

RELATIONS DIFFÉRENTIELLES MULTILOCALES QUI CARACTÉRISENT LES COURBES ALGÈBRIQUES. I.

par

G. CĂLUGĂREANU

à Cluj

Un procédé classique, du à Halphen, permet de former, par des calculs de dérivation et d'élimination, l'équation différentielle des courbes planes algébriques d'un degré donné. Ainsi,

$$(1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

étant l'équation d'une conique du plan, en dérivant cette équation 5 fois par rapport à x (y étant défini en fonction de x par cette même équation), on obtient 6 équations linéaires et homogènes par rapport aux 6 paramètres $A, B, \dots, F$. L'élimination de ces paramètres conduit à l'équation différentielle des coniques du plan, qui est du 5-me ordre. En employant les invariants différentiels affines unimodulaires [1] appelés *arc affine* σ et *courbure affine* k

$$\sigma - \sigma_0 = \int_{t_0}^t (x'y'' - y'x'')^{\frac{1}{3}} dt, \quad k = \frac{d^2x}{d\sigma^2} \frac{d^3y}{d\sigma^3} - \frac{d^2y}{d\sigma^2} \frac{d^3x}{d\sigma^3}$$

l'équation différentielle des coniques se simplifie considérablement, car elle prend la forme $k = \text{const.}$ Dans sa thèse, Halphen donne également l'équation différentielle des cubiques du plan, qui est du 9-me ordre. L'élimination des 10 paramètres qui entrent sous forme linéaire et homogène dans l'équation générale d'une cubique représente un problème ardu, dont le grand géomètre vient à bout en remarquant que la relation cherchée s'exprime plus simplement si l'on fait intervenir certaines expressions différentielles auxiliaires. L'étude de ces expressions a ensuite conduit à la formation des invariants différentiels [2] appelés *arc projectif* v et *courbure*

projective $2q$. A l'aide de ces invariants, l'équation différentielle des cubiques prend la forme assez simple [3]

$$200q(7q'' - 48q^2) = 63(5q' - 7)(5q' - 63)$$

les dérivées q', q'' étant prises par rapport à l'arc projectif v .

Dans ce travail nous voulons indiquer une modification du procédé de Halphen, qui conduit à des relations d'une autre nature, et qui sont caractéristiques des courbes algébriques.

Reprenons la conique (1), et supposons x et y exprimés en fonction de l'arc métrique s . Dérivons (1) deux fois par rapport à s , en désignant par α, β les cosinus directeurs de la tangente, et par ρ la courbure métrique. On a

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$(2) \quad (Ax + By + D)\alpha + (Bx + Cy + E)\beta = 0$$

$$\rho[(Ax + By + D)\beta - (Bx + Cy + E)\alpha] + A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0.$$

Ces trois relations peuvent être écrites pour deux points arbitraires $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ pris sur la conique (1). L'élimination des paramètres $A, B, \dots, F$ entre les 6 équations obtenues conduira cette fois à une relation bilocale, faisant intervenir les courbures ρ_1, ρ_2 en deux points arbitraires d'une conique. Cette relation, mise sous forme intrinsèque, est

$$\frac{\rho_1}{\sin^3 \theta_{12}} = \frac{\rho_2}{\sin^3 \theta_{21}}$$

et se rattache à un résultat plus général. Ici, θ_{12} représente l'angle de la corde M_1M_2 avec la tangente en M_1 , et θ_{21} a une signification analogue.

D'une manière plus générale, prenons l'équation $F(x, y) = 0$ d'une courbe algébrique de degré n , ordonnée suivant les puissances de x

$$A_0x^n - (Ay + B)x^{n-1} + \dots = 0.$$

En désignant par $r_k(y), k = 1, 2, \dots, n$ les abscisses des points d'intersection de la courbe avec une parallèle $y = \text{const.}$ à Ox , on a

