

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC

DIN IAȘI

SERIE NOUĂ

Tomul XIV (XVIII)

Fasc. 3-4

E X T R A S

SUR LES AUTOMORPHISMES DU GROUPE
FONDAMENTAL D'UNE SURFACE FERMÉE ORIENTABLE

PAR

G. CĂLUGĂREANU

1968

SUR LES AUTOMORPHISMES DU GROUPE FONDAMENTAL D'UNE SURFACE FERMÉE ORIENTABLE

PAR

GEORGES CĂLUGĂREANU

Membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

1. Introduction

Soit S_p une surface fermée orientable, de genre $p \geq 2$. Les applications homéomorphes de S_p sur elle-même forment le groupe $\text{Aut } S_p$ des automorphismes de S_p . Parmi ces applications, les déformations isotopes de S_p en elle-même jouent un rôle particulier. Une telle déformation est une famille d'automorphismes a_t de S_p qui dépend continûment d'un paramètre réel $t \in [0, 1]$, a_0 se réduisant à l'application identique. Soit P un point de base choisi sur S_p , G_p le groupe fondamental de S_p , et C une courbe fermée tracée sur S_p , passant par P . Alors C appartient à une classe d'homotopie $h \in G_p$, et l'on sait que toute déformation isotope de S_p fait passer la courbe C de la classe h dans une classe conjuguée $k^{-1}hk$, $k \in G_p$, le point de base P revenant à sa position initiale après déformation. Mais S_p admet bien d'autres automorphismes, que l'on ne peut obtenir par déformation. Les automorphismes de S_p peuvent être groupés en classes d'isotopie qui forment un groupe isomorphe à $\text{Aut } G_p$ (deux automorphismes appartiennent à une même classe si l'un résulte de l'autre par une déformation qui ramène le point P à sa position initiale). Les déformations correspondent aux automorphismes intérieurs de G_p . Quant aux autres automorphismes de S_p , leur connaissance revient à celle des automorphismes extérieurs du groupe fondamental G_p . La solution algébrique de ce problème n'est pas connue, sauf des résultats relatifs aux cas $p \leq 2$. Mais une analyse topologique approfondie de Max Dehn [1] contient virtuellement cette solution, du moins pour les petites valeurs de p . Cette analyse envisage directement les automorphismes de S_p , et le résultat essentiel qui s'en dégage est que chaque automorphisme de S_p peut être ramené, aux déformations près, à une suite finie d'automorphismes d'un type spécial, que M. Dehn appelle „Schraubungen“ (glissements, dans notre traduction), qui jouent le rôle de générateurs du groupe $\text{Aut } S_p$.

Dans ce travail, nous arrivons à un système de générateurs du groupe $\text{Aut } G_p$, en effectuant le passage de $\text{Aut } S_p$ à $\text{Aut } G_p$, c'est-à-dire en déterminant les générateurs de $\text{Aut } G_p$ qui correspondent aux „Schraubungen“. Une solution purement algébrique reste à trouver, ainsi que les relations qui relient ces générateurs, puis se pose le problème de réduire leur nombre au minimum.

3. Glissement de S_p sur une courbe simple

Rappelons l'opération que M. Dehn appelle „Schraubung“. C étant une courbe simple tracée sur S_p , construisons une bande B sur S_p , homéomorphe à une couronne circulaire K , l'un de ses bords coïncidant avec C . Ceci sera réalisé si l'autre bord C' est une courbe simple assez rapprochée de C . Soit h l'homéomorphie qui mène de K à B . Coupons S_p suivant C , puis déformons B de manière que C' reste fixe, ainsi que $S_p - B$, tandis que le bord C_B de B glisse sur lui-même, chaque point de C_B revenant à sa position initiale après avoir décrit une fois la courbe C . L'image sur K de cette déformation est visible sur notre fig. 3. Un tel glissement de S_p

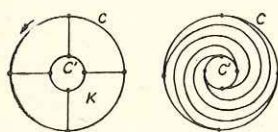


Fig. 3

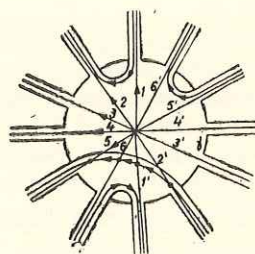


Fig. 4

définit un automorphisme de S_p , donc aussi un automorphisme de G_p , et le résultat fondamental de M. Dehn consiste dans le fait que $\text{Aut } S_p$ est engendré par un nombre fini de glissements, aux déformations près. Il ne reste qu'à trouver l'équivalent de ces glissements dans $\text{Aut } G_p$ pour obtenir un système de générateurs de ce groupe.

