

SUR LES GÉNÉRATEURS DE CERTAINS GROUPES D'AUTOMORPHISMES

par

GEORGES CĂLUGĂREANU

à Cluj

Soit S une surface fermée orientable, de genre $p \geq 2$. Les applications homéomorphes de S sur elle-même forment le groupe $\text{Aut } S$ des automorphismes de S . Parmi ces applications, les déformations de S en elle-même jouent un rôle particulier. Une telle déformation est une famille d'automorphismes a_t de S qui dépend continument d'un paramètre réel $t \in [0, 1]$, a_0 se réduisant à l'application identique.

Soit P un point de base choisi sur S , π_1 le groupe fondamental de S , et C une courbe fermée tracée sur S , passant par P . Soit $h \in \pi_1$ la classe d'homotopie qui contient C ; on sait que toute déformation isotope de S fait passer la courbe C de la classe h dans une classe conjuguée $k^{-1}hk$, $k \in \pi_1$, le point de base P revenant à sa position initiale après déformation. Mais S admet bien d'autres automorphismes, que l'on ne peut obtenir par déformation. Les automorphismes de S peuvent être groupés en classes d'isotopie qui forment un groupe isomorphe à $\text{Aut } \pi_1$ (deux automorphismes appartiennent à une même classe si l'un résulte de l'autre par une déformation qui ramène P à sa position initiale). Les déformations correspondent aux automorphismes intérieurs de π_1 ; quant aux autres automorphismes de S , leur connaissance revient à celle des automorphismes extérieurs du groupe π_1 . La solution algébrique de ce problème n'est pas connue, sauf des résultats relatifs aux cas $p \leq 2$. Mais une analyse topologique de MAX DEHN [2] contient virtuellement cette solution, du moins pour $p \leq 4$. Les résultats de Dehn ont ensuite été complétés et simplifiés par W. B. R. LICKORISH [6]. Cette analyse envisage directement les automorphismes de S , et le résultat essentiel qui s'en dégage est que chaque automorphisme de S peut être engendré, aux déformations près, par une suite d'automorphismes d'un type spécial que Dehn appelle „Schraubungen” (vissages) et qui jouent le rôle de générateurs du groupe $\text{Aut } S$. L'idée des „vissages”

se trouve pour la première fois dans un travail de M. GOERITZ [1], sous le nom de „Torsionen”, et Lickorish emploie le terme „twists” pour la même notion.

Dans ce travail, nous arrivons à un système de générateurs du groupe $\text{Aut } \pi_1$, pour $p \geq 2$ quelconque, en effectuant le passage de $\text{Aut } S$ à $\text{Aut } \pi_1$, c'est à dire en déterminant les générateurs de $\text{Aut } \pi_1$ qui correspondent aux vissages, suivant Lickorish. Une solution purement algébrique reste à

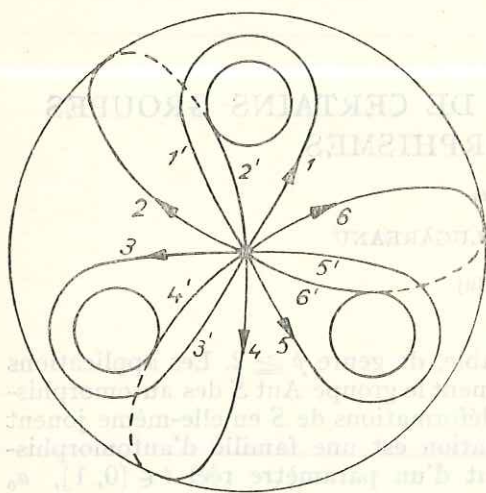


Fig. 1

trouver, ainsi que le système complet des relations qui relient ces générateurs.

1. Indicatrice d'un automorphisme. Soit $\{C_i\}$ un système de coupures canoniques de S ; un tel système est composé de $2p$ courbes simples C_i passant par un même point P , sans autre point commun et non-homotopes deux-à-deux. S coupée le long de ces courbes est un disque appelé polygone canonique de S . Chaque automorphisme de S transforme un tel système en un autre système de coupures canoniques de S .