$$\sum_{k=1}^n r_k = Ay + B, \quad \sum \frac{dr_k}{dy} = A = \text{const.}$$

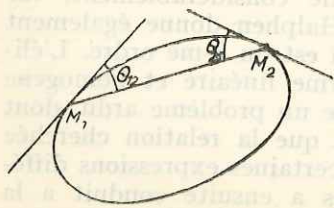


Fig. 1

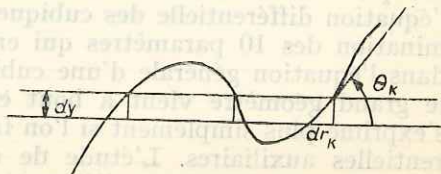


Fig. 2

Or, $\frac{d_k}{dy} = \cotg \theta_k$, en désignant par θ_k l'angle de la tangente à la courbe au point d'abscisse $r_k(0)$ situé sur Ox , avec cet axe. Donc $\sum \cotg \theta_k = \text{const}$. Dérivons encore une fois par rapport à y , en tenant compte de $dy = ds_k \sin \theta_k$. On a

$$(4) \quad \sum \frac{1}{\sin^2 \theta_k} \frac{d\theta_k}{dy} = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{\sin^3 \theta_k} = 0.$$

La relation (4), valable pour une courbe algébrique de degré n , quelconque, fait intervenir les courbures de celle-ci aux n points où la courbe rencontre une droite quelconque. Pour $n = 2$ on retrouve (3). Pour $n = 3$, on a une relation dont on déduit une propriété classique des cubiques : une droite qui joint deux points d'inflexion passe par un troisième point d'inflexion. D'une manière générale, la relation (4) montre que si une droite porte $n - 1$ points d'inflexion d'une courbe de degré n , cette droite passe encore par un n -me point d'inflexion.

Mais, retournons au procédé de Halphen, susceptible de nouvelles modifications. Ecrivons les deux premières équations du système (2) pour un système de trois points arbitraires M_1, M_2, M_3 de la conique (1). L'élimination des paramètres est encore possible, et elle conduit à une relation qui fait intervenir les directions des tangentes à la conique aux trois points ; on a

$$(5) \quad \sin \theta_{12} \sin \theta_{23} \sin \theta_{31} = \sin \theta_{21} \sin \theta_{13} \sin \theta_{32}$$

que l'on déduit encore de (3), en appliquant cette formule à chaque couple M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 et en éliminant ρ_1, ρ_2, ρ_3 . La relation (5) caractérise les coniques du plan. Elle exprime analytiquement une propriété que l'on déduit du théorème de Pascal en faisant coïncider deux à deux les sommets d'un hexagone inscrit à la conique. D'ailleurs, le théorème de Pascal lui-même s'exprime analytiquement en écrivant l'équation (1) pour six points arbitraires pris sur la conique et en éliminant les paramètres $A, B, \dots, F$.

Ces considérations peuvent être étendues aux courbes algébriques de degré supérieur. Pour chaque courbe algébrique il existe un analogue du théorème de Pascal, faisant intervenir des relations d'incidence entre les droites qui joignent deux à deux un groupe de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ points arbitrai-

res pris sur la courbe de degré n . L'expression analytique de ce théorème s'obtient en écrivant que l'équation de la courbe est vérifiée en chacun des points du groupe, et en éliminant les paramètres. A l'autre extrême nous avons l'équation différentielle de la courbe algébrique de degré n . Mais ce sont les cas intermédiaires qui nous préoccupent ici, surtout le cas des relations bilocales et trilocales.

Dans ce qui suit, nous envisageons le cas des cubiques planes et nous arrivons à une relation bilocale qui fait intervenir la courbure affine en deux points quelconques de la cubique, ainsi que d'autres invariants différentiels affines d'ordre moindre. D'une manière générale, $f(x, y) = 0$ étant l'équation d'une courbe algébrique plane, supposons x et y représentés en fonction de l'arc affine σ , et dérivons quatre fois par rapport à σ , en tenant compte des relations $x''' = kx'$, $y''' = ky'$, où k est la courbure affine. On a

$$f(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$(6) \quad 3x'x'' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3y'y'' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3(x'y'' + y'x'') \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x'^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3x'^2y' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} +$$

$$+ 3x'y'^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y'^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

$$3k \left(x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + 3x''^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3y''^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 6x''y'' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} +$$

$$+ 6x'^2x'' \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 6y'^2y'' \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 12x'y'x'' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 12x'y'y'' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} +$$

$$+ 6x'^2y'' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 6y'^2x'' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + x'^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots = 0.$$

