus directeurs de la tangente au noeud C , supposé de longueur 2π .

On a, s étant l'arc sur C ,

$$\alpha \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ks + b_k \sin ks), \quad \beta \sim \sum (a'_k \cos ks + b'_k \sin ks),$$

$$\gamma \sim \sum (a''_k \cos ks + b''_k \sin ks).$$

Les fonctions $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ étant continues et de période 2π , on a

$$(3) \quad \alpha = \lim u_n, \quad \beta = \lim v_n, \quad \gamma = \lim w_n, \quad n \rightarrow \infty$$

uniformément, u_n, v_n, w_n étant les sommes de Féjer

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos ks + b_k \sin ks), \quad v_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a'_k \cos ks + b'_k \sin ks),$$

$$w_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a''_k \cos ks + b''_k \sin ks).$$

On a, par intégration,

$$x(s) = \lim U_n, \quad y(s) = \lim V_n, \quad z(s) = \lim W_n, \quad n \rightarrow \infty$$

uniformément, avec

$$U_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right) (-b_k \cos ks + a_k \sin ks), \dots$$

Considérons la courbe C_n représentée par

$$x_n(s) = U_n, \quad y_n(s) = V_n, \quad z_n(s) = W_n.$$

C'est une courbe algébrique unicursale; nous montrerons que, pour n suffisamment grand, cette courbe est un noeud isotope à C . Il suffit de former une famille (C_μ) de courbes fermées sans points multiples ou de rebroussement, dépendant continûment du paramètre μ , et contenant les courbes C et C_n . De plus, il sera nécessaire que la tangente à C_μ varie continûment en fonction de μ et s . Posons, à cet effet,

$$(4) \quad x_\mu = x_n + (\mu - n)(x_{n+1} - x_n), \quad y_\mu = y_n + (\mu - n)(y_{n+1} - y_n),$$

$$z_\mu = z_n + (\mu - n)(z_{n+1} - z_n)$$

avec $n = [\mu] =$ partie entière de μ . En posant $r_\mu = \mu - [\mu]$, on a

$$0 \leq r_\mu < 1, \quad \mu - n = r_\mu.$$

Les courbes C_μ , définies par (4), interpolent toute la suite des courbes C_n lorsque μ varie de 1 à $+\infty$. L'interpolation étant linéaire par segments, on voit que x_μ, y_μ, z_μ tendent uniformément vers $x(s), y(s), z(s)$ respectivement, lorsque $\mu \rightarrow +\infty$ d'une manière continue. De plus, x'_μ, y'_μ, z'_μ tendent uniformément vers α, β, γ respectivement, l'accent désignant une dérivation par rapport à s . Formons la fonction discriminante de cette déformation

$$(5) \quad \Phi(s, s', \mu) = \left(\frac{x_\mu(s) - x_\mu(s')}{s - s'} \right)^2 + \left(\frac{y_\mu(s) - y_\mu(s')}{s - s'} \right)^2 + \left(\frac{z_\mu(s) - z_\mu(s')}{s - s'} \right)^2, \quad s \neq s',$$

$$\Phi(s, s, \mu) = [x'_\mu(s)]^2 + [y'_\mu(s)]^2 + [z'_\mu(s)]^2$$

et la fonction

$$\Psi(s, s') = \Phi(s, s', +\infty) =$$

$$= \left(\frac{x(s) - x(s')}{s - s'} \right)^2 + \left(\frac{y(s) - y(s')}{s - s'} \right)^2 + \left(\frac{z(s) - z(s')}{s - s'} \right)^2, \quad s \neq s',$$

$$\Psi(s, s) = 1.$$

On doit remarquer que, sur C_μ , s est un paramètre qui ne représente pas la longueur d'arc mesurée sur cette courbe.

La fonction $\Psi(s, s')$ est continue dans le caré K : $s \in [0, 2\pi]$, $s' \in [0, 2\pi]$ et l'on a $\Psi(s, s') \geq a > 0$ dans le carré fermé K , puisque la courbe C est un noeud (voir no. 3). On a en chaque point (s, s') de K

$$\Phi(s, s', \mu) \rightarrow \Psi(s, s'), \quad \mu \rightarrow +\infty$$

puisque $x_\mu(s) \rightarrow x(s)$, $x'_\mu(s) \rightarrow x'(s)$, ...

Considérons le prisme indéfini de base K , dont la hauteur s'étend le long du demi-axe positif $O\mu$, pris perpendiculairement à Os et Os' . La fonction $\Phi(s, s', \mu)$ est continue en tout point à distance finie appartenant à ce prisme, et il suffira de montrer que $\Phi(s, s', \mu)$ est continue même pour $\mu = +\infty$, donc en tout point du prisme fermé $(s, s') \in K$, $\mu \in [0, +\infty]$. On aura alors $\Phi(s, s', \mu) > \frac{1}{2}a$ pour $\mu > \mu_0$, et le théorème sera démontré, puisque toutes les courbes C_μ seront dépourvues de points multiples ou de rebroussement pour $\mu > \mu_0$, donc C_n sera un noeud isotope à C pour $n > \mu_0$.

Pour établir la continuité de $\Phi(s, s', \mu)$ en chaque point de la „base supérieure“ $\mu = +\infty$ du prisme, il suffira de montrer que

$$(6) \quad |\Phi(u, u', \mu) - \Psi(s, s')| < \varepsilon \quad \text{si} \quad (u - s)^2 + (u' - s')^2 < \eta^2(\varepsilon), \quad \mu > \mu_1(\varepsilon).$$

Or, on a

$$x_\mu(s) = (1 - r_\mu) x_n(s) + r_\mu x_{n+1}(s), \dots$$

$$\Phi(u, u', \mu) = (1 - r_\mu)^2 S \left[\frac{x_n(u) - x_n(u')}{u - u'} \right]^2 + r_\mu^2 S \left[\frac{x_{n+1}(u) - x_{n+1}(u')}{u - u'} \right]^2 +$$

$$+ 2r_\mu(1 - r_\mu) S \left[\frac{x_n(u) - x_n(u')}{u - u'} \cdot \frac{x_{n+1}(u) - x_{n+1}(u')}{u - u'} \right]$$

la lettre S indiquant une sommation de termes analogues au terme déjà écrit, que l'on obtient en y substituant y , puis z , à la place de x . Posons

$$x(s) = x_n(s) + X_n(s), \quad \alpha(s) = x'_n(s) + X'_n(s), \quad \dots$$

On a

$$\frac{x_n(u) - x_n(u')}{u - u'} = \frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - \frac{X_n(u) - X_n(u')}{u - u'} =$$

$$= \frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_n(u_1), \quad u_1 \in (u, u');$$

$$\Phi(u, u', \mu) = (1 - r_\mu)^2 S \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_n(u_1) \right]^2 +$$

$$+ r_\mu^2 S \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_{n+1}(u_2) \right]^2 +$$

$$+ 2r_\mu(1 - r_\mu) S \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_n(u_1) \right] \left[\frac{x(u) - x(u')}{u - u'} - X'_{n+1}(u_2) \right] =$$

$$= \psi(u, u') + \text{termes contenant en facteur } X'_n \text{ ou } Y'_n, Z'_n, X'_{n+1}, Y'_{n+1}, Z'_{n+1}.$$

Or, $X'_n, \dots, Z'_{n+1}$ seront inférieurs à un nombre positif arbitrairement petit pourvu que μ soit assez grand, et leurs coefficients dans l'expression donnée plus haut restent bornés uniformément dans K , tandis que $\Psi(u, u') - \Psi(s, s')$ sera inférieure à un nombre arbitrairement petit si $|u - s|$ et $|u' - s'|$ sont assez petites, donc (6) est vérifié. La courbe C_μ sera dépourvue de points de rebroussements pour μ assez grand, puisque $\Phi(s, s, \mu) \rightarrow 1$, $\mu \rightarrow +\infty$.

Le théorème est ainsi établi. Chaque noeud peut être approché d'aussi près que l'on veut par un noeud algébrique de même classe d'isotopie. Remarquons que la possibilité de cette approximation a été établie par M. H. Seifert [3] pour le cas général des variétés, mais en admettant l'existence et la continuité des dérivées secondes des coordonnées. Dans le cas des courbes, notre démonstration montre, de plus, la possibilité de l'approximation par des courbes algébriques unicursales.

6. Approximation polynômiale d'une déformation isotope. On a vu que, dans l'étude des déformations continues d'ordre 1, on peut, sans perdre la généralité, se borner à l'étude des déformations isométriques, qui s'imposent aussi par leur signification géométrique naturelle.

Ces simplifications sont des conséquences de nos hypothèses sur l'existence et la continuité des dérivées $\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$. Mais l'existence des dérivées par rapport à λ n'ayant pas été supposée, la structure des trajectoires d'une déformation reste a priori aussi compliquée que le comporte la notion d'arc de courbe continue la plus générale.

L'intérêt du théorème suivant réside dans la possibilité de remplacer toute déformation isotope de C_0 en C_1 par une déformation isotope de C_0 en C_1 telle que $X(t, \lambda)$, $Y(t, \lambda)$, $Z(t, \lambda)$ soient des polynômes en λ :

Toute déformation isotope de C_0 en C_1 peut être approchée d'autant près que l'on veut par une déformation isotope polynomiale en λ , de C_0 en C_1 .

Supposons que $X(t, \lambda)$, $Y(t, \lambda)$, $Z(t, \lambda)$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, 1]$ représente une déformation isotope. Nous utiliserons les polynômes d'approximation de S. BERNSTEIN en posant

$$(7) \quad X_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^n X\left(t, \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k},$$

$$Y_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^n Y\left(t, \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}, \quad Z_n(t, \lambda) = \dots$$

Désignons par C_λ^n la courbe fermée représentée par (X_n, Y_n, Z_n) pour chaque $\lambda = \text{const.}$ On a bien $C_0^n = C_0$, $C_1^n = C_1$, et (7) représente une déformation de C_0 en C_1 . En posant

$$\Phi(t, t', \lambda) = S \left[\frac{X(t, \lambda) - X(t', \lambda)}{t - t'} \right]^2, \quad \Phi(t, t, \lambda) = S \left[\frac{\partial}{\partial t} X(t, \lambda) \right]^2$$

on aura $\Phi(t, t', \lambda) \geq a > 0$, puisque C_λ est un noeud, pour $\lambda \in [0, 1]$. Pour montrer que (7) est une déformation isotope si n est assez grand, formons

$$\Phi_n(t, t', \lambda) = S \left[\frac{X_n(t, \lambda) - X_n(t', \lambda)}{t - t'} \right]^2, \quad \Phi_n(t, t, \lambda) = S \left[\frac{\partial}{\partial t} X_n(t, \lambda) \right]^2.$$

On a uniformément, pour $t \in [0, T]$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$(8) \quad |X(t, \lambda) - X_n(t, \lambda)| < \varepsilon, \quad |Y(t, \lambda) - Y_n(t, \lambda)| < \varepsilon, \quad |Z(t, \lambda) - Z_n(t, \lambda)| < \varepsilon$$

pour $n > N(\varepsilon)$. En effet, en reprenant la démonstration de la convergence uniforme des polynômes de Bernstein $B_n(x)$, attachés à une fonction $f(x)$, continue pour $x \in [0, 1]$, vers cette même fonction, démonstration qui est élémentaire [4], on constate sans peine qu'elle reste valable pour une fonction $f(x, t)$ continue en (x, t) pour $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$, les polynômes $B_n(x, t)$ étant formés par rapport à la seule variable x . En dérivant (7) on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} X_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial}{\partial t} X\left(t, \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Y_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial}{\partial t} Y\left(t, \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}, \dots$$