Prenons P comme point de base sur S . Après orientation de chaque C_i , nous désignerons par i la classe d'homotopie qui contient C_i ; les i ($i = 1, 2, \dots, 2p$)

forment alors un système de générateurs du groupe π_1 . La surface S étant un „coussin à p trous”, disposons ces trous à symétrie de rotation autour de P (fig. 1; $p = 3$). Nous désignerons par i' l'inverse i^{-1} du générateur i . L'unique relation qui relie les i s'écrit alors, avec un choix convenable des courbes C_i ,

$$R = 121'2'343'4' \dots (2p-1)2p(2p-1)'(2p)' = v$$

en désignant par v le mot vide.

Un automorphisme de π_1 s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{1} &= i_{11} i_{12} \dots i_{1k_1} \\ \bar{2} &= i_{21} i_{22} \dots i_{2k_2} \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{j} &= i_{j1} i_{j2} \dots i_{jk_j} \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{2p} &= i_{2p,1} i_{2p,2} \dots i_{2p,k_{2p}} \end{aligned}$$

(1)

les i_{jh} étant des générateurs $(1, 2, \dots, 2p)$ et les mots $\bar{j}$ représentant des classes d'homotopie qui contiennent des courbes simples de S ; de plus, dans les $2p$ classes $\bar{j}$ on peut choisir $2p$ courbes simples qui forment un système de coupures canoniques de S . On sait ([3] 176, [4] 38) que les formules (1) définissent un automorphisme de π_1 si elles donnent lieu à

$$(2) \quad \bar{R} = \bar{1}\bar{2}\bar{1}'\bar{2}'\bar{3}\bar{4}\bar{3}'\bar{4}' \dots (2p-1)2p(2p-1)'(2p)' = W^{-1}R^*W, \\ W \in \pi_1, \varepsilon = \pm 1$$

cette relation étant vérifiée après application des seules „absorptions triviales” $xx' = x'x = v$; cette condition nécessaire est aussi suffisante pour que (1) donne un automorphisme de π_1 .

Un automorphisme de S est *propre* s'il conserve l'orientation de S ; l'automorphisme (1) qui lui correspond dans π_1 vérifie alors (2) avec $\varepsilon = 1$. Le passage de $\varepsilon = 1$ à $\varepsilon = -1$ étant facile à obtenir par une symétrie de la surface par rapport à un plan, on peut donc se limiter à la recherche des automorphismes propres, correspondant à $\varepsilon = 1$. La relation (2) montre que chaque automorphisme a de π_1 détermine d'une manière univoque un automorphisme qui vérifie $\bar{R} = R$. Il suffit de composer a avec l'automorphisme intérieur WxW^{-1} , $x \in \pi_1$. Nous appellerons *automorphisme normé* de π_1 chaque $a \in \text{Aut } \pi_1$ qui vérifie $\bar{R} = R$. Aux automorphismes intérieurs près, tout revient donc à l'étude des générateurs du sous-groupe $\Gamma \subset \text{Aut } \pi_1$ des automorphismes normés de π_1 .

L'étude topologique du problème est facilitée par la construction de l'*indicatrice d'un automorphisme*. Soit γ un contour fermé qui enferme sur S un voisinage de P , homéomorphe à un disque. Choisissons γ de manière que cette courbe coupe chaque C_i en deux points, situés de part et d'autre de P . Prolongeons le disque (γ) par $2p$ bandes (ou rubans) sur S , contenant respectivement les courbes $C_1, C_2, \dots, C_{2p}$, ces bandes étant assez minces pour qu'elles soient deux-à-deux disjointes à l'extérieur de (γ) . Avec le disque (γ) , ces bandes forment une surface que nous appellerons une *gerbe* G sur S (fig. 2). Le bord de cette gerbe est homotope à zéro, en vertu de la relation $R = v$.

C étant une courbe simple sur S , passant par P , sa classe d'homotopie correspond à un mot $m \in \pi_1$; nous dirons alors que m est un *mot simple*.