Soit m le mot correspondant à C . Traçons l'indicatrice de m sur la gerbe de manière que C ne passe pas par P (fig. 4; $p = 3$, $m = 56'1'2$). Traçons la courbe C' de manière que la bande B occupe, sur la gerbe, la moitié de chaque ruban extérieur à (γ) . Traçons aussi, sur la gerbe, les générateurs $1, 2, \dots, 2p$, en les faisant passer, à l'extérieur de (γ) , dans les moitiés des rubans non-occupées par B . À l'intérieur de (γ) , certains des arcs appartenant aux générateurs $1, 2, \dots, 2p$ traverseront la bande B ($5, 6, 1', 2'$ sur la fig. 4). Après glissement de S_p sur le bord C de B , les segments de ces arcs qui sont intérieurs à B seront allongés sur B , leurs extrémités sur C' restant fixes, tandis que les extrémités sur C seront entraînées le long de C , en revenant à leurs positions initiales (sur la fig. 4 on a marqué d'une flèche le bord mobile de C). La position initiale des générateurs correspondant à l'automorphisme identique, $\bar{1} = 1, \bar{2} = 2, \dots, \bar{2p} = 2p$, on calcule sans peine ce que deviennent ces générateurs après le glissement (dans le cas de la fig. 4: $\bar{1}' = 56'1'21', \bar{2}' = 56'1'22' = 56'1', \bar{3} = 3, \bar{4} = 4, \bar{5} = 56'1'25, \bar{6} = 56'1'26$, donc: $\bar{1} = 12'165', \bar{2} = 165', \bar{3} = 3, \bar{4} = 4, \bar{5} = 56'1'25, \bar{6} = 56'1'26$). Suivant que i coupe C de droite à gauche ou de gauche à

droite, on a $\bar{i} = mi$ ou $\bar{i} = im'$, si i coupe une seule fois la courbe C . Le cas de plusieurs intersections (i, C) peut être traité sans difficulté.

Nous désignerons un automorphisme tel que (1) par $a[m_1, m_2, \dots, m_{2p}]$. Les mots m_i seront appelés *composantes* de l'automorphisme a . Soit l_k la longueur du mot m_k , que l'on suppose réduit quant aux relations triviales $xx' = v$, et désignons par $L(a)$ la somme $l_1 + l_2 + \dots + l_{2p}$ que l'on appelle *longueur* de a . Nous appellerons *degré* de a le nombre $d = \max l_k$.

L'unique automorphisme de degré 1 est $[2, 3, \dots, 2p, 1']$. De même que ses puissances $[k, k+1, \dots, 2p, 1'2', \dots, (k-1)']$, cet automorphisme n'est pas normé, sauf sa puissance $4p$ -me, qui se réduit à l'identité.

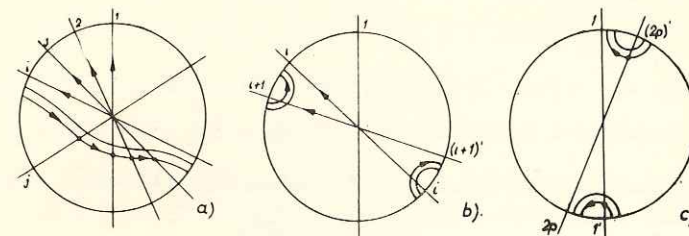


Fig. 5

On obtient des automorphismes „élémentaires“ de degré croissant en faisant glisser les générateurs sur des courbes C parallèles à un, deux, ..., k générateurs consécutifs. Ainsi, C étant parallèle au générateur i , avec $1 \leq i \leq 2p$, on trouve (fig. 5a) les automorphismes normés de degré 2