Ce sont les polynômes de Bernstein, de degré n en λ , correspondant aux fonctions continues de λ : $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$. La convergence est donc uniforme encore, et

$$(9) \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} X(t, \lambda) - \frac{\partial}{\partial t} X_n(t, \lambda) \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} Y(t, \lambda) - \frac{\partial}{\partial t} Y_n(t, \lambda) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} Z(t, \lambda) - \frac{\partial}{\partial t} Z_n(t, \lambda) \right| < \varepsilon$$

pour $n > N_1(\varepsilon)$. Les inégalités (8) et (9) sont vérifiées simultanément pour $n > N_2(\varepsilon)$, et l'on voit alors que $\Psi_n(t, t', \lambda) \rightarrow \Psi(t, t', \lambda)$ uniformément pour $n \rightarrow \infty$, car, en appliquant le théorème des accroissements finis,

$$\Psi_n(t, t', \lambda) = \left[\frac{\partial}{\partial t} X_n(t_1, \lambda) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} Y_n(t_2, \lambda) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} Z_n(t_3, \lambda) \right]^2, \quad t_1, t_2, t_3 \in (t, t')$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} X_n(t, \lambda) = \frac{\partial}{\partial t} X(t, \lambda) + u_n(t, \lambda), \quad \frac{\partial}{\partial t} Y_n = \frac{\partial}{\partial t} Y + v_n, \quad \frac{\partial}{\partial t} Z_n = \frac{\partial}{\partial t} Z + w_n$$

avec

$$|u_n(t, \lambda)| < \varepsilon, \quad |v_n(t, \lambda)| < \varepsilon, \quad |w_n(t, \lambda)| < \varepsilon \quad \text{pour } n > n_0.$$

Donc

$$\Psi_n(t, t', \lambda) \geq \frac{1}{2}a, \quad n > n_0,$$

ce qui prouve que C_λ^n est un noeud si $n > n_0$, et le théorème est démontré.

7. Détermination des classes d'isotopie à l'aide de leurs représentants algébriques.

On peut se proposer l'étude des classes d'isotopie, dont le nombre est infini, à l'aide des représentants algébriques de la forme

$$(10) \quad x_n(u) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos ku + b_k \sin ku), \quad y_n(u) = \sum_{k=1}^n (a'_k \cos ku + b'_k \sin ku),$$

$$z_n(u) = \sum_{k=1}^n (a''_k \cos ku + b''_k \sin ku)$$

ou, sous forme rationnelle,

$$(11) \quad x_n(t) = \frac{P_{2n-1}(t)}{(1+t^2)^n}, \quad y_n(t) = \frac{Q_{2n-1}(t)}{(1+t^2)^n}, \quad z_n(t) = \frac{R_{2n-1}(t)}{(1+t^2)^n}, \quad -\infty \leq t \leq +\infty,$$

P_{2n-1} , Q_{2n-1} , R_{2n-1} étant des polynômes arbitraires de degré $2n-1$ en t . Il s'agit de déterminer les classes d'isotopie possibles pour chaque valeur de n . Pour $n=1$, la courbe (10) est une ellipse, donc isotope à un cercle, et l'on obtient la classe nulle, quelles que soient les valeurs des coefficients arbitraires dans (10) ou (11). Mais, à mesure que n augmente, de nouvelles classes d'isotopie apparaissent. Ainsi, pour $n=3$, on obtient déjà le „noeud en trèfle“ (noeud 3_1 du tableau de ALEXANDER-BRIGGS, [1], p. 70), donné par

$$(12) \quad x = \cos t + 2 \cos 2t, \quad y = \sin t - 2 \sin 2t, \quad z = \sin 3t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

La variation continue des coefficients arbitraires dans (10) ou (11) correspond à une déformation continue d'ordre 1 du noeud, et sa classe d'isotopie ne change pas tant que la courbe ne se traverse pas elle-même. Le changement de classe d'isotopie est donc nécessairement associé à l'apparition d'un point multiple sur la courbe. Ceci a lieu lorsque le système

$$(13) \quad \frac{x_n(u) - x_n(v)}{u - v} = 0, \quad \frac{y_n(u) - y_n(v)}{u - v} = 0, \quad \frac{z_n(u) - z_n(v)}{u - v} = 0$$

est compatible. En y introduisant les expressions (11), on a un système algébrique de 3 équations à 2 inconnues u et v , qui est compatible lorsque les coefficients arbitraires de P_{2n-1} , Q_{2n-1} , R_{2n-1} annulent le système éliminant, E_n , de (13). On sait que E_n est formé de plusieurs polynômes homogènes par rapport aux $6n$ coefficients arbitraires qui figurent dans (10) ou (11), qui s'annulent lorsque cette courbe possède des points multiples. On doit s'attendre à ce que certains de ces polynômes changent de signe lorsque le noeud change de classe d'isotopie, ce qui ramènerait le problème de la classification à un problème d'élimination.

Remarquons encore que les classes d'isotopie existant pour une valeur de n subsistent pour toutes les valeurs suivantes. En effet, la variété E_n est un cône de sommet O dans l'espace euclidien à $6n$ dimensions, qui détermine dans cet espace un certain nombre de domaines A_i^n correspondant aux classes d'isotopie existant pour cette valeur de n . Désignons par μ_n un point de l'espace à $6n$ dimensions, point qui représente donc une courbe (10) ou (11). Lorsque μ_n est intérieur à un domaine A_i^n , la courbe correspondante est un noeud. On obtient $x_{n+1}(u)$ en ajoutant $a_{n+1} \cos(n+1)u + b_{n+1} \sin(n+1)u$ à $x_n(u)$, donc la courbe $x_{n+1}(u)$, $y_{n+1}(u)$, $z_{n+1}(u)$ est un noeud isotope à $x_n(u)$, $y_n(u)$, $z_n(u)$ si a_{n+1} , b_{n+1} , a'_{n+1} , b'_{n+1} , a''_{n+1} , b''_{n+1} sont assez petits. Il existe donc un domaine A_j^{n+1} tel que $A_j^{n+1} \supset A_i^n$, et A_j^{n+1} représente la même classe d'isotopie que A_i^n . Nous ne poursuivrons pas davantage, ici, cette méthode de classification, les invariants que nous voulons signaler dans la suite étant d'une nature différente.

II. FORMATION DE QUELQUES INVARIANTS D'ISOTOPIE

1. Principe de formation d'invariants. Invariant K . Considérons un noeud C , lisse d'ordre n . En lui appliquant une déformation (C_λ) continue d'ordre n , il est clair que tous les éléments différentiels d'ordre $\leq n$ attachés à C_λ varient continûment en fonction de (s, λ) . Soit

$$F \left[X, Y, Z, \frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial Y}{\partial s}, \frac{\partial Z}{\partial s}, \dots, \frac{\partial^n X}{\partial s^n}, \frac{\partial^n Y}{\partial s^n}, \frac{\partial^n Z}{\partial s^n} \right]$$

une fonctionnelle continue de $X(s, \lambda)$, $Y(s, \lambda)$, $Z(s, \lambda)$ et leurs dérivées par rapport à s indiquées entre crochets (c'est une fonction de la ligne C_λ , au sens de Volterra). Supposons que, par sa signification géométrique, cette fonctionnelle ne puisse prendre que

des valeurs entières. Il en résulte alors que F garde une valeur constante tant que la déformation (C_λ) est continue d'ordre n . Supposons de plus que F cesse d'être continue lorsque λ passe par une valeur λ_0 telle que C_{λ_0} possède des points multiples. Alors F pourra changer de valeur (constante entière) lorsque C_λ change de classe d'isotopie. C'est une telle fonctionnelle que nous appelons *invariant d'isotopie d'ordre n* attaché au noeud C_λ .

Le premier invariant K (d'ordre 3) de cette nature, que nous avons obtenu [5], s'obtient en considérant, en même temps que la courbe C , la courbe voisine C^* décrite par un point M^* situé sur la normale principale au point M de C , variable sur C , à distance ε (const) du point M . On trouve alors que le coefficient d'enlacement de C et C^* est indépendant de ε tant que ce nombre ne dépasse une certaine valeur ε_0 . C'est donc un invariant d'isotopie attaché à C . On trouve, en exprimant le coefficient d'enlacement par l'intégrale de Gauss, puis en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(1) \quad K = \frac{1}{4\pi} \int_C \int_C \frac{1}{MM_1^3} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_1' & y_1' & z_1' \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} dt dt_1 + \frac{1}{2\pi} \int_C \tau ds.$$

Dans l'intégrale double, les points M et M_1 parcourent indépendamment la courbe C , et dans la dernière intégrale τ représente la torsion et s l'arc pris sur C . D'ailleurs, aucun des deux termes de la somme (1) n'est un entier et ne représente, à lui seul, un invariant d'isotopie.

On retrouve cet invariant, avec une nouvelle interprétation géométrique, de la manière suivante. C étant un noeud, considérons une courbe fermée C^* voisine de C , ne coupant pas C , et telle que, $D_r(M)$ étant le disque de rayon r , centré en M , situé dans le plan normal à C en M , la courbe C^* coupe chaque disque $D_r(M)$ en un seul point M^* , quel que soit M sur C . Soit $G(C, C^*)$ le coefficient d'enlacement de C et C^* . Dans le plan normal à C en M traçons les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$ et soit θ l'angle $(\mathbf{n}, \mathbf{MM}^*)$. Lorsque M décrit la courbe C , cet angle θ varie d'un multiple entier de 2π , et nous désignerons ce nombre par $N(C^*, C)$. C'est le nombre de tours que M^* fait autour de M , dans le plan normal à C en M , pour un observateur entraîné avec le trièdre de Frenet en M . Nous montrerons que

$$(2) \quad K = G(C, C^*) - N(C^*, C).$$

Remarquons d'abord que cette différence est indépendante du choix de la courbe auxiliaire C^* , et ne dépend que de la courbe C , d'une manière plus précise, du comportement du trièdre de Frenet le long de C . En effet, supposons que la courbe C^* soit modifiée en remplaçant un arc AB de cette courbe par un autre arc AEB , tel que $ABEA$ tourne une fois autour de C . Par suite de cette modification de C^* , les nombres $G(C, C^*)$ et $N(C^*, C)$ auront augmenté (ou diminué) d'une unité, donc K ne sera pas changé. Cela suffit à faire voir que K ne dépend que de la courbe C , et représente la rotation totale „sur lui-même“ du trièdre de Frenet, le long de la courbe C . Nous reviendrons dans la suite sur les propriétés de cet invariant. (V. Fig. 5.)

La construction que nous avons employée pour obtenir K peut être généralisée de manière à obtenir une infinité d'invariants analogues, d'ordre plus grand.

Ainsi, lorsque (C_λ) est une déformation continue d'ordre n , et $n \geq 2$, le plan osculateur attaché au point $M'(s')$ de C_λ tend vers le plan osculateur au point $M(s)$ de C_λ lorsque $s' \rightarrow s$, $\lambda' \rightarrow \lambda$. Pour $n \geq 3$, la sphère osculatrice attachée à $M'(s')$ tend vers la sphère analogue attachée à $M(s)$ dans les mêmes conditions. D'une manière générale, $\Sigma_n(s)$ étant une surface algébrique déterminée d'une manière univoque par la

condition d'avoir un contact d'ordre n avec C_λ au point $M(s)$, la surface de même définition $\Sigma'_n(s')$ attachée au point $M'(s')$ de C_λ tend vers $\Sigma_n(s)$ lorsque $s' \rightarrow s$, $\lambda' \rightarrow \lambda$.

