

P 576

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XI, N° 6

1966

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00407

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

P1507/ 66

COMITÉ DE RÉDACTION

Rédacteur en chef :

MIRON NICOLESCU, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Rédacteur en chef adjoint :

GR. C. MOISIL, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Membres :

G. VRÂNCEANU, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

CAIUS IACOB, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

TIBERIU POPOVICIU, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

M. HAIMOVICI, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

GH. MIHOC, membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

G. MARINESCU, membre correspondant de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

Secrétaire de rédaction

CIPRIAN FOIAȘ

La REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES paraît 10 fois par an.

Toute commande de l'étranger (fascicules ou abonnements) sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135, Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.

Le prix d'un abonnement est de 120 lei.

Les manuscrits, les livres et les revues proposés en échange, ainsi que toute correspondance, seront envoyés à la rédaction : 47, Str. M. Eminescu, Bucarest 3, Roumanie.

TOME XI, N° 7
1966

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

SOMMAIRE

	Page
HEINZ BAUER, Mesures avec une image donnée	747
D. FIRESCU and dr. P. TĂUTU, A stochastic model of the embryonic endoderm formation at inferior metazoans	753
MARIUS IOSIFESCU, On the uniform ergodicity of a class of non-homogeneous random systems with complete connections	763
P. P. TEODORESCU, Sur quelques problèmes dynamiques de la théorie de l'élasticité	773
J. R. RETHERFORD, Some remarks on Schauder bases of subspaces	787
GÜNTER ALBINUS, Ein Beitrag zur approximativen Kompaktheit	793
IVAN SINGER, Some remarks on best approximation in normed linear spaces. II	799
G. G. LEGATOS and V. A. STAIKOS, On certain families of solutions of second order ordinary differential equations.	809
DINU WEXLER, Note on the eventual stability	819
VICTOR HERMAN, La caractérisation fonctionnelle de la fonction rationnelle d'une variable réelle	825
N. DINCULEANU and C. FOIAȘ, On the regularity of the semi-variation of set functions	831
C. TELEMEN, Sur les équations de Maurer-Cartan	839
RADU IORDĂNESCU, Les représentations quasi-irréductibles des algèbres $A_{m,n}^3$	843
ELENA KREINDLER, Le module des combinaisons différentielles linéaires à coefficients variables	847
N. RADU, Sur les anneaux cohérents laskériens	865
ȘTEFAN BERȚI et AUREL IOANOVICIU, Non-commutativité des transformations de type Peano	869
COMPTES RENDUS	875

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XI, N° 7, p. 745 — 884,
BUCAREST
1966

NON-COMMUTATIVITÉ DES TRANSFORMATIONS DE TYPE PEANO

PAR

ȘTEFAN BERTI et AUREL IOANOVICIU

(Baia Mare)

Le problème posé dans le recueil du S. M. ULAM « A COLLECTION OF MATHEMATICAL PROBLEMS » concernant l'existence des transformations de type Peano dans lesquelles la multiplication et l'addition sont commutatives, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c))$$

est solutionné dans le présent travail ; ainsi il se démontre qu'il ne peut pas exister une transformation de type Peano satisfaisant la condition (1).

Dans le présent travail, outre la transformation connue :

$$(2) \quad c = 2^{a-1} (2b - 1)$$

on introduit les transformations de type Peano pour le procédé des diagonales et le procédé des gnomons, procédés employés pour démontrer l'équivalence entre N et N^2 (où avec N on a noté l'ensemble des nombres entiers positifs). On traite également l'inversion des transformations de type Peano.

1. TRANSFORMATIONS DE TYPE PEANO

Toute correspondance biunivoque de la forme

$$(3) \quad p : N^2 \rightarrow N, \quad p(a, b) = c$$

est dite *transformation de type Peano*. Les transformations de type Peano s'obtiennent en posant en correspondance à chaque couple ordonné (a, b) ,

où $a, b \in N$, un nombre entier positif $p(a, b)$ tel que

$$(a, b) \neq (a', b') \Leftrightarrow p(a, b) \neq p(a', b')$$

et

$$p(a, b) = c$$

a une solution bien déterminée en nombres entiers positifs

(4)

$$a = q(c), b = r(c)$$

quiconque serait le nombre entier positif c . Les propriétés suivantes des fonctions (3) sont évidentes :

$$c \neq c' \Leftrightarrow (q(c), r(c)) \neq (q(c'), r(c'))$$

et

$$p(q(c), r(c)) = c.$$

Nous allons nous servir de la notation suivante

$$p(a, b), q(c), r(c),$$

respectivement

$$p, q, r,$$

dans le cas où $c = p(a, b)$ est une transformation de type Peano avec l'inversion

$$a = q(c), b = r(c).$$

Le triplet p, q, r nous l'appellerons *fonction de type Peano*.

2. EXEMPLES DES FONCTIONS DE TYPE PEANO

Une transformation de type Peano connue (op. cit.) est

(5)

$$c = p_1(a, b) = 2^{a-1}(2b - 1).$$

Nous définirons la fonction

$$n = \omega(c)$$

par les conditions

$$\left\{ \frac{c}{2^n} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{c}{2^{n+1}} \right\} \neq 0.$$

L'inversion de la transformation (5) est réalisée par

$$q_1(c) = \omega(c) + 1, \quad r_1(c) = \frac{c + 2^{\omega(c)}}{2^{\omega(c)+1}}.$$

Le triplet p_1, q_1, r_1 est la fonction de type Peano correspondante à la transformation (5).

D'autres exemples des fonctions de type Peano s'obtiennent en partant des procédés classiques de démonstration de l'équivalence des ensembles N et N^2 .