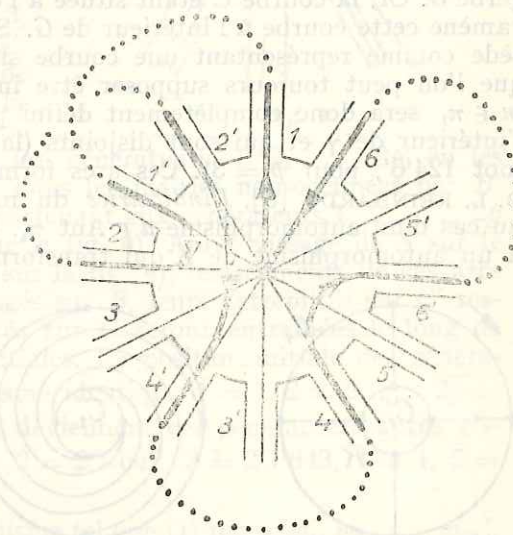


Fig. 2

On voit sans peine qu'il existe une déformation isotope de S en elle-même qui, sans déplacer le point P , fait rentrer la courbe C à l'intérieur de la gerbe G . Remarquons que $D_1 = S - G$ est un disque, de même que $D = S - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{2p})$. Prenons sur D_1 un point Q qui n'appartient pas à C , et soit D_2 un disque qui contient Q , avec $\overline{D_2} \subset D_1$, $\overline{D_2}$ ne contenant aucun point de la courbe C ; soit h une homéomorphie qui applique D sur un disque circulaire δ de rayon r , et en même temps D_1 sur un disque δ_1 concentrique à δ , de rayon $r_1 < r$, et D_2 sur un disque δ_2 concentrique à δ , de rayon $r_2 < r_1$, Q étant appliqué au centre 0 de δ . Soit u_t une déformation isotope du disque δ en lui-même, qui conserve le centre 0 et applique δ_2 sur δ_1 . On peut prendre, ρ et θ étant des coordonnées polaires dans δ , $u_t: (\rho, \theta) \rightarrow (\rho', \theta')$ avec

$$\rho' = (1-t)\rho + t \frac{\rho r_1(r-r_2)}{\rho(r_1-r_2) + r_2(r-r_1)}, \quad \theta' = \theta; \quad t \in [0, 1].$$

Alors $h^{-1}u_t$ est une déformation isotope de D en lui-même, qui applique D_2 sur D_1 et contracte la couronne $D - D_2$ sur $D - D_1$, donc sur la gerbe G . Or, la courbe C étant située à l'extérieur de D_2 , on voit que $h^{-1}u_t$ ramène cette courbe à l'intérieur de G . Soit $m \in \pi_1$ un mot simple; il possède comme représentant une courbe simple $C \subset S$ qui passe par P , et que l'on peut toujours supposer être intérieure à la gerbe G . L'élément $m \in \pi_1$ sera donc complètement défini par les arcs de C qui passent par l'intérieur de γ et qui sont disjoints (la fig. 2 donne un représentant du mot $124'6'$, pour $p=3$). Ces arcs forment ce que nous appelons, avec B. L. REINHARDT [5], l'indicatrice du mot m . Cette construction s'étend au cas d'un automorphisme $a \in \text{Aut } \pi_1$. Un tel automorphisme correspond à un automorphisme de S qui transforme le système des coupures cano-

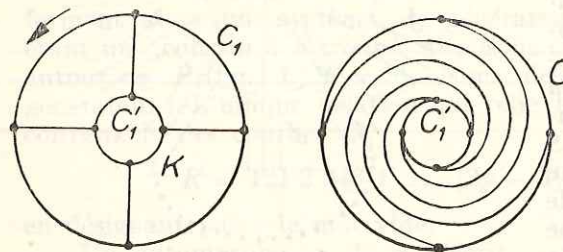


Fig. 3

2. Vissage sur une courbe simple. Rappelons la définition d'un vissage. C étant une courbe simple tracée sur S , construisons une bande B sur S , homéomorphe à une couronne circulaire K (fig. 3), l'un des bords de B coïncidant avec C . Ceci sera réalisé si l'autre bord b est une courbe simple assez rapprochée de C . Soit h l'homéomorphie qui mène de K à B . Coupons S suivant C , puis déformons K de manière que son bord C_1 tourne de 2π , C_1' restant fixe (fig. 3). L'image sur S de cette déformation, donnée

par les arcs des courbes C' intérieures au disque (γ) ; $2p$ de ces arcs passent par P , les autres étant disjoints entre eux et disjoints des arcs qui passent par P .