Soit $N(s_0)$ la normale à $\Sigma_n(s_0)$ au point $M(s_0)$, orientée d'une manière arbitraire. Nous pouvons alors orienter les normales $N(s)$ à $\Sigma_n(s)$ aux points $M(s)$ le long de C , par continuité, de manière que $N(s') \rightarrow N(s)$ lorsque $s' \rightarrow s$. En procédant ainsi pour $s > s_0$, il est possible que l'on revienne au point $M(s_0) = M(s_0 + L)$ avec l'orientation initiale de $N(s_0)$. Nous dirons alors que la courbe C est *orientable d'ordre n* . Mais il est possible aussi que, en suivant $N(s)$ par continuité le long de C , on revienne en $M(s_0)$ avec l'orientation opposée, $-N(s_0)$. C'est

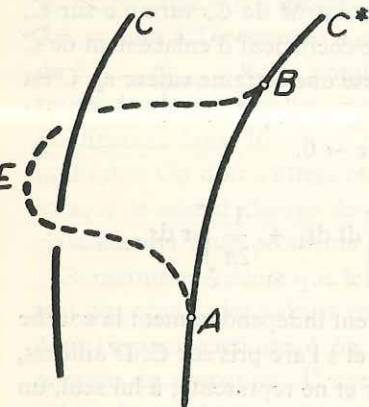


Fig. 5.

le cas d'une courbe *non-orientable d'ordre n* , et nous verrons que de telles courbes existent même pour $n = 2$. Dans ce dernier cas, il faudra parcourir deux fois la courbe C pour que $N(s)$ revienne à sa position initiale.

Sur $N(s)$ prenons un point $M^*(s)$, à distance $\varepsilon = \text{const}$ de $M(s)$. Les points $M^*(s)$ décrivent une courbe C^* voisine de C , n'ayant aucun point commun avec C si ε est assez petit. La courbe C^* sera fermée si C est orientable d'ordre n . Dans le cas contraire, on obtient encore une courbe fermée C^* en faisant varier s de s_0 à $s_0 + 2L$. On sera sûr d'avoir une courbe fermée C^* (décrite une fois ou deux fois) en faisant toujours varier s de s_0 à $s_0 + 2L$. Considérons le coefficient d'enlacement de C et C^* , donné par l'intégrale de Gauss

$$G(C, C^*) = \frac{1}{4\pi} \int_C \int_{C^*} \frac{1}{MM^*} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'_* & y'_* & z'_* \\ x - x_* & y - y_* & z - z_* \end{vmatrix} dt dt_*.$$

Ce nombre entier est indépendant de ε pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, et c'est un invariant d'isotopie d'ordre n . La limite de $G(C, C^*)$ s'exprime, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, comme nous le verrons, par des intégrales portant sur certains invariants différentiels d'ordre n attachés à C ; leur calcul est possible par une méthode plus directe, sans l'emploi de l'intégrale de Gauss, mais nous verrons que le comportement de ces invariants vis-à-vis des déformations

de C se complique d'éléments étrangers à la relation d'isotopie, éléments qui d'ailleurs ne manquent pas d'intérêt.

2. Courbes à trièdre de Frenet non-orientable. Revenons au cas $n = 2$ pour certaines précisions essentielles. Dans ce cas on peut prendre pour Σ_2 un plan, et ce sera le plan osculateur en $M(s)$ à C . Mais les éléments du second ordre de C déterminent aussi le trièdre de Frenet attaché à $M(s)$, et l'on se demande si ce trièdre varie, lui aussi, continûment en fonction de s (en fonction de (s, λ) dans le cas d'une déformation). Pour que la construction de la courbe C^* soit possible, il est nécessaire d'abord de définir ce trièdre de manière qu'il varie continûment le long de C , ce qui n'a pas lieu avec la définition habituelle des directions positives de n et b (normale principale et binormale). En effet, en prenant (suivant l'usage) pour direction positive de n celle qui est située dans la concavité de la projection $\gamma(M)$ de C dans son plan osculateur en M , et la direction positive de b de manière que le trièdre t, n, b soit orienté comme le trièdre de référence, même lorsque les dérivées de x, y, z jusqu'à l'ordre 2 sont continues, le trièdre de Frenet tourne brusquement de π autour de t lorsque $M(s)$ passe par un point d'inflexion [6] de C , c'est-à-dire un point où $\varrho(s) = 0$, $\varrho'(s) \neq 0$, ou, d'une manière générale, $\varrho = \varrho' = \dots = \varrho^{(2k)} = 0$, $\varrho^{(2k+1)} \neq 0$. Pour éviter cette discontinuité artificielle et rétablir la variation continue du trièdre de Frenet lorsque les dérivées de x, y, z jusqu'à l'ordre 2 sont continues, nous orienterons, si cela est possible, les vecteurs n d'une manière cohérente le long de C , c'est-à-dire de manière que $n(s') \rightarrow n(s)$ lorsque $s' \rightarrow s$, et ceci quel que soit s . En choisissant arbitrairement la direction positive de n en un point $M(s_0)$ de C , soient I_1 et I_2 les points d'inflexion de C les plus voisins de $M(s_0)$. Le long de l'arc $I_1 I_2$ qui contient $M(s_0)$, nous choisirons la direction positive de n de manière que n soit situé du même côté que $n(s_0)$ par rapport à la concavité de l'arc $I_1 I_2$, en chaque point de cet arc. En dépassant l'un de ces points d'inflexion, soit I_2 , la position de n par rapport à la concavité de $\gamma(M)$ devra être inversée, et cela pour tous les points de l'arc $I_2 I_3$, où I_3 est le point d'inflexion qui suit I_2 . En même temps, afin que les formules de Frenet restent valables sans modification, le signe de ϱ devra être changé le long de l'arc $I_2 I_3$, et la direction positive de b sera toujours déterminée de manière que l'orientation t, n, b coïncide avec celle du trièdre de référence. En somme, en décomposant C en arcs compris entre deux points d'inflexion consécutifs, la direction positive de n sera alternativement située du côté de la concavité de $\gamma(M)$ ou du côté de sa convexité, une telle inversion ayant lieu à chaque passage de $M(s)$ par un point d'inflexion. La courbe $\varrho(s)$ sera alternativement positive ou négative le long de ces arcs. De cette manière, si C possède un nombre fini, pair, de points d'inflexion, on est sûr de revenir en $M(s_0)$ avec l'orientation initiale $n(s_0)$, $\varrho(s)$ étant une fonction continue de période L . Le vecteur b sera soumis aux mêmes inversions de sens que n (par rapport aux conventions courantes). La variation du trièdre de Frenet le long de C sera alors continue, et les formules de Frenet restent utilisables sans modification.

Mais cette orientation cohérente du trièdre de Frenet le long de C n'est pas possible

lorsque C présente un nombre fini, impair, de points d'inflexion. On constate l'existence de pareilles courbes, non-orientables d'ordre 2, sur l'exemple simple

$$(3) \quad x = 4 \cos t - \cos 2t, \quad y = 4 \sin t - \sin 2t, \quad z = \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

On a ici

$$A = y'z'' - z'y'' = -2 \sin t(1 + 2 \cos t), \quad B = -4(1 - \cos t), \\ C = 24(1 - \cos t).$$

A, B, C étant des fonctions partout continues de t , on peut prendre comme direction positive de la binormale b celle du vecteur (A, B, C) , tant que la longueur de ce vecteur ne s'annule pas. Or, on a $A = B = C = 0$ pour $t = 0$ seulement, et c'est l'unique point d'inflexion sur cette courbe. On voit que $A < 0, B < 0, C > 0$ pour $t \rightarrow +0$, et $A > 0, B < 0, C > 0$ pour $t \rightarrow -0$, avec $B/A \rightarrow 0, C/A \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow 0$; ainsi, la direction b tend vers celle de Ox pour $t \rightarrow -0$ et vers la direction opposée pour $t \rightarrow +0$.

Le point $m(A, B, C)$ décrit, dans l'espace, une courbe fermée Γ qui passe une seule fois par l'origine O . La direction de b coïncide avec celle de Om , et l'on voit qu'au passage de m par O , la direction Om éprouve la discontinuité signalée. Une construction analogue peut être faite pour toute courbe continue d'ordre 2, et l'on voit que, pour que C soit orientable d'ordre 2, il faut et il suffit que Γ passe un nombre pair de fois par O , si toutefois ce nombre de passages est fini. Pour toute courbe non-orientable d'ordre 2, la surface polaire est unilatère.

Ces considérations nous permettront d'expliquer le comportement de nos invariants d'isotopie de divers ordres.

3. Sur une intégrale auxiliaire. La formule (1) fait apparaître l'intégrale double

$$J = \int_C \int_C \frac{1}{M_1 M_2^3} \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x_1 - x_2 \\ y'_1 & y'_2 & y_1 - y_2 \\ z'_1 & z'_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} dt_1 dt_2$$

étendue à la courbe C , que les points $M_1 = M(t_1)$ et $M_2 = M(t_2)$ parcourent indépendamment. Nous verrons que cette intégrale joue un rôle essentiel dans le comportement de l'invariant K , car c'est le terme qui fait un saut lorsque la courbe C se traverse elle-même. Montrons ici que cette intégrale a un sens si la courbe C est lisse d'ordre 2. On peut alors employer la formule de Taylor sous la forme

$$x_2 = x_1 + hx'_1 + \frac{1}{2}h^2 x''_1 + h^2 R(h), \quad x'_2 = x'_1 + hx''_1 + h r(h); \\ R(h) \rightarrow 0, \quad r(h) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

en posant $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), h = t_2 - t_1$. On a $M_1 M_2 = |h| \sqrt{s'^2 + o(h)}$, tandis que le déterminant sous l'intégrale s'écrit (en omettant les 2-me et 3-me lignes)

$$|hx'_1 + \frac{1}{2}h^2 x''_1 + h^2 R, x'_1, x'_1 + hx''_1 + hr| = |h^2(R - \frac{1}{2}r), x'_1, h(x''_1 + r)| = o(h^3)$$

avec $o(h^3)/h^3 \rightarrow 0$ pour $h \rightarrow 0$. Il en résulte que la fonction de (t_1, t_2) sous les signes d'intégration est continue dans le carré $Q: t_1 \in [0, T], t_2 \in [0, T]$. C'est évident en

chaque point (t_1, t_2) où $t_1 \neq t_2$. Soit (τ, τ) un point de la bissectrice, et posons $t_1 = u + \tau, t_2 = v + \tau$; nous ferons tendre u et v vers zéro indépendamment l'un de l'autre. Mais en posant encore $h = t_2 - t_1 = v - u$, les développements tayloriens que nous venons d'écrire, et les calculs suivants, restent valables. On voit donc que pour $u^2 + v^2 \rightarrow 0$ la fonction à intégrer tend vers zéro. Elle est donc continue dans le carré Q , et nulle sur sa diagonale principale. Ainsi, l'intégrale J a un sens.