Ainsi dans le cas du procédé des diagonales la correspondance entre N^2 et N est réalisée par les tableaux

1,1	1,2	1,3	1,4	...	1	2	4	7	...
2,1	2,2	2,3	2,4	...	3	5	8	12	...
3,1	3,2	3,3	3,4	...	6	9	13	18	...
4,1	4,2	4,3	4,4	...	10	14	19	25	...
.	.	.	.	...	.	.	.	.	...

La fonction de type Peano correspondante est le triplet p_2, q_2, r_2 , où

$$(6) \quad p_2(a, b) = \frac{(a+b-2)(a+b-1)}{2} + a,$$

$$(6') \quad q_2(c) = \frac{2c - u^2 + u}{2}, \quad r_2(c) = \frac{u^2 + u - 2c + 2}{2},$$

u étant donné par la relation

$$u = \left[\frac{1 + \sqrt{8c - 7}}{2} \right].$$

Dans le cas du procédé des gnomons

1,1	1,2	1,3	1,4	...	1	2	5	10	...
2,1	2,2	2,3	2,4	...	4	3	6	11	...
3,1	3,2	3,3	3,4	...	9	8	7	12	...
4,1	4,2	4,3	4,4	...	16	15	14	13	...
.	.	.	.	...	.	.	.	.	...

on obtient

$$(7) \quad p_3(a, b) = \begin{cases} (b-1)^2 + a & \text{si } a \leq b \\ a^2 - b + 1 & \text{si } a > b \end{cases}$$

$$q_3(c) = \begin{cases} \sqrt{c} & \text{si } c = [\sqrt{c}]^2 \\ c - [\sqrt{c}]^2 & \text{si } [\sqrt{c}]^2 < c \leq [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1 \\ 1 + [\sqrt{c}] & \text{si } c > [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1 \end{cases}$$

(7')

$$r_3(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c = [\sqrt{c}]^2 \\ 1 + [\sqrt{c}] & \text{si } [\sqrt{c}]^2 < c \leq [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1 \\ (1 + [\sqrt{c}])^2 - c + 1 & \text{si } c > [\sqrt{c}]^2 + [\sqrt{c}] + 1 \end{cases}$$

3. FONCTIONS DE TYPE PEANO COMMUTATIVES

Une fonction de type Peano p, q, r est par définition *commutative*, si, quiconque était le couple des nombres entiers positifs a, b a lieu la relation

$$(8) \quad q(a+b)r(a+b) = q(ab) + r(ab).$$

La définition de la commutativité à l'aide de la relation (8) est équivalente avec celle qui est donnée dans l'ouvrage cité. En effet si $c \in N$, pour une fonction p, q, r nous avons

$$\sigma(c) = a + b, \quad \mu(c) = ab,$$

où $p(a,b) = c, a = q(c), b = r(c)$. A la transformation de type Peano cherchée dans l'ouvrage cité correspond une fonction p, q, r qui vérifie la relation de commutativité (1) quiconque serait $c \in N$. Evidemment

$$\sigma(\mu(c)) = \sigma(ab) = q(ab) + r(ab)$$

et

$$\mu(\sigma(c)) = \mu(a+b) = q(a+b)r(a+b),$$

donc les relations (1) et (8) sont équivalentes.

La non-commutativité de la fonction de type Peano p_1, q_1, r_1 résulte immédiatement de l'ouvrage cité. On peut vérifier aisément la non-commutativité des fonctions p_2, q_2, r_2 et p_3, q_3, r_3 . En effet, pour p_2, q_2, r_2 on a

$$\sigma(\mu(2)) = \sigma(2) = 3, \quad \mu(\sigma(2)) = \mu(3) = 2,$$

et pour p_3, q_3, r_3

$$\sigma(\mu(2)) = \sigma(2) = 3, \quad \mu(\sigma(2)) = \mu(3) = 4.$$

Dans la suite nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME. *Ils n'existent pas des fonctions de type Peano commutatives.*

Démonstration. Si p, q, r est une fonction de type Peano commutative, pour tout couple des nombres entiers positifs a, b a lieu la relation (8). En ce cas

$$(9) \quad p(1,1) = 1.$$

En effet, si $p(1,1)$ était égal avec un nombre $\alpha > 1, \alpha - 1$ étant un nombre entier positif, on peut remplacer en (8) $a = \alpha - 1$ et $b = 1$; on obtient

$$q(\alpha)r(\alpha) = q(\alpha-1) + r(\alpha-1) = 1.1 = 1,$$

égalité qui ne peut avoir lieu puisque $q(\alpha-1)$ et $r(\alpha-1)$ sont des nombres entiers positifs. La contradiction obtenue nous montre qu'il y a lieu (9). Montrons maintenant que, si p, q, r était commutative, alors

$$(10) \quad p(1,2) = p(2,1) = 2.$$

Dès la condition de biunivocité des fonctions de type Peano, découle que la relation (10) est contradictoire. Une fois établie la relation (10), le théorème est démontré.

Soit $p(1,2) = \beta$ où $\beta > 1, \beta - 1$ étant un nombre entier positif, on peut substituer en (8) $a = \beta - 1, b = 1$ et on obtient

$$q(\beta)r(\beta) = q(\beta-1) + r(\beta-1) = 1.2 = 2,$$

d'où résulte $q(\beta-1) = r(\beta-1) = 1$, donc en utilisant (9) on a $\beta-1 = 1$, c'est-à-dire

$$\beta = p(1,2) = 2.$$

En posant $p(2,1) = \gamma$, on en démontre par un raisonnement analogue que

$$\gamma = p(2,1) = 2.$$

La relation (10) se trouve établie et le théorème est ainsi entièrement démontré.

Reçu le 17 septembre 1965

Institut Pédagogique, Baia Mare