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_1[1, 1'2, 1'3, \dots, 1'(2p)], \\ \alpha_2[12, 2, 2'3, \dots, 2'(2p)], \\ \dots \\ \alpha_i[1i, 2i, \dots, (i-1)i, i, i'(i+1), \dots, i'(2p)], \\ \dots \\ \alpha_{2p}[1(2p), 2(2p), \dots, (2p-1)2p, 2p]. \end{cases}$$

Un glissement sur la courbe $i(i+1)'$ pour $1 \leq i \leq 2p-1$, sur $1(2p)$ pour $i = 2p$, donne (fig. 5b, c)

$$(4) \quad \begin{cases} \beta_i[1, 2, \dots, i-1, i(i+1)'i, i, i+2, i+3, \dots, 2p], & 1 \leq i \leq 2p-1, \\ \beta_{2p}[(2p)', 2, 3, \dots, 2p-1, (2p)1(2p)], & i = 2p, \end{cases}$$

de degré 3, qui sont normés sauf le dernier β_{2p} .

Un glissement sur $i'(i+1)(i+2)'$ pour $1 \leq i \leq 2p-2$, sur $(2p-1)(2p)1'$ pour $i=2p-1$ et sur $2'(2p)1'$ pour $i=2p$, donne (fig. 6) les automorphismes de degré 4

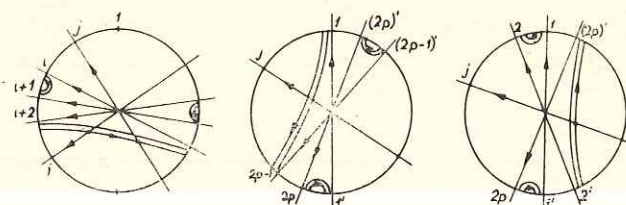


Fig. 6

$$(5) \begin{cases} 1 \leq i \leq 2p-2: \gamma_i [1(i+2)(i+1)'i, 2(i+2)(i+1)'i, \dots, (i-1)(i+2)(i+1)'i, \\ i, i+1, i+2, i'(i+1)(i+2)'(i+3), \dots, i'(i+1)(i+2)'(2p)], \\ i = 2p-1: \gamma_{2p-1} [1, (2p-1)(2p)'1'2, \dots, (2p-1)(2p)'1'(2p-2), \\ 2p-1, 2p], \\ i = 2p: \gamma_{2p} [1, 2, 32'1(2p), 42'1(2p), \dots, (2p-1)2'1(2p), 2p], \end{cases}$$

qui sont tous normés. En continuant ainsi on obtient des automorphismes de degrés croissants parmi lesquels on pourra choisir les générateurs de Γ_p . Mentionnons encore les automorphismes de degrés 5, 6, 7, que l'on peut suivre sur la fig. 7

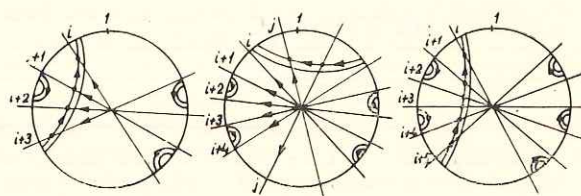


Fig. 7

$$(6) \begin{cases} 1 \leq i \leq 2p-3: \delta_i [1, 2, \dots, i-1, i(i+1)'(i+2)(i+3)'i, \\ i(i+1)'(i+2)(i+3)'(i+1), i(i+1)'(i+2)(i+3)'(i+2), \\ i(i+1)'(i+2), i+4, \dots, 2p], \\ \delta_{2p-2} [(2p)'(2p-1)(2p-2)', 2, 3, \dots, 2p-3, (2p-2)(2p-1)'(2p)1(2p-2), \\ (2p-2)(2p-1)'(2p)1(2p-1), (2p-2)(2p-1)'(2p)1(2p)], \end{cases}$$

$$(6) \begin{aligned} & \delta_{2p-1} [12'1(2p)(2p-1)', 1(2p)(2p-1)', 3, 4, \dots, 2p-2, \\ & (2p-1)(2p)'1'2(2p-1), (2p-1)(2p)'1'2(2p)], \\ & \delta_{2p} [13'21'(2p)', 23'21'(2p)', 21'(2p)'3'4, 5, \dots, 2p-1, (2p)12'3(2p)], \end{aligned}$$