4. L'invariant K . C étant un noeud lisse d'ordre 3, considérons une courbe fermée C^* , située à l'intérieur du voisinage de rayon ε attaché à C . M étant un point quelconque de C , et $D_\varepsilon(M)$ étant le disque de rayon ε , de centre M , situé dans le plan normal à C en M , nous supposons que la courbe C^* coupe $D_\varepsilon(M)$ en un seul point M^* , différent de M . Dans ces conditions, nous calculerons la valeur du coefficient d'enlacement $G(C, C^*)$, et sa limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$, en utilisant l'intégrale de Gauss

$$G(C, C^*) = \frac{1}{4\pi} \int_C \int_{C^*} \frac{1}{M_1 M^{*3}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha^* \\ \alpha^* & \alpha^* \\ x_1 - x^* \end{vmatrix} ds_1 ds^*.$$

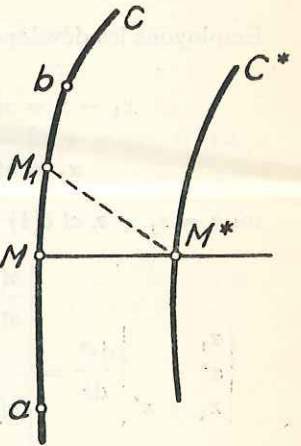


Fig. 6.

(Sous le signe intégral on a un déterminant dont la première colonne seule a été indiquée). Pour effectuer ce calcul, il est commode de commencer par l'intégrale

$$\int_C \frac{1}{M_1 M^{*3}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha^* \\ \alpha^* & \alpha^* \\ x_1 - x^* \end{vmatrix} \frac{ds^*}{ds} ds_1$$

où l'on maintient M^* fixe, pendant que M_1 parcourt C . (V. Fig. 6.)

Soit ab un petit arc contenant $M(s)$, avec $a(s - H), b(s + H)$. On a uniformément

$$\int_{C-ab} \frac{1}{M_1 M^{*3}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha^* \\ \alpha^* & \alpha^* \\ x_1 - x^* \end{vmatrix} \frac{ds^*}{ds} ds_1 \rightarrow \int_{C-ab} \frac{1}{M_1 M^3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \\ x_1 - x \end{vmatrix} ds_1$$

pour $\varepsilon \rightarrow 0, H$ restant fixe. Il nous reste à étudier

$$I = \int_{ab} \frac{1}{M_1 M^{*3}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha^* \\ \alpha^* & \alpha^* \\ x_1 - x^* \end{vmatrix} \frac{ds^*}{ds} ds_1.$$

Posons

$$x^* = x + \varepsilon r(\alpha' \cos \Theta + \alpha'' \sin \Theta), \dots$$

avec $r = r(s), \Theta = \Theta(s), 0 < A \leq r \leq 1$. On voit que r et Θ sont les coordo-

nées polaires du point M^* dans le plan normal en M à C , Θ étant l'angle de MM^* avec la normale principale à C en M . On a

$$\alpha^* \frac{ds^*}{ds} = \alpha(1 - \varepsilon r \varrho \cos \Theta) + \alpha'[\varepsilon r' \cos \Theta - \varepsilon r(\tau + \Theta') \sin \Theta] + \alpha''[\varepsilon r' \sin \Theta + \varepsilon r(\tau + \Theta') \cos \Theta].$$

Employons les développements par la formule de Taylor

$$x_1 - x = \alpha(h + h^3 o(1)) + \alpha' \left(\frac{h^2}{2} \varrho + h^3 o(1) \right) + \alpha'' h^3 o(1), \\ \alpha_1 = \alpha(1 + h^2 o(1)) + \alpha'(h \varrho + h^2 o(1)) + \alpha'' h^2 o(1)$$

où $h = s_1 - s$, et $o(1) \rightarrow 0$ pour $h \rightarrow 0$. On a

$$\left| \frac{\alpha_1}{\alpha^*} \frac{ds^*}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha(1 + h^2 o(1)) + \alpha'(h \varrho + h^2 o(1)) + \alpha'' h^2 o(1)}{\alpha(1 - \varepsilon r \varrho \cos \Theta) + \alpha'[\varepsilon r' \cos \Theta - \varepsilon r(\tau + \Theta') \sin \Theta] + \alpha''[\varepsilon r' \sin \Theta + \varepsilon r(\tau + \Theta') \cos \Theta]} \right| = \\ = \left| \frac{\alpha(h + h^3 o(1)) + \alpha' \left(\frac{h^2}{2} \varrho + h^3 o(1) - \varepsilon r \cos \Theta \right) + \alpha''(h^3 o(1) - \varepsilon r \sin \Theta)}{\alpha(1 + h^2 o(1))[\varepsilon r' \cos \Theta - \varepsilon r(\tau + \Theta') \sin \Theta](h^3 o(1) - \varepsilon r \sin \Theta) - (1 + h^2 o(1))[\varepsilon r' \sin \Theta + \varepsilon r(\tau + \Theta') \cos \Theta] \left(\frac{h^2}{2} \varrho + h^3 o(1) - \varepsilon r \cos \Theta \right) - (h \varrho + h^2 o(1))[\varepsilon r' \sin \Theta + \varepsilon r(\tau + \Theta') \cos \Theta](h + h^3 o(1)) + (h \varrho + h^2 o(1))(1 - \varepsilon r \varrho \cos \Theta)(h^3 o(1) - \varepsilon r \sin \Theta) + h^2 o(1)(1 - \varepsilon r \varrho \cos \Theta) \left(\frac{h^2}{2} \varrho + h^3 o(1) - \varepsilon r \cos \Theta \right) - h^2 o(1)} \right| \\ = \left| \frac{\varepsilon^2 r^2 (\tau + \Theta') - \varepsilon h r \varrho \sin \Theta + \varepsilon^2 h (r^2 \varrho^2 \sin \Theta \cos \Theta + o(1)) + h^4 o(1) + \varepsilon h^2 O(1)}{h^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon h^2 r \varrho \cos \Theta + h^3 o(1)} \right| = \\ = h^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon h^2 r \varrho \cos \Theta + h^3 o(1).$$

$$I = \int_{-H}^H \frac{\varepsilon^2 r^2 (\tau + \Theta') - \varepsilon h r \varrho \sin \Theta + \varepsilon^2 h (r^2 \varrho^2 \sin \Theta \cos \Theta + o(1)) + h^4 o(1)}{[h^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon h^2 r \varrho \cos \Theta + h^3 o(1)]^{3/2}} dh.$$

Posons $h = \varepsilon r t$, $-T \leq t \leq T$, $H = \varepsilon r T$. On a

$$I = \int_{-T}^T \frac{\tau + \Theta' + At + \varepsilon B t^2 + \varepsilon C t + \varepsilon^2 D t^2 + \varepsilon^2 E t^4}{(1 + t^2)^{3/2} \left[1 - \varepsilon r \frac{t^2}{1 + t^2} \varrho \cos \Theta + \varepsilon r \frac{t^3}{1 + t^2} O(1) \right]^{3/2}} dt$$

où A est indépendant de t , et B, C, D, E sont des fonctions de t qui restent inférieures en module à un nombre fixe M , pour H fixe, aussi grand que soit T . On a, en remplaçant εr par H/T ,

$$\left[1 - \frac{H}{T} \frac{t^2}{1 + t^2} \varrho \cos \Theta + H \frac{t^3}{T(1 + t^2)} O(1) \right]^{3/2} = 1 + H \varphi(t, H)$$

pour H assez petit, $|\varphi(t, H)|$ étant bornée par un nombre fixe. Ainsi

$$I = \int_{-T}^T \frac{\tau + \Theta' + At + \frac{H}{T} B t^2 + \frac{H}{T} C t + \frac{H^2}{T^2} D t^2 + \frac{H^2}{T^2} E t^4}{(1 + t^2)^{3/2}} (1 + H \varphi(t, H)) dt.$$

Faisons maintenant $\varepsilon \rightarrow 0$, donc $T \rightarrow \infty$, H restant fixe et assez petit. On a

$$\int_0^T \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^{3/2}} < \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^{3/2}} + \int_1^T \frac{t^2 dt}{(t^2)^{3/2}} = k + \ln T, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^{3/2}} \rightarrow 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \frac{t^4 dt}{(1 + t^2)^{3/2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \sqrt{t^2 + 1} \cdot dt = \frac{1}{2}$$

donc

$$I = 2(\tau + \Theta') + H \Psi(H, s) + \Phi(\varepsilon, s),$$

$\Psi(H, s)$ restant borné le long de C , et $\Phi(\varepsilon, s) \rightarrow 0$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformément. Intégrons le long de C , par rapport à s ,

$$4\pi G(C, C^*) = \int_C \left[\int_{C-ab} + I \right] ds = \\ = 2 \int_C (\tau + \Theta') ds + \int_C \int_{C-ab} \frac{1}{MM_1^3} \left| \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{ds_1}{x_1 - x} \right| ds_1 ds + \Phi_1(\varepsilon) + H \Psi_1(H)$$

avec $\Phi_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Le premier membre étant un multiple de 4π , le second membre reste constant pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, donc $\Phi_1(\varepsilon) = 0$. En faisant ensuite $H \rightarrow 0$, on a

$$4\pi G(C, C^*) = J + 2 \int_C (\tau + \Theta') ds$$

avec

$$J = \int_C \int_C \frac{1}{MM_1^3} \left| \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{ds_1}{x_1 - x} \right| ds_1 ds.$$

Ainsi

$$G(C, C^*) = \frac{1}{4\pi} J + \frac{1}{2\pi} \int_C \tau ds + \frac{1}{2\pi} [\Theta(s)]_C.$$

La courbe C^* étant fermée, $\frac{1}{2\pi} [\Theta(s)]_C$ est un entier, et il s'en ensuit que

$$K = \frac{1}{4\pi} J + \frac{1}{2\pi} \int_C \tau ds$$

est un entier attaché à la courbe C , indépendamment de toute autre courbe voisine. Posons

$$N(C^*, C) = \frac{1}{2\pi} [\Theta(s)]_C$$

que nous appellerons „nombre de tours relatif“ de C^* autour de C . C'est le nombre de fois que C^* tourne autour de la tangente à C pour un observateur lié au trièdre de Frenet en un point mobile sur C . On a alors $K = G(C, C^*) - N(C^*, C)$. Lorsque $\Theta = \text{const}$, $N(C^*, C) = 0$ et $K = G(C, C^*)$. En prenant $\Theta = 0$, donc M^* situé sur la normale principale au point M de C , on retrouve la définition que nous avons initialement donnée à l'invariant K . On peut prendre également $\Theta = \frac{1}{2}\pi$, donc M^* sur la binormale à C , et c'est la généralisation de cette construction qui nous offre une suite infinie d'autres invariants analogues à K , mais d'ordre plus grand.

5. Propriétés de l'invariant K . Les deux termes qui figurent dans l'expression (1) de K se comportent différemment lorsque le noeud C est soumis à une déformation continue telle que $X(s, \lambda)$, $Y(s, \lambda)$, $Z(s, \lambda)$ possèdent des dérivées continues jusqu'à l'ordre 3 (mais la torsion τ pouvant avoir des discontinuités pendant la déformation). Le premier terme J est visiblement une fonction continue de λ tant que la courbe C_λ ne se traverse pas elle-même. Nous verrons que, à chaque traversée, l'intégrale $(1/4\pi) J$ augmente ou diminue de 2 unités, suivant le sens de la traversée, phénomène qui permet à K de nous signaler le changement de classe du noeud C par suite de la déformation. Le second terme (torsion intégrale) n'éprouve aucune discontinuité lorsque C se traverse elle-même, mais fait un saut lorsque, pendant la déformation, la torsion $\tau(s, \lambda)$ ne reste pas bornée. Par suite de ce fait, ce second terme est plutôt gênant si l'on ne s'intéresse qu'aux changements de classe d'isotopie du noeud; mais la présence de ce terme dans K assure la propriété de cet invariant de ne prendre que

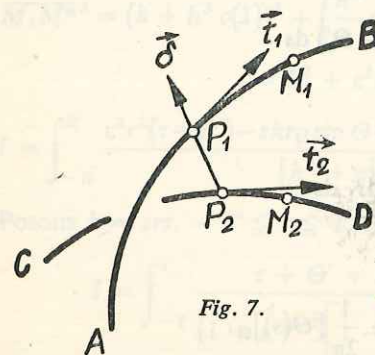


Fig. 7.

des valeurs entières, le premier terme $(1/4\pi) J$ étant une fonction de ligne qui prend des valeurs réelles quelconques, variables pendant la déformation. Il en résulte que chaque classe d'isotopie d'ordre 1 se subdivise en classes d'isotopie d'ordre 3; dans chacune de ces dernières, K reste constant. On exprime cela en disant que K est un invariant d'isotopie d'ordre 3. (V. Fig. 7.)

