

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

REVUE
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

TIRAGE À PART

TOME VII

1962

N° 4

Intreprinderea Poligrafică Cluj, str. Brassai 5—7. 1674 —1962

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

UN THÉORÈME SUR LES TRAVERSÉES D'UN NŒUD

PAR

GEORGES CĂLUGĂREANU

Dans ce qui suit, nous entendons par nœud un contour polygonal fermé K , simple, orienté, à un nombre fini de côtés. On définit l'équivalence (ou isotopie) de deux nœuds à l'aide des opérations Δ et Δ' ([1], p. 4) : AB étant un côté de K , et ABC un triangle qui n'a en commun avec K que les points de AB , l'opération Δ consiste à remplacer le côté AB par le contour ACB ; Δ' est l'opération inverse. Les deux opérations peuvent être confondues en une seule, de la manière suivante : ABC étant un triangle orienté qui a en commun avec K un ou deux côtés, et qui est placé de manière que les orientations des côtés communs soient opposées sur K et ABC , convenons d'appeler « addition » du triangle orienté ABC au contour K l'opération qui consiste à supprimer le côté ou les côtés communs, en laissant subsister le reste de K et de la frontière du triangle, avec leurs orientations. Nous continuerons de désigner cette opération par Δ . Deux nœuds K et K' sont isotopes si, en appliquant à l'un d'eux l'opération Δ un nombre fini de fois, on peut obtenir l'autre. Tous les nœuds isotopes à K forment le type (ou classe d'isotopie) de K . La condition posée au triangle ABC , notamment d'avoir en commun avec K un ou deux côtés seulement, est évidemment essentielle, et correspond à une déformation isotope du nœud, c'est-à-dire une déformation pendant laquelle le nœud ne se traverse pas lui-même. Mais en renonçant à cette restriction on définit, par une construction analogue à celle qui définit l'opération Δ , des déformations non isotopes de K , qui ont leur intérêt.

Appelons *traversée* la déformation de K résultant de l'addition à K d'un triangle ABC qui, outre le côté commun, ou les deux côtés communs avec K , a encore un seul point commun avec K , ce point étant intérieur à ABC et à un côté de K . Désignons par K' le nœud ainsi obtenu. Cette déformation n'étant pas isotope, une telle traversée peut être accompagnée d'un changement de la classe d'isotopie du nœud initial, et nous

dirons alors que la traversée est *essentielle*. Mais il est possible que la traversée soit *inessentielle*, la classe d'isotopie n'étant pas changée, et l'on imagine facilement des déformations de cette nature, pour un nœud quelconque. Le théorème que nous donnons ici permet de caractériser, de ce point de vue, une traversée du nœud K . L'énoncé fait appel à la décomposition d'un nœud en produit de facteurs, suivant M. H. Schubert [2], que nous croyons utile de rappeler ici: S_2 étant une sphère bidimensionnelle*), on appelle « corde » de S_2 un contour polygonal simple ayant en commun avec S_2 ses deux extrémités seulement. Une telle corde peut être placée à l'intérieur ou à l'extérieur de S_2 . K étant un nœud, et S_2 une sphère qui rencontre K en deux points seulement, K se trouve ainsi décomposé en deux cordes, u_1 et u_2 , de S_2 , situées des deux côtés de cette sphère, u_1 et u_2 ayant leurs extrémités A et B en commun. Joignons A à B par un contour polygonal simple, v , situé sur S_2 . Alors $u + v$ et $u - v$, avec une orientation convenable de v , forment deux nœuds, que la sphère S_2 sépare en quelque sorte, et, suivant M. Schubert, on appelle K le « produit » de ces deux nœuds**). L'énoncé de notre théorème est le suivant:

Soit T une traversée du nœud K , résultant de l'addition à K d'un triangle $ABC = \Sigma_1$, que le côté EF de K traverse au point ω . K' étant le nœud ainsi déformé, on suppose $K \cap \Sigma_1 = AB$, $K' \cap \Sigma_1 = AC + CB$.