dont les trois derniers ne sont pas normés, puis

$$(7) \begin{cases} i=1, \varepsilon_1: \bar{j}=j, j=1, 2, 3, 4, 5; \bar{j}=j5'43'21', 6 \leq j \leq 2p, \\ i>1, \varepsilon_i: \bar{j}=i(i+1)'(i+2)(i+3)'(i+4)j, 1 \leq j \leq i-1, \\ \bar{j}=j, j=i, i+1, i+2, i+3, i+4; \\ \bar{j}=j(i+4)'(i+3)(i+2)'(i+1)i, i+5 \leq j \leq 2p, \\ \eta_i: \bar{j}=j, j \neq i, i+1, \dots, i+5; \\ \bar{j}=i(i+1)'(i+2)(i+3)'(i+4)(i+5)'j, j=i, i+1, \dots, i+5 \end{cases}$$

et ainsi de suite. Remarquons que, parmi ces automorphismes, ceux qui sont de degré impair peuvent être exprimés à l'aide des autres. Ainsi, on trouve

$$\beta_i = \alpha_{i+1} \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}^{-1}, \quad \delta_i = \alpha_i^{-1} \gamma_{i+1}^{-1} \alpha_i, \dots$$

Il suffit donc d'employer les automorphismes élémentaires de degré pair: $\alpha_i, \gamma_i, \varepsilon_i, \dots$

4. Cas de $p=2$ ou 3

Max Dehn a traité complètement les cas $p=2, 3, 4$. Pour $p=2$, les glissements indiqués par Dehn sont a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 (fig. 8a). En choisissant les générateurs indiqués sur la fig. 8b, les mots qui représentent ces générateurs sont

$$\begin{aligned} a_1 &= 1'2, b_1 = 2'34', a_2 = 34', \\ b_2 &= 4', a_3 = 2'143' = a_1' a_2'. \end{aligned}$$

Les glissements correspondants conduisent aux automorphismes

$$[2, 21'2, 3, 4] = \beta_1^{-1} = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2^{-1}, [12'34', 2, 3, 4] = \gamma_2^{-1},$$

$$[1, 2, 34'3, 3] = \beta_3 = \alpha_4 \alpha_3^{-1} \alpha_4^{-1}, [4'1, 4'2, 4'3, 4] = I_4 \alpha_4,$$

$$[12'143', 143', 34'1'23, 34'1'24] = \alpha_2 \gamma_3^{-1} \alpha_2^{-1},$$

I_4 étant l'automorphisme intérieur $4'x4$. On a $\gamma_3 = \gamma_2^{-1} \beta_1^{-1} \gamma_2 = \beta_1^{-1} \gamma_2 \beta_1$. Les automorphismes élémentaires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_2$ sont donc des générateurs du groupe Γ_2 :

$$\alpha_1 [1, 1'2, 1'3, 1'4], \alpha_2 [12, 2, 2'3, 2'4], \alpha_3 [13, 23, 3, 3'4], \\ \alpha_4 [14, 24, 34, 4], \gamma_2 [143'2, 2, 3, 4].$$

Pour $p = 5$, nous choisirons les générateurs indiqués sur la fig. 9.

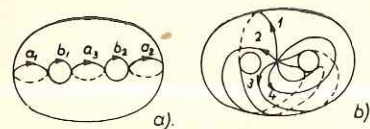


Fig. 8

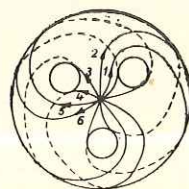


Fig. 9

Les glissements indiqués par Dehn sont alors

$$a_1 = 1'24', b_1 = 43', a_2 = 45'61, \\ a_4 = 34'6, b_2 = 12', a_3 = 2'34'5, \\ a_5 = 5'62, b_3 = 6'5, c_{51} = 6'1'23', \\ c_{14} = 45'612'6'5, c_{25} = 6'1'23'42'1, \\ c_{36} = 2'34'56'73'.$$