Sur le noeud C considérons deux arcs AB et CD , et supposons que, pendant la déformation, l'arc AB subit une translation $-\varepsilon\delta$, qui amène

P_1 en P_2 . Avec les notations $\delta(p, q, r)$, $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, $P_2(\xi, \eta, \zeta)$, nous aurons, pour $M_1 \in AB$ et $M_2 \in CD$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + p\varepsilon + h\alpha_1 + h o_h(1), & x_2 &= \xi + k\alpha_2 + k o_k(1), \\ y_1 &= \eta + q\varepsilon + h\beta_1 + h o_h(1), & y_2 &= \eta + k\beta_2 + k o_k(1), & -H_1 \leq h \leq H_1, \\ z_1 &= \zeta + r\varepsilon + h\gamma_1 + h o_h(1), & z_2 &= \zeta + k\gamma_2 + k o_k(1), & -H_2 \leq k \leq H_2, \end{aligned}$$

où $o_h(1)$ représente une fonction de h qui tend vers zéro pour $h \rightarrow 0$. En posant $(t_1 t_2) = \cos \sigma$, $(\delta t_1) = \cos \lambda$, $(\delta t_2) = \cos \mu$, on trouve

$$\overline{M_1 M_2}^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon(h \cos \lambda - k \cos \mu + h o_h(1) + k o_k(1)) + h^2 + k^2 - 2hk \cos \sigma + h^2 o_h(1) + k^2 o_k(1) + hk o_{hk}(1),$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_1 - x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ p\varepsilon + h o_h(1) + k o_k(1) \end{vmatrix} = \varepsilon(t_1 t_2 \delta) + h o_h(1) + k o_k(1).$$

Le saut de l'intégrale J sera donné par

$$\begin{aligned} & \int_{AB} \int_{CD} \frac{1}{\overline{M_1 M_2}^3} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_1 - x_2 \end{vmatrix} dh dk = \\ &= \int_{-H_1}^{H_1} \int_{-H_2}^{H_2} \frac{\varepsilon(t_1 t_2 \delta) + h o_h(1) + k o_k(1)}{[\varepsilon^2 + 2\varepsilon(\cdot) + h^2 + k^2 - 2hk \cos \sigma + \dots]^{3/2}} dh dk. \end{aligned}$$

Posons $h = \varepsilon u$, $k = \varepsilon v$. On a

$$\int_{-H_1/\varepsilon}^{H_1/\varepsilon} \int_{-H_2/\varepsilon}^{H_2/\varepsilon} \frac{(t_1 t_2 \delta) + o_\varepsilon(1)}{[1 + u^2 + v^2 - 2uv \cos \sigma + 2u \cos \lambda - 2v \cos \mu + o_\varepsilon(1)]^{3/2}} du dv$$

et, pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ceci tend vers

$$I = (t_1 t_2 \delta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{[u^2 + v^2 - 2uv \cos \sigma + 2u \cos \lambda - 2v \cos \mu + 1]^{3/2}}.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{[(u - v \cos \sigma + \cos \lambda)^2 + R]^3} = \frac{1}{R} \left[\frac{u - v \cos \sigma + \cos \lambda}{\sqrt{(u - v \cos \sigma + \cos \lambda)^2 + R}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{R}$$

avec $R = (v \sin \sigma + \sin \lambda \cos \omega)^2 + \sin^2 \lambda \sin^2 \omega$, $\cos \mu = \cos \sigma \cos \lambda - \sin \sigma \sin \lambda \cdot \cos \omega$. Conformément à cette dernière formule de la trigonométrie sphérique, ω est donc l'angle du plan δt_1 avec le plan $t_1 t_2$, et $|(t_1 t_2 \delta)| = |\sin \sigma \sin \lambda \sin \omega|$.

Ensuite

$$\begin{aligned} I &= 2(t_1 t_2 \delta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(v \sin \sigma + \sin \lambda \cos \omega)^2 + \sin^2 \lambda \sin^2 \omega} = \frac{2\pi(t_1 t_2 \delta)}{|\sin \sigma \sin \lambda \sin \omega|} = \\ &= 2\pi \text{sign}(t_1 t_2 \delta). \end{aligned}$$

Cette valeur doit être prise deux fois, puisque M_1 et M_2 , parcourant indépendamment la courbe C , chacun d'eux décrira AB et CD . Ainsi, le saut de l'intégrale J lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est $4\pi \text{sign}(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \delta)$. On doit encore doubler ce saut lorsque, AB ayant traversé CD en P_2 , cet arc continue sa translation de manière que la courbe cesse d'avoir un point double en P_2 . En somme, le saut correspondant à la translation que nous venons de définir est $8\pi \text{sign}(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \delta)$, ce qui vaut, pour K , $2 \text{sign}(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \delta)$.

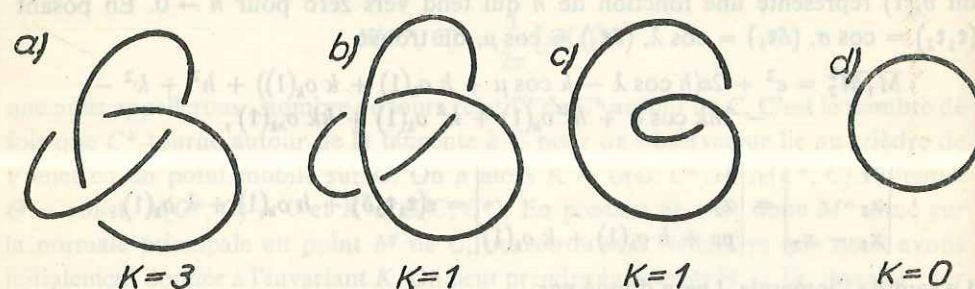


Fig. 8.

Supposons que l'on connaît le schéma plan du noeud C , c'est-à-dire une projection orthogonale du noeud sur un plan, avec l'indication, pour chaque point double de la projection, de la branche qui passe en dessus de l'autre. Par des déformations continues, que nous pouvons suivre sur le schéma, nous pouvons amener le noeud C dans la classe nulle, celle du cercle, et il est clair que pour un cercle $K = 0$. En tenant compte du saut de J à chaque traversée, on pourrait croire qu'il en résulte la valeur de K pour le noeud initial, en nous servant seulement de son schéma plan. Or, il n'en est pas ainsi que si l'on est sûr que la déformation employée est continue d'ordre 3, la torsion $\tau(s, \lambda)$ restant donc bornée. Donnons l'exemple du noeud en trèfle. (V. Fig. 8.)

Nous avons calculé $K = 3$ pour ce noeud, par une méthode directe [5]. Une traversée nous ramène au noeud b), puis c), de notre figure, pour lesquels $K = 1$, la torsion ayant resté partout continue pendant ces déformations. C'est seulement au passage de c) à d) que la torsion passe nécessairement par un point de discontinuité, seule explication du fait que K passe de la valeur 1 à la valeur 0. Nous avons vérifié ce phénomène sur la déformation

$$x = \cos t - \lambda \cos 2t, \quad y = \sin t - \lambda \sin 2t, \quad z = \lambda \sin t; \\ t \in [0, 2\pi), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Lorsque λ varie de 0 à 1, cette déformation transforme le cercle d) en une courbe telle que c). (V. Fig. 9.)

On trouve, avec des notations classiques:

$$A = -2\lambda^2(3 - 2\sin^2 t) \sin t, \quad B = \lambda(4\lambda \cos^3 t - 1), \\ C = 8\lambda^2 - 6\lambda \cos t + 1,$$

$$H^2 = 4\lambda^4(17 + 3\cos^2 t) - 104\lambda^3 \cos t + \lambda^2(17 + 36\cos^2 t) - 12\lambda \cos t + 1, \\ s'^2 = 4\lambda^2 - 3 + (2 - \lambda \cos t)^2 > 0, \quad A = -6\lambda^2(2\cos^2 t - 4\lambda \cos t - 1).$$

La torsion $\tau = A/H^2$ peut être discontinue en un point (t, λ) où $A = B = C = 0$, donc $\varrho = 0$. C'est ce qui arrive pour $\lambda = \frac{1}{4}$, $t = 0$. D'ailleurs, pour $\lambda = \frac{1}{4}$ on retrouve la courbe non-orientable d'ordre 2 que nous avons déjà présentée au No. 3. On doit remarquer que la torsion τ reste bornée sur cette courbe $\lambda = \frac{1}{4}$, mais $\tau(t, \lambda)$ n'est pas bornée au voisinage du point $t = 0$, $\lambda = \frac{1}{4}$. En effet, on trouve

$$\tau = \frac{6\lambda^2[(4\lambda - 1) + (\cos t - 1)(4\lambda - 2\cos t - 2)]}{(4\lambda - 1)^2(5\lambda^2 - 4\lambda + 1) + (\cos t - 1)[12\lambda^2(\lambda^2 + 3)(\cos t + 1) - 4\lambda(3 + 26\lambda^2)]}$$

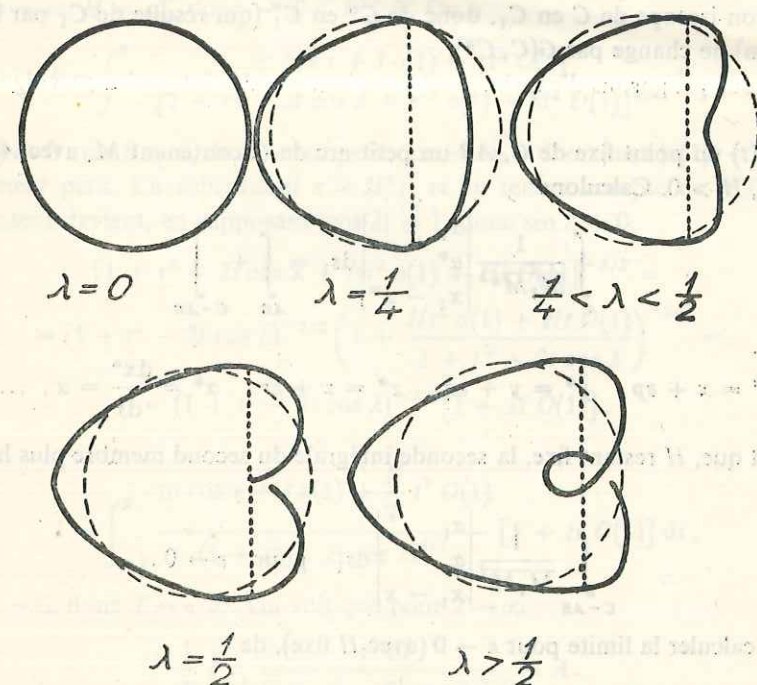


Fig. 9.

et l'on voit que pour $t \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \frac{1}{4}$ la limite de ce rapport dépend de $\lim_{\lambda \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\cos t - 1}{4\lambda - 1}$,

cette limite est infinie si $\lim_{\lambda \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\cos t - 1}{4\lambda - 1} = 0$.