Prenons le cas d'une cubique plane

$$3f = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx +$$

$$+ 3Ky + L = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + 2Fy + H,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 + 2Fx + 2Gy + K$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(Ax + Bx + E), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(Bx + Cy + F), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(Cx + Dy + G)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 2A, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2B, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 2C, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 2D.$$

$$6g \left(x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y^2 + 2y') \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + (2x' + 2x') \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) +$$

$$+ 3(g' + 1) \left(x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y^2 + 2y') \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + (2x' + 2x') \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (x'y' + y'x') \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) +$$

$$2' \left(x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + \dots$$

$$= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$3(g' + 1) 2 \left(x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

$$+ 6g \left(x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + \dots$$

$$y^2 - 4x^3 + g_2 x^2 + g_3 = 0$$

$$2yy' - 12x^2x' + g_2x' = 0$$

$$2yy'' + 2y'^2 - 24xx'^2 - 12x^2x'' + g_2x'' = 0$$

$$I \quad 4x^3 - y^2x - g_2x^2 - g_3x^3 = 0$$

$$II \quad 12x^2x' - 2yzy' - y^2z' - g_2z^2x' - 2g_2x^2z' - 3g_3x^2z' = 0$$

$$(12x^2 - g_2z^2)x' - 2yzy' - (y^2 + 2g_2xz + 3g_3x^2)z' = 0$$

$$III \quad (12x^2 - g_2z^2)x'' - 2yzy'' - (y^2 + 2g_2xz + 3g_3x^2)z'' + (24xx' - 2g_2x^2)z' -$$

$$- 2(2y'y' + y'g_2z') - (2yy' + 2g_2xz' + 2g_2x^2z' + 6g_3x^2z')z' = 0$$

$$2g \left\{ (12x^2 - g_2z^2)x' - 2yzy' - (y^2 + 2g_2xz + 3g_3x^2)z' \right\} +$$

$$+ (g' + 1) \left\{ (12x^2 - g_2z^2)x' - 2yzy' - (y^2 + 2g_2xz + 3g_3x^2)z' \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} (24xx' - 2g_2x^2)z' - \frac{1}{2} (y^2 + 2y'y')y'' - \frac{1}{2} (2yy' + 2g_2xz' + 2g_2x^2z' + 6g_3x^2z')z' +$$

$$+ \frac{1}{2} (24xx'' + 24x'^2 - 2g_2x^2z' - 2g_2x^2z'')z' - \frac{1}{2} (2yy'' + 2y'y' + y'^2)z' -$$

$$- \frac{1}{2} (yy'' + y'^2 + g_2x^2z' + g_2x^2z'' + g_2x^2z' + 3g_3x^2z' + 3g_3x^2z'')z' = 0$$

$$(36xx' - 3g_2x^2)z'' - (3yz' + 3zy')y'' - (3yy' + 3g_2xz' + 3g_2x^2z' + 3g_3x^2z')z'' +$$

$$+ 12x'^3 - 3g_2x'^2z' - 3y'^2z' - 3g_3x'^3 = 0$$

$$IV \quad (12x^2 - g_2z^2)x'' - (y^2 + 2y'y')y'' - (y^2 + 2y'y' + g_2xz' + g_2x^2z' + 3g_3x^2z')z'' +$$

$$+ 4x'^3 - g_2x'^2z' - y'^2z' - g_3x'^3 = 0$$

$$4x^3 - a^3x - ka^2 - y^2 = 0$$

$$12a^2 - a^3 - 2yy' - 3a^2a'x - 2kaa' = 0$$

$$3 \quad 4x^3 - g_2x - g_3 - y^2 = 0$$

$$-2 \quad 12a^2 - g_2 - 2yy' = 0$$

$$-2g_2 - 3g_3 - 3y^2 + 2ayy' = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 2ny_1' - 3y_1^2 & 1 \\ x_2 & 2ny_2' - 3y_2^2 & 1 \\ x_3 & 2ny_3' - 3y_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$z''' = 2qz' + (q' + 1)z$$

$$2q(x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y}) + (q' + 1)(2 \frac{\partial f}{\partial z} + y \frac{\partial f}{\partial y})$$