Les automorphismes élémentaires sont, pour $p = 3$,

$$\alpha_1 [1, 1'2, 1'3, 1'4, 1'5, 1'6], \beta_1 [12'1, 1, 3, 4, 5, 6], \\ \alpha_2 [12, 2, 2'3, 2'4, 2'5, 2'6], \beta_2 [1, 23'2, 2, 4, 5, 6], \\ \alpha_3 [13, 23, 3, 3'4, 3'5, 3'6], \beta_3 [1, 2, 34'3, 2, 5, 6], \\ \alpha_4 [14, 24, 34, 4, 4'5, 4'6], \beta_4 [1, 2, 3, 45'4, 4, 6], \\ \alpha_5 [15, 25, 35, 45, 5, 5'6], \beta_5 [1, 2, 3, 4, 56'5, 5], \\ \alpha_6 [16, 26, 36, 46, 56, 6], \beta_6 [6', 2, 3, 4, 5, 616],$$

$$\gamma_1 [1, 2, 3, 1'23'4, 1'23'5, 1'23'6], \delta_1 [12'34'1, 12'34'2, 12'34'3, 12'3, 5, 6], \\ \gamma_2 [143'2, 2, 3, 4, 2'34'5, 2'34'6], \delta_2 [1, 23'45'2, 23'45'3, 23'45'4, 23'4, 6], \\ \gamma_3 [154'3, 254'3, 3, 4, 5, 3'45'6], \delta_3 [1, 2, 34'56'3, 34'56'4, 34'56'5, 34'5], \\ \gamma_4 [165'4, 265'4, 365'4, 4, 5, 6], \delta_4 [6'54', 2, 3, 45'614, 45'615, 45'616], \\ \gamma_5 [1, 56'1'2, 56'1'3, 56'1'4, 5, 6], \delta_5 [12'165', 165', 3, 4, 56'1'25, 56'1'26], \\ \gamma_6 [1, 2, 32'16, 42'16, 52'16, 6], \delta_6 [13'21'6', 23'21'6', 21'6', 4, 5, 612'36],$$

$$\varepsilon_1 [1, 2, 3, 4, 5, 1'23'45'6], \\ \varepsilon_2 [165'43'2, 2, 3, 4, 5, 6], \\ \varepsilon_3 [1, 34'56'1'2, 3, 4, 5, 6], \\ \varepsilon_4 [1, 2, 31'165'4, 4, 5, 6], \\ \varepsilon_5 [1, 2, 3, 56'1'23'4, 5, 6], \\ \varepsilon_6 [1, 2, 3, 4, 54'32'16, 6].$$

Ces automorphismes sont normés, à l'exception de ceux qui sont marqués d'une étoile à gauche ($\beta_6, \delta_4, \delta_5, \delta_6$). Le glissement sur $a_1 = 1'24'$ conduit à l'automorphisme $\xi [1, 2, 34'1'2, 4, 42'15, 42'16]$, et l'on trouve

$$(8) \quad \xi = \beta_4^{-1} \beta_5^{-1} \gamma_6^{-1} \alpha_6 \alpha_4^{-1} \alpha_5^{-1} \alpha_6^{-1} = \alpha_5 \alpha_4 \alpha_5^{-1} \alpha_6 \alpha_5 \alpha_6^{-1} \gamma_6^{-1} \alpha_6 \alpha_4^{-1} \alpha_5^{-1} \alpha_6^{-1}.$$

Le glissement sur $b_2 = 12'$ conduit à $\eta [12'1, 1, 3, 4, 5, 6] = \beta_1 = \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$.

Le glissement sur $a_3 = 2'34'5$ conduit à

$$\zeta [1, 25'43'2, 35'43'2, 45'43'2, 43'2, 6] = \alpha_5 \gamma_2^{-1} \alpha_5^{-1}.$$

Enfin, le glissement sur $c_{36} = 2'34'56'43$ conduit à

$$\omega [12'34'56'43', 2, 34'56'43'23, 34'56'43'24, 34'65'43'243'2'34'56'5, \\ 34'56'43'243'2'34'6]$$

et l'on trouve

$$\omega = \alpha_3^{-1} \alpha_4^{-1} \delta_3^{-1} \alpha_4 \beta_2^{-2} \delta_3^{-1} \beta_2^{-1} \varepsilon_4^{-1} \gamma_4 \beta_4 \beta_3 \alpha_3^{-1} \alpha_6^{-1} \gamma_5 \varepsilon_2 \beta_1^{-1} \alpha_5 \gamma_2 \alpha_1^{-1} \gamma_1 \beta_2 \beta_3 \alpha_2^{-1} \alpha_3^{-1}.$$