On a $K = 0$ pour $0 \leq \lambda < \frac{1}{4}$ et $K = 1$ pour $\frac{1}{4} < \lambda \leq 1$, et ce saut est dû à la discontinuité de τ pour $\lambda = \frac{1}{4}$. Ce résultat est général:

Si C_1 et C_2 sont deux noeuds pour lesquels K prend des valeurs de parité différente ($K_2 - K_1 = 2h + 1$), pendant toute déformation continue (les dérivées des coordonnées jusqu'à l'ordre 3 étant continues) de C_1 en C_2 la torsion $\tau(s, \lambda)$ passe nécessairement par un point de discontinuité.

6. Formation d'un invariant d'ordre 2. Nous formerons ici un invariant P , analogue à K , mais dépendant d'éléments différentiels d'ordre 2 attachés à C . En outre, P dépend d'une direction δ arbitraire, et, grâce à cela, P fait correspondre au noeud C tout un système de nombres entiers qui sont des invariants d'ordre 2.

Considérons un noeud C lisse d'ordre 2, c'est à dire tel que $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ possèdent des dérivées continues jusqu'à l'ordre 2. Soit C^* le noeud que l'on obtient en donnant à C une translation de longueur $\varepsilon > 0$ et de cosinus directeurs p, q, r . On voit que le coefficient d'enlacement $G(C, C^*)$ est un invariant d'isotopie du noeud C , pour ε suffisamment petit, si aucune tangente à C n'est parallèle au vecteur $\delta(p, q, r)$, car une déformation isotope de C en C_1 , donc de C^* en C_1^* (qui résulte de C_1 par la même translation) ne change pas $G(C, C^*)$.

Nous nous proposons d'exprimer cet invariant par des intégrales curvilignes prises sur C .

Soit $M(t)$ un point fixe de C , AB un petit arc de C contenant M , avec $A(t-H)$, $B(t+H)$, $H > 0$. Calculons

$$\int_C \frac{1}{M_1 M^{*3}} \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha^* \\ x_1 - x^* \end{array} \right| ds_1 = \int_{AB} + \int_{C-AB}$$

où

$$x^* = x + \varepsilon p, \quad y^* = y + \varepsilon q, \quad z^* = z + \varepsilon r; \quad \alpha^* = \frac{dx^*}{ds} = \alpha, \dots$$

On voit que, H restant fixe, la seconde intégrale du second membre plus haut tend vers

$$\int_{C-AB} \frac{1}{M_1 M^3} \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha \\ x_1 - x \end{array} \right| ds_1 \quad \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Il reste à calculer la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ (avec H fixe), de

$$I = \int_{AB} \frac{1}{M_1 M^{*3}} \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha \\ x_1 - x - p\varepsilon \end{array} \right| ds_1.$$

Nous employerons, à cet effet, les développements suivant $h = s_1 - s$,

$$x_1 - x = h\alpha + \frac{h^2}{2} \alpha' + h^2 o(1) = \alpha[h + h^2 o(1)] + \alpha' \left[\frac{h^2}{2} + h^2 o(1) \right] + \alpha'' h^2 o(1),$$

$$\alpha_1 = \alpha[1 + h o(1)] + \alpha'[h\alpha + h o(1)] + \alpha'' h o(1)$$

et les formules analogues pour y, z . On a

$$\overline{M_1 M^{*2}} = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 - 2\varepsilon[p(x_1 - x) + q(y_1 - y) + r(z_1 - z)] + \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + h^2 - 2\varepsilon h \cos \lambda + h^3 o(1) + \varepsilon h^2 O(1),$$

en posant $\cos \lambda = p\alpha + q\beta + r\gamma$, $\cos \mu = p\alpha' + q\beta' + r\gamma$, $\cos \nu = p\alpha'' + q\beta'' + r\gamma''$, puis

$$\left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha \\ x_1 - x - p\varepsilon \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \alpha'[h\alpha + h o(1)] + \alpha'' h o(1) \\ \alpha \\ \alpha' \left[\frac{h^2}{2} + h^2 o(1) \right] + \alpha'' h^2 o(1) - p\varepsilon \end{array} \right| = \varepsilon h \alpha \cos \nu + \varepsilon h^2 O(1) + h^3 o(1).$$

Posons $h = \varepsilon t$, $H = \varepsilon T$, donc $-T \leq t \leq T$. On a

$$I = \int_{-T}^T \frac{t \alpha \cos \nu + t o(1) + \varepsilon t^3 O(1)}{[1 + t^2 - 2t \cos \lambda + \varepsilon t^3 o(1) + \varepsilon t^2 O(1)]^{3/2}} dt.$$

Ici $o(1) \rightarrow 0$ avec $h \rightarrow 0$, donc, aussi petit que soit $\eta > 0$ on aura $|o(1)| < \eta$ pour H suffisamment petit. En substituant $\varepsilon = H/T$, et en tenant compte de $|t/T| \leq 1$, le dénominateur devient, en supposant $|\cos \lambda| \neq 1$, donc $\sin \lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} & [1 + t^2 - 2t \cos \lambda + H t^2 o(1) + H t O(1)]^{-3/2} = \\ & = (1 + t^2 - 2t \cos \lambda)^{-3/2} \left(1 + \frac{H t^2 o(1) + H t O(1)}{1 + t^2 - 2t \cos \lambda} \right)^{-3/2} = \\ & = (1 + t^2 - 2t \cos \lambda)^{-3/2} [1 + H O(1)]. \end{aligned}$$

On a

$$I = \int_{-T}^T \frac{t \alpha \cos \nu + t o(1) + \frac{H}{T} t^3 O(1)}{(1 + t^2 - 2t \cos \lambda)^{3/2}} [1 + H O(1)] dt.$$

Faisons $\varepsilon \rightarrow 0$, donc $T \rightarrow +\infty$. On voit que pour $T \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T \frac{t^3 dt}{(1 + t^2 - 2t \cos \lambda)^{3/2}} \rightarrow A$$

où A est un nombre fini. Enfin

$$\alpha \cos \nu \int_{-T}^T \frac{t dt}{(1 + t^2 - 2t \cos \lambda)^{3/2}} = \frac{\alpha \cos \nu}{\sin^2 \lambda} \left[\frac{t \cos \lambda - 1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t \cos \lambda}} \right]_{-T}^T \rightarrow 2\alpha \frac{\cos \nu \cos \lambda}{\sin^2 \lambda}.$$

On a donc

$$I = 2\alpha \frac{\cos \nu \cos \lambda}{\sin^2 \lambda} + o(1), \quad \text{où } o(1) \rightarrow 0 \text{ avec } H \rightarrow 0.$$

En faisant maintenant $H \rightarrow 0$, on trouve

$$\int_C \frac{1}{M_1 M^{*3}} \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha^* \\ x_1 - x^* \end{array} \right| ds_1 \rightarrow \int_C \frac{1}{M_1 M^3} \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha \\ x_1 - x \end{array} \right| ds_1 + 2\alpha \frac{\cos \nu \cos \lambda}{\sin^2 \lambda}.$$

En intégrant le long de C par rapport au point M , on obtient

$$4\pi G(C, C^*) = \int_C \int_{C^*} \frac{1}{M_1 M^{*3}} \left| \frac{\alpha_1}{\alpha^*} \frac{x_1}{x_1 - x^*} \right| ds_1 ds^* =$$

$$= \int_C \int_C \frac{1}{M_1 M^3} \left| \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{x_1}{x_1 - x} \right| ds_1 ds + 2 \int_C q \frac{\cos v \cos \lambda}{\sin^2 \lambda} ds,$$

formule valable pour ε suffisamment petit. On a ainsi l'invariant du 2nd ordre

$$L = \frac{1}{4\pi} J + \frac{1}{2\pi} \int_C q \frac{\cos v \cos \lambda}{\sin^2 \lambda} ds.$$

La structure de L rappelle celle de l'invariant K , et l'on voit que L se comporte de la même façon que K lorsque C change de classe d'isotopie, ce comportement étant dû au terme J . Le second terme diffère essentiellement de la torsion intégrale qui figure dans K , par le fait que ce terme est du second ordre et dépend d'une direction arbitraire δ . En retranchant, on trouve l'invariant

$$P = K - L = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\tau - q \frac{(p\alpha + q\beta + r\gamma)(p\alpha'' + q\beta'' + r\gamma'')}{(q\gamma - r\beta)^2 + (r\alpha - p\gamma)^2 + (p\beta - q\alpha)^2} \right) ds.$$

P est un nombre entier qui dépend de la direction (p, q, r) , mais qui paraît rester insensible aux changements de classe d'isotopie de C . Le dernier rapport sous le signe intégral est discontinu pour $\sin \lambda = 0$, quoique l'on ait en même temps $\cos v = 0$. On a

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\tau - q \frac{\cos \lambda \cos v}{\sin^2 \lambda} \right) ds, \quad \frac{d}{ds} \arctg \frac{\cos \mu}{\cos v} = \tau - q \frac{\cos \lambda \cos v}{\sin^2 \lambda},$$

en tenant compte de

$$\frac{d}{ds} \cos \mu = \frac{d}{ds} S(p\alpha') = S p(-q\alpha + \tau\alpha'') = -q \cos \lambda + \tau \cos v,$$

$$\frac{d}{ds} \cos v = \frac{d}{ds} S(p\alpha'') = S p(-\tau\alpha') = -\tau \cos \mu,$$

donc

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d}{ds} \arctg \frac{\cos \mu}{\cos v} ds = \frac{1}{2\pi} \left[\arctg \frac{\cos \mu}{\cos v} \right]_C.$$

Ceci offre une interprétation géométrique de P . En posant $\cos v = \cos \Theta \cos \sigma$, $\cos \mu = \cos \Theta \sin \sigma$, $\cos v = \sin \Theta$, on a

$$\sigma = \arctg \frac{\cos \mu}{\cos v}, \quad P = [\sigma]_C.$$

On obtient donc l'angle σ en projetant la direction $\delta(p, q, r)$ dans le plan normal à C en M ; σ est alors l'angle de cette projection avec la binormale en M . Et P est la variation, divisée par 2π , de σ lorsque M parcourt la courbe C en entier.

Pour étudier les valeurs de P dans leur dépendance du choix de la direction fixe δ , il est utile de se servir de l'indicatrice sphérique des tangentes à C . Cette indicatrice Γ est une courbe fermée qui, avec sa courbe antipole Γ^* sur la sphère-unité, partage cette sphère en plusieurs domaines. Nous montrerons que P est constant dans chacun de ces domaines, et éprouve un saut au passage d'un domaine à un domaine contigu.

Supposons que le vecteur unitaire δ , mené par le centre de la sphère-unité, ait son extrémité à l'intérieur de l'un des domaines en question. Soit δ' un autre vecteur unitaire ayant son extrémité dans le même domaine, et σ' l'angle analogue à σ , correspondant à δ' . Il est clair que $\sigma' - \sigma$ est la projection de l'angle $u = (\delta\delta')$ sur le plan normal à C en M . Ainsi, $2\pi(P' - P)$ est donnée par la variation de u lorsque M parcourt la courbe C . Or, cette variation est nulle dans le cas envisagé, puisque l'angle u revient à sa figure initiale sans avoir pu dépasser la valeur π . Il en est autrement lorsque δ et δ' ont leurs extrémités dans des domaines contigus, séparés par un arc de la courbe Γ ou Γ^* . L'arc sphérique $\delta\delta'$ sera alors traversé une fois par un arc de Γ ou de Γ^* , et la projection $|\sigma' - \sigma|$ de l'angle u , dans le plan normal à C en M , passera une fois et une seule par la valeur π , et $\sigma' - \sigma$ reviendra à sa figure initiale avec une valeur augmentée de $\pm 2\pi$. On a donc $P' - P = \pm 1$, suivant le sens de parcours sur Γ ou Γ^* .