$$f(x, y, z) = 0 = Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dy^2x + 3Ex^2y + 3Fz^2x + 3Gz^2y + 3Hx^2y + 3Kxy^2 + 6Lxyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + 2x' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2z' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2x' y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2y' z' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} & 2q(x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z}) + (q' + 1)(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}) + \\ & + 2x''(x' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}) + y''(x' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}) + \\ & + 2z''(x' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + z' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}) + 2x'x'' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y'y'' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2z'z'' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \\ & + 2(x'y'' + y'z'') \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2(y'z'' + z'y'') \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2(z'x'' + x'z'') \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \\ & + x'^2(x' \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + z' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}) + y'^2(x' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y' \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + z' \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}) + \\ & + z'^2(x' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} + y' \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} + z' \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}) + 2x'y'z'(x' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} + y' \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x \partial z} + z' \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x \partial y}) + \\ & + 2x'z'(x' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} + y' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} + z' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}) + 2xy'(x' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y' \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + z' \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}) + \\ & + 3x'x'' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3y'y'' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3z'z'' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 3(y'z'' + z'y'') \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 3(z'x'' + x'z'') \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \\ & + 3(x'y'' + y'x'') \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x'^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y'^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + z'^3 \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} + 3x'y'z' \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} + 3x'y'^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \\ & + 3y'^2z' \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} + 3y'z'^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} + 3z'^2x' \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} + 3z'x'^2 \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2} + 6x'y'z' \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \\ & 3x''(x' \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}) + 3y''(x' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}) + \\ & + 3z''(x' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + z' \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}) + 6(Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dy^2x + Ex^2y + Fz^2x + Gz^2y + Hx^2y + Kxy^2 + Lxyz) = 0 \end{aligned}$$

$$4x^3 - y^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

$$12x^2 - 2yy' - g_2 = 0$$

$$g_3 = 4x^3 - y^3 - 2z(6x^2 - yy')$$

$$g_2 = 2(6x^2 - yy')$$

$$g_3 = -8x^3 - y^3 + 2xyy'$$

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = 4 \frac{(6x^2 - yy')^3}{(8x^3 + y^3 - 2xyy')^2}$$

$$+ (27 + 12y + 2x)z + (2z + 6y + 2x)h + (2z + 6y + 2x)u$$

$$f_9 = \dots$$

$$(z' h' f_9) = \dots$$

$$(z' h' f_9) = \dots$$

$$0 = \dots$$

$$+ \dots$$

$$+ \dots$$

$$+ \dots$$

$$0 = \dots$$

$$+ \dots$$

$$x(1+b) + xbz = \dots$$

M_1 et M_2 étant deux points quelconques de la cubique, nous pouvons écrire les relations (6) pour chacun de ces points. On obtient ainsi un système linéaire de 10 équations homogènes par rapport à $A, B, \dots, L$, contenant les courbures affines k_1 et k_2 aux points M_1 et M_2 . L'élimination des 10 paramètres $A, B, \dots, L$ fournit une relation entre k_1 et k_2 , valable pour deux points arbitraires pris sur une cubique. Mais, cette élimination comportant des opérations fastidieuses, on doit suivre, pour arriver au résultat, une voie appropriée.

On doit s'attendre à ce que la relation cherchée fasse intervenir, en même temps que k_1 et k_2 , certains invariants affines attachés à la courbe aux points M_1 et M_2 . Menons les tangentes t_1 et t_2 , ainsi que les normales affines n_1 et n_2 aux points M_1 et M_2 , et calculons les rapports

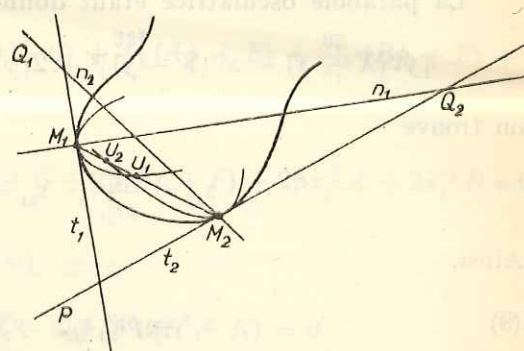


Fig 3

$$r_{12} = \frac{M_1 Q_1}{P Q_1}, \quad r_{21} = \frac{M_2 Q_2}{P Q_2}$$

qui sont des invariants affines attachés au couple (M_1, M_2) . Ensuite, menons les paraboles osculatrices en M_1 et M_2 à la cubique. Soit U_1 le point d'intersection de la parabole osculatrice en M_1 avec $M_1 M_2$, et U_2 le point de définition analogue relativement à M_2 .