Les autres glissements nécessaires pour obtenir un système de générateurs du groupe Γ_3 résultent des précédents par des permutations convenables, en tenant compte de la symétrie circulaire des générateurs du groupe G_3 , que nous avons employés. Ainsi, le glissement sur $a_4 = 34'6$ conduit à

$$\xi' [6'43'1, 6'43'2, 3, 4, 43'6'5, 6]$$

que nous écrivons sous la forme développée

$$\bar{1} = 6'43'1, \bar{2} = 6'43'2, \bar{3} = 3, \bar{4} = 4, \bar{5} = 43'6'5, \bar{6} = 6.$$

On voit alors que ξ' résulte de ξ en appliquant la permutation P_1 aux chiffres barrés et non-barrés, avec

$$P_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 3' & 4' & 5' & 6' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' \end{pmatrix}.$$

De même, le glissement sur $a_5 = 5'62$ conduit à

$$\xi'' [6'52'1, 2, 35'62, 45'62, 5, 6]$$

qui résulte de ξ' par application de P_1 . D'ailleurs, ξ' et ξ'' ne sont pas normés, mais on en déduit des automorphismes normés par „renversement“ des composantes :

$$\xi_1 [13'46', 23'46', 3, 4, 56'3'4, 6], \xi_2 [12'56', 2, 265'3, 265'4, 5, 6].$$

Ce renversement correspond au changement simultané des sens positifs des générateurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 (barrés et non-barrés); il n'altère pas le caractère „générateur“ de ces automorphismes, et nous pouvons substituer ξ_1, ξ_2 à ξ', ξ'' .

On obtient ξ_1 et ξ_2 à partir de ξ par $\xi_1 = P_2 \xi, \xi_2 = P_2^{-1} \xi$, avec

$$P_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'expression de ξ_1 et ξ_2 à l'aide des automorphismes élémentaires peut donc être obtenue en appliquant P_2 ou P_2^{-1} à chaque facteur figurant dans l'expression (8) de ξ . Or, on obtient sans peine des relations telles que

$$P_2 \alpha_1 = \alpha_3, P_2 \alpha_2 = \alpha_4, P_2 \alpha_3 = \alpha_5, P_2 \alpha_4 = \alpha_6, P_2 \alpha_5 = I_1 \alpha_1, P_2 \alpha_6 = I_2 \alpha_2$$

avec $I_1: 1x1', I_2: 2x2'$. L'application de P_2 a pour effet une permutation entre eux des automorphismes élémentaires de chaque degré, et introduit aussi certains automorphismes intérieurs (I_1, I_2 plus haut). Mais, ces automorphismes intérieurs s'éliminent d'eux mêmes dans l'expression finale de ξ_1 ou ξ_2 , ces derniers automorphismes étant normés. Les mêmes remarques sont applicables aux automorphismes qui résultent de η, ζ, ω par application de P_2 et P_2^{-1} . En somme, on voit que les automorphismes élémentaires $\alpha_i, \gamma_i, \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, 6$, suffisent pour générer le groupe Γ_3 . Mais on peut vérifier les relations

$$(9) \begin{cases} \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1} = \beta_1 \beta_2 \beta_3^{-1} \beta_2^{-1} \beta_1^{-1}, & \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5^{-1} \beta_4^{-1} \beta_3^{-1} \beta_2^{-1} \beta_1^{-1}, \\ \gamma_3 \gamma_2 \gamma_3^{-1} = \beta_2 \beta_3 \beta_4^{-1} \beta_3^{-1} \beta_2^{-1}, & \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} = \beta_1^{-1}, \\ \gamma_4 \gamma_3 \gamma_4^{-1} = \beta_3 \beta_4 \beta_5^{-1} \beta_4^{-1} \beta_3^{-1}, & \varepsilon_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4^{-1} = \beta_2^{-1}, \\ \gamma_4 \gamma_5 \gamma_4^{-1} = \beta_1^{-1} \beta_2^{-1} \beta_3^{-1} \beta_2 \beta_1, & \varepsilon_5 \varepsilon_4 \varepsilon_5^{-1} = \beta_3^{-1}, \\ \gamma_5 \gamma_6 \gamma_5^{-1} = \beta_2^{-1} \beta_3^{-1} \beta_4^{-1} \beta_3 \beta_2, & \varepsilon_6 \varepsilon_5 \varepsilon_6^{-1} = \beta_4^{-1}, \quad \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_6 \varepsilon_1 = \beta_5^{-1}. \end{cases}$$