Ces propriétés de l'invariant P nous rappellent celles du „nombre de tours“ d'une courbe plane fermée autour d'un point de son plan. Or, il est facile de définir un invariant analogue pour une courbe fermée sphérique. La direction de δ ne passant par aucun point de l'indicatrice Γ , donc, l'extrémité de δ n'étant située ni sur Γ ni sur Γ^* , menons un plan passant par δ et un point M mobile sur Γ . Désignons par ω l'angle de ce plan Π avec un plan fixe passant aussi par δ . Le nombre de tours N de Γ par rapport à δ sera la variation $(1/2\pi) [\omega]_C$ de l'angle ω lorsque le point M parcourt la courbe Γ en entier. M' étant un point de Γ infiniment voisin de M , la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique nous donne

$$\cos MM' = \cos M\delta \cos M'\delta + \sin M\delta \sin M'\delta \cos d\omega.$$

Avec des notations déjà utilisées, $M\delta = \lambda$, $M'\delta = \lambda + d\lambda$, et l'on a $-\sin \lambda d\lambda = q \cos \mu ds$. On en déduit, puisque $MM' = |d\mathbf{t}| = q ds$,

$$q^2 ds^2 = d\lambda^2 + \sin^2 \lambda d\omega^2, \quad \text{d'où} \quad d\omega = q \frac{\cos v}{\sin^2 \lambda} ds,$$

$$N = \frac{1}{2\pi} [\omega]_C = \frac{1}{2\pi} \int_C q \frac{\cos v}{\sin^2 \lambda} ds.$$

Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{c}$ deux vecteurs fixes qui, avec δ , forment un trièdre rectangle, et dési-

gnons par φ et ψ les angles de $\mathbf{t}$ avec $\mathbf{c}$ et $\mathbf{a}$ respectivement. On voit alors que l'on a

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad N = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right]_C.$$

Ceci prouve le caractère invariant de N . Les courbes de discontinuité de N , sur la sphère-unité, sont aussi Γ et Γ^* , mais le signe du saut que N éprouve lorsque δ traverse un arc de Γ est contraire à celui qui correspond à un arc de Γ^* , les sens de parcours par rapport à $\delta\delta'$ étant les mêmes. On le vérifie encore en remarquant qu'en des points antipodes M et M^* , P prend les mêmes valeurs, tandis que N prend des valeurs opposées; il suffit de remplacer $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ par leurs opposées dans les formules

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\tau - \varrho \frac{\cos \lambda \cos \nu}{\sin^2 \lambda} \right) ds, \quad N = \frac{1}{2\pi} \int_C \varrho \frac{\cos \nu}{\sin^2 \lambda} ds.$$

On a

$$Q = P - N = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\tau - \varrho \frac{\cos \nu}{1 - \cos \lambda} \right) ds.$$

C'est un nouvel invariant dont la seule courbe de discontinuité par rapport à δ est l'indicatrice Γ . On a

$$Q(\delta) = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\cos \mu \cos \varphi + \cos \nu \cos \psi}{\cos \nu \cos \varphi - \cos \mu \cos \psi} \right]_C,$$

$$Q(-\delta) = P + N = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\tau + \varrho \frac{\cos \nu}{1 + \cos \lambda} \right) ds,$$

$$2P = Q(-\delta) + Q(\delta), \quad 2N = Q(-\delta) - Q(\delta).$$

Les invariants P et N s'expriment donc à l'aide de $Q(\delta)$, qui est le plus simple de ces invariants.

7. Sur quelques invariants d'ordre supérieur. Reprenons la construction indiquée au No 1 (II). Soit Σ_n une surface algébrique de degré n , tangente en M au noeud C , surface représentée par

$$a_2 Y + a_3 Z + a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 + a_{33} Z^2 + a_{23} YZ + a_{31} ZX + a_{12} XY + a_{111} X^3 + \\ + a_{222} Y^3 + a_{333} Z^3 + a_{112} X^2 Y + \dots = 0$$

où X, Y, Z sont des coordonnées cartésiennes relatives au trièdre de Frenet d'origine

On obtient donc l'angle σ en projetant la direction $\delta(p, q, r)$ dans le plan normal à C en M ; σ est alors l'angle de cette projection avec la binormale en M . Et P est la variation, divisée par 2π , de σ lorsque M parcourt la courbe C en entier.

Pour étudier les valeurs de P dans leur dépendance du choix de la direction fixe δ , il est utile de se servir de l'indicatrice sphérique des tangentes à C . Cette indicatrice Γ est une courbe fermée qui, avec sa courbe antipole Γ^* sur la sphère-unité, partage cette sphère en plusieurs domaines. Nous montrerons que P est constant dans chacun de ces domaines, et éprouve un saut au passage d'un domaine à un domaine contigu.

Supposons que le vecteur unitaire δ , mené par le centre de la sphère-unité, ait son extrémité à l'intérieur de l'un des domaines en question. Soit δ' un autre vecteur unitaire ayant son extrémité dans le même domaine, et σ' l'angle analogue à σ , correspondant à δ' . Il est clair que $\sigma' - \sigma$ est la projection de l'angle $u = (\delta\delta')$ sur le plan normal à C en M . Ainsi, $2\pi(P' - P)$ est donnée par la variation de u lorsque M parcourt la courbe C . Or, cette variation est nulle dans le cas envisagé, puisque l'angle u revient à sa figure initiale sans avoir pu dépasser la valeur π . Il en est autrement lorsque δ et δ' ont leurs extrémités dans des domaines contigus, séparés par un arc de la courbe Γ ou Γ^* . L'arc sphérique $\delta\delta'$ sera alors traversé une fois par un arc de Γ ou de Γ^* , et la projection $|\sigma' - \sigma|$ de l'angle u , dans le plan normal à C en M , passera une fois et une seule par la valeur π , et $\sigma' - \sigma$ reviendra à sa figure initiale avec une valeur augmentée de $\pm 2\pi$. On a donc $P' - P = \pm 1$, suivant le sens de parcours sur Γ ou Γ^* .

Ces propriétés de l'invariant P nous rappellent celles du „nombre de tours“ d'une courbe plane fermée autour d'un point de son plan. Or, il est facile de définir un invariant analogue pour une courbe fermée sphérique. La direction de δ ne passant par aucun point de l'indicatrice Γ , donc, l'extrémité de δ n'étant située ni sur Γ ni sur Γ^* , menons un plan passant par δ et un point M mobile sur Γ . Désignons par ω l'angle de ce plan Π avec un plan fixe passant aussi par δ . Le nombre de tours N de Γ par rapport à δ sera la variation $(1/2\pi) [\omega]_C$ de l'angle ω lorsque le point M parcourt la courbe Γ en entier. M' étant un point de Γ infiniment voisin de M , la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique nous donne

$$\cos MM' = \cos M\delta \cos M'\delta + \sin M\delta \sin M'\delta \cos d\omega.$$

Avec des notations déjà utilisées, $M\delta = \lambda$, $M'\delta = \lambda + d\lambda$, et l'on a $-\sin \lambda d\lambda = \varrho \cos \mu ds$. On en déduit, puisque $MM' = |d\mathbf{t}| = \varrho ds$,

$$\varrho^2 ds^2 = d\lambda^2 + \sin^2 \lambda d\omega^2, \quad \text{d'où} \quad d\omega = \varrho \frac{\cos \nu}{\sin^2 \lambda} ds,$$

$$N = \frac{1}{2\pi} [\omega]_C = \frac{1}{2\pi} \int_C \varrho \frac{\cos \nu}{\sin^2 \lambda} ds.$$

Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{c}$ deux vecteurs fixes qui, avec δ , forment un trièdre rectangle, et dési-

gnons par φ et ψ les angles de t avec c et a respectivement. On voit alors que l'on a

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad N = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right]_c.$$

Ceci prouve le caractère invariant de N . Les courbes de discontinuité de N , sur la sphère-unité, sont aussi Γ et Γ^* , mais le signe du saut que N éprouve lorsque δ traverse un arc de Γ est contraire à celui qui correspond à un arc de Γ^* , les sens de parcours par rapport à $\delta\delta'$ étant les mêmes. On le vérifie encore en remarquant qu'en des points antipodes M et M^* , P prend les mêmes valeurs, tandis que N prend des valeurs opposées; il suffit de remplacer $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ par leurs opposés dans les formules

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\tau - \varrho \frac{\cos \lambda \cos \nu}{\sin^2 \lambda} \right) ds, \quad N = \frac{1}{2\pi} \int_c \varrho \frac{\cos \nu}{\sin^2 \lambda} ds.$$

On a

$$Q = P - N = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\tau - \varrho \frac{\cos \nu}{1 - \cos \lambda} \right) ds.$$

C'est un nouvel invariant dont la seule courbe de discontinuité par rapport à δ est l'indicatrice Γ . On a

$$Q(\delta) = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\cos \mu \cos \varphi + \cos \nu \cos \psi}{\cos \nu \cos \varphi - \cos \mu \cos \psi} \right]_c,$$

$$Q(-\delta) = P + N = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\tau + \varrho \frac{\cos \nu}{1 + \cos \lambda} \right) ds,$$

$$2P = Q(-\delta) + Q(\delta), \quad 2N = Q(-\delta) - Q(\delta).$$

Les invariants P et N s'expriment donc à l'aide de $Q(\delta)$, qui est le plus simple de ces invariants.