Nous calculerons encore les invariants affines

$$2s_{12} = \frac{M_1 U_1}{M_1 M_2}, \quad 2s_{21} = \frac{M_2 U_2}{M_2 M_1}$$

La relation que nous cherchons étant invariante relativement aux affinités unimodulaires du plan, nous pouvons appliquer à notre cubique une affinité unimodulaire qui applique le triangle $M_1 M_2 P$ sur le triangle qui a pour sommets $O(0, 0)$, $M_1(p, 0)$, $M_2(0, p)$, avec $p^2 = 2$ aire $M_1 P M_2$. On a

$$(M_1) \quad x_1 = p, \quad y_1 = 0, \quad y'_1 = 0;$$

$$(M_2) \quad x_2 = 0, \quad y_2 = p, \quad x'_2 = 0.$$

D'ailleurs, les relations $x'_1 y'_1 - y'_1 x'_1 = 1$,

$$x'_2 y'_2 - y'_2 x'_2 = 1 \text{ nous donnent}$$

$$y'_1 = \frac{1}{x_1}, \quad x'_2 = -\frac{1}{y_2}, \text{ et l'on trouve}$$

$$r_{12} = 1 - y'_2 y'_2, \quad r_{21} = 1 + x'_1 x'_1$$

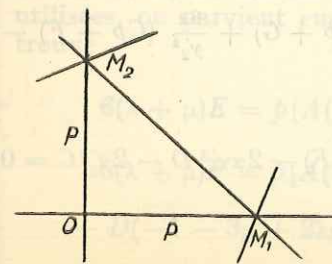


Fig. 4

donc

$$(8) \quad x_1'' = \frac{r_{21}-1}{x_1'}, y_1'' = \frac{1}{x_1'}; \quad x_2'' = -\frac{1}{y_2'}, y_2'' = -\frac{r_{12}-1}{y_2'}.$$

La parabole osculatrice étant donnée par

$$[y''(X-x) - x''(Y-y)]^2 + 2[y'(X-x) - x'(Y-y)] = 0$$

on trouve

$$s_{12} = \frac{x_1'^3}{pr_{21}^2}, \quad s_{21} = -\frac{y_2'^3}{pr_{12}^2}.$$

Ainsi,

$$(9) \quad x_1'^3 = pr_{21}^2 s_{12}, \quad y_2'^3 = -pr_{12}^2 s_{21}$$

et l'on voit que $x_1', y_2', x_1'', y_1'', x_2'', y_2''$ sont des invariants affines unimodulaires attachés au couple $(M_1 M_2)$.

En écrivant les relations (6) pour les points M_1, M_2 on trouve, en tenant compte de (7) et (9), et en posant $\alpha = r_{12} - 1, \beta = r_{21} - 1$,

$$\text{I. } Dp^3 + 3Gp^2 + 2Kp + L = 0$$

$$\text{II. } Dp_2 + 2Gp + K = 0$$

$$\text{III. } -\frac{1}{y_2'}(Cp^2 + 2Fp + H) + 2y_2'^2(Dp + G) = 0,$$

$$Cp^2 + 2Fp + H - 2y_2'^3(Dp + G) = 0$$

$$\text{IV. } -3\alpha(Dp + G) - 3(Cp + F) + y_2'^3 D = 0$$

$$\text{V.}^* \quad 3k_2 y_2'^2 (Dp + G) + \frac{3}{y_2'^2} (Bp + E) + \frac{3\alpha^2}{y_2'^2} (Dp + G) + \frac{6\alpha}{y_2'^2} (Cp + F) - 6\alpha y_2' D - 6y_2' C = 0$$

$$\text{V. } (k_2 y_2'^4 + \alpha^2)(Dp + G) + Bp + E + 2\alpha(Cp + F) - 2\alpha y_2'^3 D - 2y_2'^3 C = 0$$