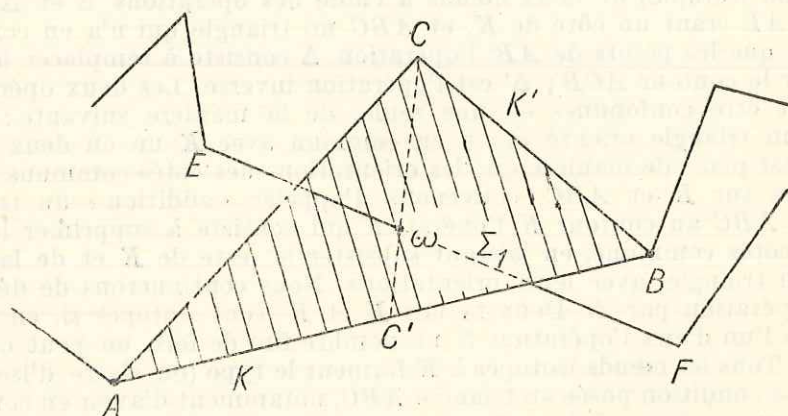


Fig. 1

La condition nécessaire et suffisante pour que T soit une traversée inessentielle du nœud K est que ce nœud se décompose en produit de deux nœuds ayant en commun le segment $C'\omega$, C' étant l'intersection de $C\omega$ avec AB (fig. 1).

*) Surface polyédrale fermée sans points multiples, de genre 0.

**) Le terme « somme » de deux nœuds serait aussi acceptable, d'autant plus que l'opération en question est commutative; l'addition d'un triangle à un nœud en est un cas particulier.

Montrons d'abord que la condition est suffisante. Admettons donc qu'il existe une sphère σ contenant le segment $C'\omega$ et séparant les contours $C'B \dots F\omega$ et $C'A \dots E\omega$. Cette sphère sépare A et B , donc elle coupe le contour ACB , mais elle ne rencontre AB qu'au point C' . Un petit déplacement des sommets de σ permettra de faire en sorte que les points d'intersection du contour ACB avec σ soient intérieurs à certaines des faces de σ , et alors le nombre de ces points sera fini et impair. Si ce nombre est > 1 , on pourra modifier σ au voisinage du triangle (plein) ABC , de manière que cette sphère rencontre le contour ACB en un seul point α (fig. 2). Ainsi, en supposant que la trace de σ sur le plan ABC

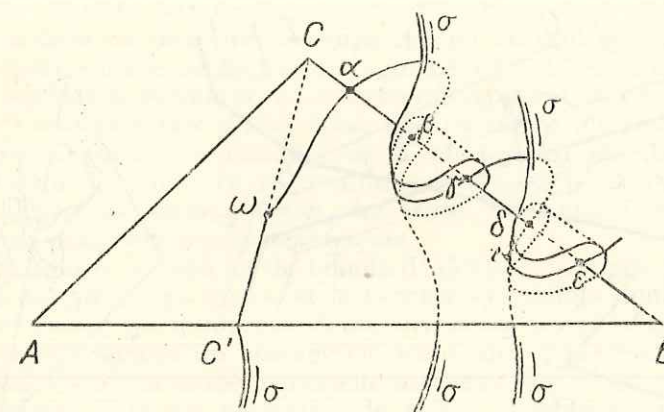


Fig. 2

contient l'arc $\omega\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$, il suffira de retrancher de l'intérieur de σ des voisinages convenables des aires délimitées dans ABC par les arcs $\beta\gamma$, $\delta\epsilon$,... Après cette modification, σ rencontre le contour ACB en un seul point α . Or, il est clair que le nœud $\omega\alpha B \dots F\omega$ résulte de $\omega C'B \dots F\omega$ par des opérations Δ à l'intérieur du triangle ABC et, de même, $\omega\alpha CA \dots E\omega$ résulte de $\omega C'A \dots E\omega$ par de telles opérations. Ainsi, $\omega\alpha B \dots F\omega$ est isotope à $\omega C'B \dots F\omega$, et $\omega\alpha CA \dots E\omega$ à $\omega C'A \dots E\omega$. Donc, K et K' étant des produits de nœuds isotopes, sont isotopes l'un de l'autre, et la traversée est inessentielle.