7. Sur quelques invariants d'ordre supérieur. Reprenons la construction indiquée au No 1 (II). Soit Σ_n une surface algébrique de degré n , tangente en M au noeud C , surface représentée par

$$a_2 Y + a_3 Z + a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 + a_{33} Z^2 + a_{23} YZ + a_{31} ZX + a_{12} XY + a_{111} X^3 + a_{222} Y^3 + a_{333} Z^3 + a_{112} X^2 Y + \dots = 0$$

où X, Y, Z sont des coordonnées cartésiennes relatives au trièdre de Frenet d'origine

M . Afin de mettre les conditions d'un contact d'ordre > 1 de C avec Σ_n en M , nous emploierons les développements

$$x = s + \frac{s^3}{6} A_2 + \frac{s^4}{24} A_3 + \frac{s^5}{120} A_4 + \dots,$$

$$y = \frac{s^2}{2} B_1 + \frac{s^3}{6} B_2 + \frac{s^4}{24} B_3 + \frac{s^5}{120} B_4 + \dots,$$

$$z = \frac{s^3}{6} C_2 + \frac{s^4}{24} C_3 + \frac{s^5}{120} C_4 + \dots$$

des coordonnées d'un point $P \in C$ voisin de M . On a posé ici

$$\frac{d^n \alpha}{ds^n} = A_n \alpha + B_n \alpha' + C_n \alpha'', \quad \frac{d^n \beta}{ds^n} = A_n \beta + B_n \beta' + C_n \beta'',$$

$$\frac{d^n \gamma}{ds^n} = A_n \gamma + B_n \gamma' + C_n \gamma''$$

avec

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{ds} - \varrho B_n,$$

$$B_{n+1} = \frac{dB_n}{ds} + \varrho A_n - \tau C_n, \quad A_0 = 1, B_0 = 0, C_0 = 0,$$

$$C_{n+1} = \frac{dC_n}{ds} + \tau B_n$$

formules que l'on obtient sans peine en appliquant les formules de Frenet. On a

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \varrho, \quad C_1 = 0; \quad A_2 = -\varrho^2, \quad B_2 = \varrho', \quad C_2 = \varrho\tau;$$

$$A_3 = -3\varrho\varrho', \quad B_3 = \varrho'' - \varrho(\varrho^2 + \tau^2), \quad C_3 = \varrho\tau' + 2\tau\varrho'.$$

En substituant x, y, z dans l'équation de Σ_n et en annulant les coefficients des puissances successives de s , on obtient pour les coefficients a un système linéaire dont les premières équations sont

$$\begin{aligned} a_2 B_1 + 2a_{11} &= 0 \\ a_2 B_2 + a_3 C_2 + 3a_{12} B_1 + 6a_{111} &= 0 \\ a_2 B_3 + a_3 C_3 + 8a_{11} A_2 + 4a_{12} B_2 + 6a_{22} B_1^2 + 4a_{31} C_2 + 12a_{112} B_1 &= 0 \\ a_2 B_4 + a_3 C_4 + 10a_{11} A_3 + 5a_{12} (B_3 + 2A_2 B_1) + 60a_{111} A_2 + 20a_{22} B_1 B_2 + 5a_{31} C_3 + 20a_{112} B_2 + 10a_{23} B_1 C_2 + 20a_{113} C_2 + 30a_{122} B_1^2 + 60a_{1112} B_1 &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

La normale en M à Σ_n , située dans le plan normal à C en M , fait avec la normale principale $n(M)$ un angle ω donné par $\operatorname{tg} \omega = a_3/a_2$. En prenant sur la normale à Σ_n en

M un point M^* , à distance ε de M , on obtient une courbe C^* , et il est clair que le coefficient d'enlacement $G(C, C^*)$ est donné par $K + (1/2\pi)[\omega]_C$. On obtient ainsi des invariants analogues à K , mais d'ordre > 3 .

Ainsi, pour avoir un contact d'ordre 3, nous nous bornerons aux deux premières équations du système ci-dessus. On voit que, pour $a_{12}B_1 + 2a_{111} = 0$, la seconde équation donne

$$\frac{a_3}{a_2} = -\frac{B_2}{C_2}, \quad \text{donc} \quad -\omega = \arctg \frac{\varrho'}{\varrho\tau}.$$

Le cas de la sphère osculatrice y est inclus ($a_{12} = a_{111} = 0$), mais on voit que, quel que soit le degré n de Σ_n , et quel que soit l'ordre de contact (≥ 3), il suffit que les termes en XY et X^3 manquent dans l'équation de Σ_n pour que la normale à Σ_n en M passe par le centre de la sphère osculatrice à C en M .

Pour avoir un contact d'ordre 4, nous écrirons les trois premières équations du système sous la forme

$$\begin{aligned} a_2B_1 + 2a_{111} &= 0, \\ a_2B_2 + a_3C_2 &= -3a_{12}B_1 - 6a_{111} = U_2, \\ a_2B_3 + a_3C_3 + 8a_{11}A_2 &= -4a_{12}B_2 - 6a_{22}B_1^2 - 4a_{31}C_2 - 12a_{112}B_1 = U_3. \end{aligned}$$

En résolvant par rapport à a_2 et a_3 , on trouve

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{U_2(B_1A_2 - B_3) + U_3B_2}{U_2C_3 - U_3C_2}.$$

Il suffit maintenant que $U_3 \equiv 0$ pour que

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{B_1A_2 - B_3}{C_3}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \arctg \frac{\varrho\tau^2 - \varrho''}{\varrho\tau' + 2\tau\varrho'}.$$

Un procédé analogue peut être appliqué dans le cas d'un contact d'ordre quelconque, et met en évidence des invariants de la forme $(1/2\pi)[\omega]_C$ d'ordre plus grand. Le comportement de ces invariants nous est encore inconnu.

Littérature

- [1] K. Reidemeister: Knotentheorie. Berlin 1932.
- [2] H. Seifert-Threlfall: Lehrbuch der Topologie. Berlin 1934.
- [3] H. Seifert: Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten. Math. Zeitschrift, t. 41, 1936, 1-17.
- [4] G. Polya, G. Szegő: Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis. T. II, 66, 230.
- [5] G. Călugăreanu: L'intégrale de Gauss et l'analyse des noeuds tridimensionnels. Revue de math. pures et appl., Bucarest, t. IV, 1959, 5-20.
- [6] R. Lillienthal: Vorlesungen über Differentialgeometrie. T. I, 255-257.

M . Afin de mettre les conditions d'un contact d'ordre > 1 de C avec Σ_n en M , nous emploierons les développements

$$\begin{aligned} x &= s + \frac{s^3}{6}A_2 + \frac{s^4}{24}A_3 + \frac{s^5}{120}A_4 + \dots, \\ y &= \frac{s^2}{2}B_1 + \frac{s^3}{6}B_2 + \frac{s^4}{24}B_3 + \frac{s^5}{120}B_4 + \dots, \\ z &= \frac{s^3}{6}C_2 + \frac{s^4}{24}C_3 + \frac{s^5}{120}C_4 + \dots \end{aligned}$$

des coordonnées d'un point $P \in C$ voisin de M . On a posé ici

$$\frac{d^n\alpha}{ds^n} = A_n\alpha + B_n\alpha' + C_n\alpha'', \quad \frac{d^n\beta}{ds^n} = A_n\beta + B_n\beta' + C_n\beta'',$$

$$\frac{d^n\gamma}{ds^n} = A_n\gamma + B_n\gamma' + C_n\gamma''$$

avec

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{ds} - \varrho B_n,$$

$$B_{n+1} = \frac{dB_n}{ds} + \varrho A_n - \tau C_n, \quad A_0 = 1, B_0 = 0, C_0 = 0,$$

$$C_{n+1} = \frac{dC_n}{ds} + \tau B_n$$

formules que l'on obtient sans peine en appliquant les formules de Frenet. On a

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \varrho, \quad C_1 = 0; \quad A_2 = -\varrho^2, \quad B_2 = \varrho', \quad C_2 = \varrho\tau;$$

$$A_3 = -3\varrho\varrho', \quad B_3 = \varrho'' - \varrho(\varrho^2 + \tau^2), \quad C_3 = \varrho\tau' + 2\tau\varrho'.$$

En substituant x, y, z dans l'équation de Σ_n et en annulant les coefficients des puissances successives de s , on obtient pour les coefficients a un système linéaire dont les premières équations sont

$$\begin{aligned} a_2B_1 + 2a_{111} &= 0 \\ a_2B_2 + a_3C_2 + 3a_{12}B_1 + 6a_{111} &= 0 \\ a_2B_3 + a_3C_3 + 8a_{11}A_2 + 4a_{12}B_2 + 6a_{22}B_1^2 + 4a_{31}C_2 + 12a_{112}B_1 &= 0 \\ a_2B_4 + a_3C_4 + 10a_{11}A_3 + 5a_{12}(B_3 + 2A_2B_1) + 60a_{111}A_2 + 20a_{22}B_1B_2 + & \\ + 5a_{31}C_3 + 20a_{112}B_2 + 10a_{23}B_1C_2 + 20a_{113}C_2 + 30a_{122}B_1^2 + 60a_{1112}B_1 &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

La normale en M à Σ_n , située dans le plan normal à C en M , fait avec la normale principale $n(M)$ un angle ω donné par $\tan \omega = a_3/a_2$. En prenant sur la normale à Σ_n en

M un point M^* , à distance ε de M , on obtient une courbe C^* , et il est clair que le coefficient d'enlacement $G(C, C^*)$ est donné par $K + (1/2\pi)[\omega]_C$. On obtient ainsi des invariants analogues à K , mais d'ordre > 3 .

Ainsi, pour avoir un contact d'ordre 3, nous nous bornerons aux deux premières équations du système ci-dessus. On voit que, pour $a_{12}B_1 + 2a_{111} = 0$, la seconde équation donne

$$\frac{a_3}{a_2} = -\frac{B_2}{C_2}, \text{ donc } -\omega = \arctg \frac{\varrho'}{\varrho\tau}.$$

Le cas de la sphère osculatrice y est inclus ($a_{12} = a_{111} = 0$), mais on voit que, quel que soit le degré n de Σ_n , et quel que soit l'ordre de contact (≥ 3), il suffit que les termes en XY et X^3 manquent dans l'équation de Σ_n pour que la normale à Σ_n en M passe par le centre de la sphère osculatrice à C en M .

Pour avoir un contact d'ordre 4, nous écrivons les trois premières équations du système sous la forme

$$\begin{aligned} a_2B_1 + 2a_{111} &= 0, \\ a_2B_2 + a_3C_2 &= -3a_{12}B_1 - 6a_{111} = U_2, \\ a_2B_3 + a_3C_3 + 8a_{11}A_2 &= -4a_{12}B_2 - 6a_{22}B_1^2 - 4a_{31}C_2 - 12a_{112}B_1 = U_3. \end{aligned}$$

En résolvant par rapport à a_2 et a_3 , on trouve

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{U_2(B_1A_2 - B_3) + U_3B_2}{U_2C_3 - U_3C_2}.$$

Il suffit maintenant que $U_3 \equiv 0$ pour que

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{B_1A_2 - B_3}{C_3}, \text{ d'où } \omega = \arctg \frac{\varrho\tau^2 - \varrho''}{\varrho\tau' + 2\tau\varrho'}.$$

Un procédé analogue peut être appliqué dans le cas d'un contact d'ordre quelconque, et met en évidence des invariants de la forme $(1/2\pi)[\omega]_C$ d'ordre plus grand. Le comportement de ces invariants nous est encore inconnu.

Littérature

- [1] K. Reidemeister: Knotentheorie. Berlin 1932.
- [2] H. Seifert-Threlfall: Lehrbuch der Topologie. Berlin 1934.
- [3] H. Seifert: Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten. Math. Zeitschrift, t. 41, 1936, 1—17.
- [4] G. Polya, G. Szegő: Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis. T. II, 66, 230.
- [5] G. Călugăreanu: L'intégrale de Gauss et l'analyse des noeuds tridimensionnels. Revue de math. pures et appl., Bucarest, t. IV, 1959, 5—20.
- [6] R. Lilienthal: Vorlesungen über Differentialgeometrie. T. I, 255—257.

О КЛАССАХ ИЗОТОПИИ ТРЕХМЕРНЫХ УЗЛОВ И ИХ ИНВАРИАНТАХ

Г. КАЛУГАРЯНУ (G. Călugăreanu), Клуж

Изучаются узлы (т. е. замкнутые кривые без самопересечений в трехмерном пространстве, имеющие в каждой точке касательную, непрерывно зависящую от дуги). Рассматриваются классы изотопии узлов (на изотопные деформации накладывается требование непрерывности касательных по отношению к параметру деформации). Доказывается эквивалентность этих классов с типами узлов, составленных из отрезков. Показана возможность аппроксимации узла при помощи узла того же класса, являющегося алгебраической кривой, а также возможность аппроксимации изотопной деформации при помощи деформации, являющейся полиномом относительно параметра.

Во второй части работы строятся изотопические инварианты узлов, причем используется выражение коэффициентов зацепления при помощи интеграла Гаусса.