Les β étant exprimables avec les α , et (9) permettant d'exprimer les γ et ε en fonction des β et de γ_4, ε_6 , on voit que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \varepsilon_6$ suffisent comme générateurs de Γ_3 . Ainsi, le nombre 12 des générateurs indiqués par Dehn peut être diminué à 8, dans ce cas $p = 3$. Signalons les relations

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\overleftrightarrow{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}; \gamma_2 \overleftrightarrow{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}; \gamma_3 \overleftrightarrow{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5}; \gamma_4 \overleftrightarrow{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}; \\ \gamma_5 &\overleftrightarrow{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_1}; \gamma_6 \overleftrightarrow{\alpha_6, \alpha_1, \alpha_2}; \beta_1 \overleftrightarrow{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}; \beta_2 \overleftrightarrow{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_1}; \\ \beta_3 &\overleftrightarrow{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_1, \alpha_2}; \beta_4 \overleftrightarrow{\alpha_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}; \beta_5 \overleftrightarrow{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}, \alpha_i \alpha_k \alpha_i = \alpha_k \alpha_i \alpha_k, \\ \alpha_2 &= \beta_1 \alpha_1 \beta_1^{-1}, \alpha_3 = \beta_2 \alpha_2 \beta_2^{-1}, \alpha_4 = \beta_3 \alpha_3 \beta_3^{-1}, \alpha_5 = \beta_4 \alpha_4 \beta_4^{-1}, \alpha_6 = \beta_5 \alpha_5 \beta_5^{-1}. \end{aligned}$$

La double flèche $\alpha \overleftrightarrow{\beta}$ signifie, comme il est d'usage, l'égalité $\alpha\beta = \beta\alpha$. Les dernières relations expriment les α_i en fonction de α_1 et des $\beta_1, \dots, \beta_5$, de manière à ramener les automorphismes élémentaires à $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \alpha_1, \gamma_4, \varepsilon_6$.

Signalons encore les automorphismes de degré 3

$$u_1 [12'3, 12'4, 13'4, 23'4, 5, 6], \quad u_2 [1, 23'4, 23'5, 24'5, 34'5, 6],$$

$$u_3 [1, 2, 34'5, 34'6, 35'6, 45'6],$$

qui peuvent remplacer avantageusement $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Reste à trouver une démonstration algébrique du fait que les automorphismes élémentaires signalés ici suffisent comme générateurs du groupe Γ_p pour $p \geq 4$.

Reçue le 8 I 1968

Académie de la République
Socialiste de Roumanie,
Filiale de Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Dehn M., *Die Gruppe der Abbildungsklassen*. Acta math., 1938, 69, S. 135—206.
2. Magnus W., Karrass A., Solitar D., *Combinatorial Group Theory*. Interscience Publishers, New-York, 1966.
3. Zieschang H., *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen*. Mathematica scandinavica, 1965, 17, pp. 17—40.

ASUPRA AUTOMORFISMELOR GRUPULUI FUNDAMENTAL AL UNEI SUPRAFETE ÎNCHISE ORIENTATE

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare o lucrare a lui Max Dehn [1], parvine la un sistem de generatori ai grupului fundamental $\text{Aut } G_p$ al unei suprafețe închise orientabile S_p , de gen $p \geq 2$, efectuînd trecerea de la grupul automorfismelor $\text{Aut } S_p$ al suprafeței S_p la $\text{Aut } G_p$, adică determinînd generatorii lui $\text{Aut } G_p$ care corespund la „Schraubungen“ [1].