Pour montrer que la condition de l'énoncé est nécessaire, supposons que, la traversée étant inessentielle, K et K' sont isotopes. Or, K et K' ayant en commun le contour $K - AB$, un théorème de M. Schubert [2]*) nous permet d'affirmer qu'il existe une déformation isotope de K en K' pendant laquelle le contour $K - AB$ reste fixe. Ce théorème s'énonce ainsi: Σ étant une sphère et u_1, u_2 étant deux cordes de Σ situées à son intérieur (ou extérieur), ayant leurs extrémités communes et définissant des nœuds isotopes (si l'on joint ces extrémités par un arc simple situé sur Σ), il existe une homéomorphie semi-linéaire de l'espace sur lui-

*) p. 15, Hilfssatz 6.

même qui applique u_1 sur u_2 et qui se réduit à l'identité sur Σ et à son extérieur (ou intérieur). Construisons une sphère Σ allongée et très mince, au voisinage de $K - AB = A \dots EF \dots B$, de manière que ce contour se trouve tracé sur Σ et que Σ ne rencontre les côtés du triangle ABC qu'aux points A et B . Donc AB et le contour ACB sont deux cordes de Σ , situées à son extérieur, ayant des extrémités communes, et les nœuds qu'elles définissent avec $K - AB$, contour tracé sur Σ , sont isotopes par hypothèse. Il existe donc une homéomorphie semi-linéaire h de l'extérieur de Σ , soit Σ_e , sur lui-même, qui transforme AB en ACB en laissant fixe $K - AB$. Il existe alors également une déformation con-

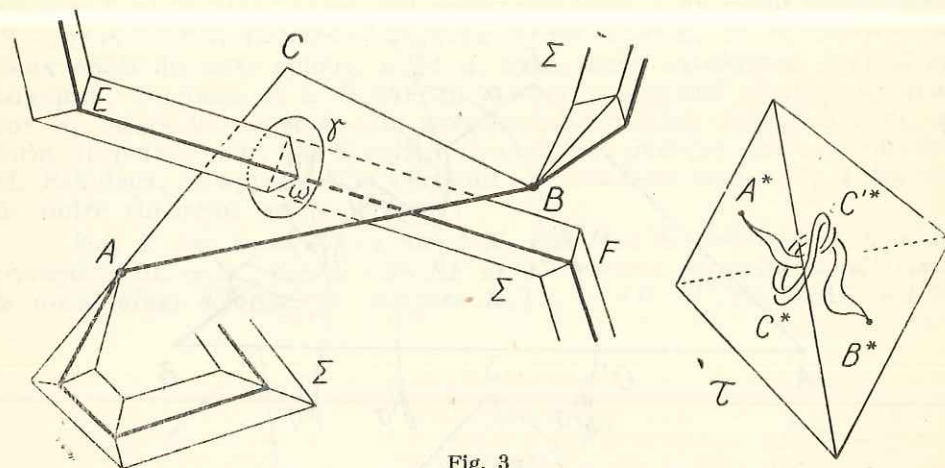


Fig. 3

tinue de Σ_e en lui-même qui amène AB sur ACB . En effet, appliquons Σ_e sur l'intérieur d'un simplexe tridimensionnel τ par une homéomorphie semi-linéaire H . Les images $A^*C^*B^*$ et $A^*C'^*B^*$ de ACB et $AC'B$ par H sont des cordes intérieures de τ (fig. 3), et $H^{-1}hH$ est une homéomorphie de l'intérieur du simplexe sur lui-même, qui applique $A^*C^*B^*$ sur $A^*C'^*B^*$. La convexité du simplexe nous permet de définir une déformation ayant le même effet, en prenant

$$M^*M_t^* = t \cdot M^*M'^*, \quad t \in [0,1] = I, \quad M'^* = H^{-1}hH(M^*)$$