par h , laisse fixe chaque point de $S - B$ et le bord C' , tandis que le bord C de B glisse sur lui-même, chaque point de ce bord revenant à sa position initiale après avoir décrit une fois la courbe C . Un tel vissage le long de C définit un automorphisme de S , donc aussi un automorphisme de π_1 , et le résultat fondamental de Dehn, retrouvé par Lickorish, consiste dans le fait que $\text{Aut } S$ est engendré par un nombre fini de vissages, aux déformations près. Il ne reste qu'à trouver l'équivalent de ces vissages dans $\text{Aut } \pi_1$ pour obtenir un système de générateurs de ce groupe. Ces calculs peuvent être faits assez simplement en employant la notion d'indicatrice.

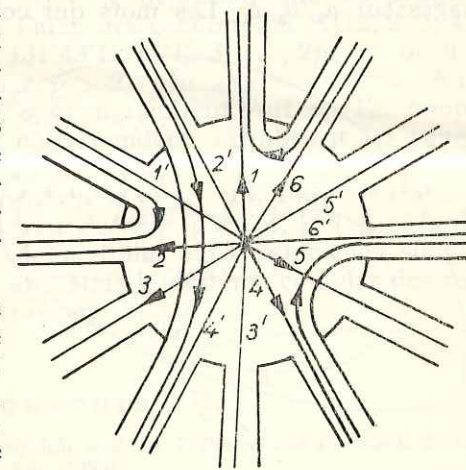


Fig. 4

Soit m le mot correspondant à la courbe C . Traçons l'indicatrice de m sur la gerbe G de manière que C ne passe pas par P (fig. 4; $p=3$, $m=124'6'$). Traçons la courbe C' , parallèle à C , de manière que la bande $B = (C, C')$ occupe, sur la gerbe, la moitié de chaque ruban extérieur à (γ) . Traçons aussi, sur la gerbe, les générateurs $1, 2, \dots, 2p$, en les faisant passer, à l'extérieur de (γ) , dans les moitiés non-occupées par B . A l'intérieur de (γ) , certains arcs appartenant aux générateurs $1, 2, \dots, 2p$ traverseront la bande $B(1', 2, 3$, sur la fig. 4). Après vissage de S sur le bord C de B (marqué d'une flèche sur la fig. 4), les segments de ces arcs qui sont intérieurs à B seront allongés sur B , leurs extrémités sur C' restant fixes, tandis que les extrémités sur C seront entraînées le long de C , en revenant à leurs positions initiales. La position initiale des générateurs correspondant à l'automorphisme identique $\bar{1} = 1, \bar{2} = 2, \dots, \bar{2p} = 2p$, on calcule sans peine ce que deviennent ces générateurs après vissage (cas de la fig. 4: $\bar{1} = 14'6'12, \bar{2} = 2'1'642, \bar{3} = 2'1'643, \bar{4} = 4, \bar{5} = 42'1'65, \bar{6} = 6$).

Nous désignerons un automorphisme tel que (1) par $a[m_1, m_2, \dots, m_{2p}]$, si $\bar{1} = m_1, \bar{2} = m_2, \dots, \bar{2p} = m_{2p}$. Les mots m_i seront appelés *composantes* de l'automorphisme a . Soit l_k la longueur du mot m_k , que l'on suppose réduit quant aux relations triviales $xx' = v$, et désignons par $L(a)$ la somme $l_1 + l_2 + \dots + l_{2p}$ que l'on appelle *longueur* de a . Nous appellerons *degré* de a le nombre $d = \max_k l_k$.

3. Générateurs du groupe $\text{Aut } \pi_1$. L'unique automorphisme de degré 1 est

$$\theta[3, 4, 5, 6, \dots, 2p-1, 2p, 1, 2].$$