$$\text{VI. } Ap^3 + 3Ep^2 + 3Hp + L = 0$$

$$\text{VII. } Ap^2 + 2Ep + H = 0$$

$$\text{VIII. } \frac{1}{x_1'}(Bp^2 + 2Fp + K) + 2x_1'^2(Ap + E) = 0,$$

$$Bp^2 + 2Fp + K + 2x_1'^3(Ap + E) = 0$$

$$\text{IX. } 3\beta(Ap + E) + 3(Bp + F) + x_1'^3 A = 0$$

$$\text{X.}^* \quad 3k_1 x_1'^2 (Ap + E) + \frac{3}{x_1'^2} (Cp + G) + \frac{3\beta^2}{x_1'^2} (Ap + E) + \frac{6\beta}{x_1'^2} (Bp + F) + 6\beta x_1' A + 6x_1' B = 0$$

$$\text{X. } (k_1 x_1'^4 + \beta^2)(Ap + E) + Cp + G + 2\beta(Bp + F) + 2\beta x_1'^3 A + 2x_1'^3 B = 0.$$

En éliminant L entre I. et VI. on a

$$(A - D)p^2 + 3(E - G)p + 3(H - K) = 0.$$

II. et VII. nous donnent $H = -p(Ap + 2E), K = -p(Dp + 2G)$, et en remplaçant ci-dessus on trouve

$$\text{I}'. \quad 2(A - D)p + 3(E - G) = 0.$$

Remplaçons les valeurs de H et K dans III. et VIII. On a, en posant

$$\lambda = r_{21}^2 s_{12}, \quad \mu = -r_{12}^2 s_{21}, \quad \text{donc } x_1'^3 = p\lambda, \quad y_2'^3 = p\mu,$$

$$\text{II}'. \quad (C - A)p + 2(F - E) - 2\mu(Dp + G) = 0.$$

$$\text{III}'. \quad (B - D)p + 2(F - G) + 2\lambda(Ap + E) = 0.$$

Les équations I'.—III'. permettent d'en tirer E, F, G en fonction de A, B, C, D . En les remplaçant dans les quatre équations non-encore utilisées, on parvient ensuite à un système homogène en A, B, C, D . On trouve

$$6(\lambda + \mu)E = p[A(1 - 6\lambda - 4\mu) - 3B + 3C - D(1 + 2\mu)]$$

$$6(\lambda + \mu)F = p[A(1 - 3\lambda - 2\lambda\mu) - 3B(1 + \mu) + 3C(1 - \lambda) + D(-1 - 3\mu + 2\lambda\mu)]$$

$$6(\lambda + \mu)G = p[A(1 - 2\lambda) - 3B + 3C - D(1 + 4\lambda + 6\mu)].$$

En posant encore $\omega_1 = k_1 x_1'^4 + \alpha^2$, $\omega_2 = k_2 y_2'^4 + \beta^2$, on a le système

$$\begin{aligned} & A(1 + \alpha - 3\lambda - 2\alpha\lambda - 2\lambda\mu) - 3B(1 + \alpha + \mu) + 3C(1 + \alpha + \lambda + 2\mu) - \\ & - D(1 + \alpha + 3\mu - 2\alpha\lambda + 2\mu^2) = 0 \\ & A(1 + \beta - 3\lambda + 2\beta\mu + 2\lambda^2) - 3B(1 + \beta - \mu - 2\lambda) + 3C(1 + \beta - \lambda) - \\ & - D(1 + \beta + 3\mu + 2\beta\mu - 2\lambda\mu) = 0 \\ & A[\omega_2(1 - 2\lambda) + 1 - 6\lambda - 4\mu + 2\alpha - 6\alpha\lambda - 4\alpha\lambda\mu] - 3B(\omega_2 + 1 + 2\alpha - 2\mu - \\ & - 2\mu + 2\alpha\mu) + 3C(\omega_2 + 1 + 2\alpha + 2\alpha\lambda + 4\alpha\mu - 4\lambda\mu - 4\mu^2) - D[\omega_2(1 - \\ & - 2\lambda) + 1 + 2\alpha + 2\mu + 6\alpha\mu + 8\alpha\lambda\mu + 12\alpha\mu^2] = 0 \\ & A[\omega_1(1 + 2\mu) + 1 + 2\beta - 2\lambda - 6\beta\lambda + 8\beta\lambda\mu + 12\beta\lambda^2] - 3B(\omega_1 + 1 + \\ & + 2\beta - 2\beta\mu - 4\beta\lambda - 4\lambda\mu - 4\lambda^2) + 3C(\omega_1 + 1 + 2\beta + 2\lambda + 2\mu - 2\beta\lambda) - \\ & - D[\omega_1(1 + 2\mu) + 1 + 2\beta + 4\lambda + 6\mu + 6\beta\mu - 4\beta\lambda\mu] = 0 \end{aligned}$$