où M^* est un point quelconque du simplexe et M_t^* le transformé de M^* . En désignant cette déformation par f_t , $H^{-1}f_tH$ est une déformation de Σ_e en lui-même, qui amène $AC'B$ en ACB . C'est une application $\varphi: \Sigma_e \times I \rightarrow \Sigma_e$ qui est simpliciale sur une certaine subdivision de $\Sigma_e \times I$. L'image $\varphi(AB)$ est une surface polyédrale Φ , ayant pour bord le triangle ABC . Cette surface, générée par un contour polygonal qui se déforme continûment, ses extrémités A et B restant fixes, est un élément de surface à singularités, c'est-à-dire l'image d'un triangle par une application continue. Cette surface Φ peut présenter des points multiples dont la disposition sur Φ a fait l'objet de recherches qui remontent à un travail de Dehn [3], et de recherches ultérieures qui ont abouti à la

démonstration du lemme de Dehn par C. D. Papakyriakopoulos [4]. La surface Φ pouvant rencontrer l'aire du triangle ABC , sans toutefois toucher Σ , on peut tracer dans le plan ABC un cercle γ de centre ω et de rayon assez petit, tel que Φ ne possède aucun point situé sur ce cercle ou à son intérieur. En ajoutant à Φ le domaine intérieur au triangle ABC et extérieur à ce cercle γ , on obtient un élément de surface dont le bord est γ et qui n'a pas de singularités sur le bord. Le lemme de Dehn établit alors que cet élément de surface peut être modifié de manière à obtenir un élément de surface Φ' sans aucune singularité, ayant γ pour bord, et situé dans Σ_e . En ajoutant à Φ' le disque (γ), on obtient une sphère σ qui ne rencontre $K - AB$ qu'au seul point ω , et qui coupe AB , puisque K est un contour fermé. Par des modifications déjà utilisées ci-dessus on pourra faire en sorte que σ coupe AB en un seul point, puis modifier σ de manière qu'elle contienne le segment $\omega C'$. Le nœud K est donc le produit, au sens de Schubert, de deux nœuds ayant en commun le côté $C'\omega$.

Appelons *traverseé périphérique* une traverseé inessentielle telle que la décomposition correspondante de K en produit soit banale, c'est-à-dire que l'un des facteurs du produit soit un cercle. Alors :

Si K est un nœud premier, les seules traverseés inessentielles qu'il admet sont des traverseés périphériques.

Ainsi, dans le tableau de nœuds d'Alexander-Briggs ([1]*)) ne figurant que des nœuds premiers, et le nombre des points doubles en projection étant réduit au minimum, toute inversion des passages en un point double (remplacement du passage en dessus de... par en dessous de...) correspond à une traverseé essentielle du nœud. Le nœud résultant d'une telle traverseé aura en projection le même nombre de points doubles que le nœud initial, mais sera susceptible d'être simplifié par des déformations isotopes de manière que ce nombre diminue. Il paraît que, d'une manière générale, toute traverseé de cette nature amène le nœud dans une classe à un nombre moindre de points doubles en projection, mais cela n'est pas encore établi. Le théorème énoncé dans ce travail pourrait être utile en vue de la formation d'invariants d'isotopie ([5]**)) exprimables par des fonctions de ligne attachées au nœud K . En effet, un tel invariant doit rester constant dans le cas où K subit une traverseé inessentielle, et il doit éprouver un saut pour toute traverseé essentielle.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. REIDEMEISTER, *Knotentheorie*. Springer, Berlin, 1932.
2. H. SCHUBERT, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*. Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss., 1949.
3. M. DEHN, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*. Mathematische Annalen, 1910, **69**, 137-168.
4. C. D. PAPAKYRIAKOPOULOS, *Some problems on 3-dimensional manifolds*. Bull. of the American math. Society, 1958, **64**, 317-335.
5. G. CALUGAREANU, *Sur les classes d'isotopie des nœuds tridimensionnels et leurs invariants*. Czechoslovak mathematical Journal, 1961, **11**, 588-625.

*) pp. 70-72.

**) p. 607.