Le déterminant que l'on obtient par élimination de A, B, C, D peut être simplifié par des opérations adéquates et conduit finalement à la relation

$$\begin{aligned} & (r_{21}^2 s_{12} - r_{12}^2 s_{21})[k_1 x_1'^4 - r_{21}^2(1 - 2s_{12})][k_2 y_2'^4 - r_{12}^2(1 - 2s_{21})] - \\ & - 4r_{21}^4 s_{12}(1 - r_{21} s_{12})^2[k_2 y_2'^4 - r_{12}^2(1 - 2s_{21})] + 4r_{12}^4 s_{21}(1 - r_{12} s_{21})^2[k_1 x_1'^4 - \\ & - r_{21}^2(1 - 2s_{12})] + 8(r_{21}^4 s_{12}^2 - r_{12}^4 s_{21}^2)r_{12}r_{21}(1 - r_{12} s_{21})(1 - r_{21} s_{12}) + \\ & + 4(r_{21}^2 s_{21} - r_{12}^2 s_{21})^3 = 0. \end{aligned}$$

Dans une seconde partie de ce travail, nous nous proposons de traiter le problème analogue concernant la courbure projective en deux points d'une cubique, puis en trois points d'une quartique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Blaschke W., *Differentialgeometrie*, II, p. 12.
- [2]. Fubini E. G. Cech., *Géométrie différentielle projective*, p. 13.
- [3]. Calugăreanu G. Gheorghiu Gh. Th., *Sur l'interprétation géométrique des invariants différentiels fondamentaux en géométrie affine et projective des courbes planes*, Bull. math. de la Soc. roumaine des Sci., Bucarest, 43, 69-83 (1941).

Reçu le 19. XI. 1963

CONSIDÉRATIONS DIRECTES SUR LA GÉNÉRATION DES NŒUDS

PAR

GEORGES CALUGĂREANU

Ce travail contient quelques remarques directes sur la manière d'obtenir un nœud de type quelconque en partant d'un cercle que l'on déforme en lui permettant de se traverser lui-même. La notion de transversale d'un nœud, peu employée jusqu'à présent, apparaît assez souvent dans nos considérations. Elle joue un rôle dans l'étude des surfaces orientables sans singularités ayant pour bord un nœud donné. Une remarque finale réduit le problème de la construction des nœuds à un problème bidimensionnel, en ce sens que l'on peut se limiter, pour construire les nœuds de types quelconques, à l'étude des courbes fermées simples tracées sur une surface fermée orientable en position normale (sphère à anses non nouées et non enlacées entre elles), que la courbe partage en deux domaines disjoints.

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Nous entendons par *nœud* [1] un contour polygonal fermé N , simple, orienté, à nombre fini de côtés, situé dans l'espace euclidien tridimensionnel E^3 . Appelons, avec M. W. Graeb [2], *application semi-linéaire* de E^3 une homéomorphie de E^3 sur lui-même qui, pour une certaine subdivision de E^3 en 3-simplexes, se réduit à une application linéaire affine dans chacun de ces 3-simplexes, l'orientation de E^3 étant conservée. Appelons *arc simple* toute image semi-linéaire d'un segment (1-simplexe) de E^3 , et *élément superficiel* e^2 toute image semi-linéaire d'un triangle (2-simplexe) de E^3 . L'intérieur de e^2 sera alors l'image de l'intérieur de ce 2-simplexe, et l'image de sa frontière sera appelée le *bord* de e^2 . Afin de simplifier le langage, nous employerons de préférence le terme *disque* pour élément superficiel.

N étant un nœud, soit e un disque dont le bord a en commun avec N un arc simple unique γ , tandis que l'intérieur de e est traversé par N en