

SUR LES RELATIONS DU GROUPE D'UN NŒUD

PAR

G. CĂLUGĂREANU

Procédé qui permet d'écrire les relations du groupe d'un nœud N à l'aide des générateurs intrinsèques définis dans [1], si, S étant la surface fermée orientable, en position normale, sur laquelle N est tracé, on connaît un automorphisme de S qui applique une coupure canonique de S sur le nœud N .

S étant une surface fermée orientable, dans S^3 , on dit que S est en position normale dans S^3 si S partage S^3 en deux domaines homéomorphes entre eux, que nous désignerons par $\mathcal{J}(S)$ et $\mathcal{S}(S)$. On sait [1] que, N étant un nœud dans S^3 , on peut construire une surface fermée orientable S , en position normale dans S^3 , telle que $N \subset S$, de manière que N ne sépare pas S en domaines disjoints. On a alors $\Delta = S - N$, Δ étant un domaine connexe sur S . Nous avons défini [1] une présentation intrinsèque du groupe de N , soit $\pi(N)$, à l'aide d'un système de générateurs attachés à S et nous avons indiqué un procédé de formation des relations entre ces générateurs à l'aide d'un graphe Γ tracé sur S , que nous avons appelé *graphe complémentaire* de N . Dans ce qui suit, nous montrons que ces relations (en somme, les relations du groupe d'un nœud quelconque, dans la présentation intrinsèque en question) sont intimement liées aux automorphismes de la surface S , en nous appuyant sur un théorème de H. Zieschang. Or, les automorphismes d'une surface telles que S peuvent être formés [2] à partir de deux générateurs pour $h = 2$ (h , genre de S), de trois générateurs pour $h > 2$, résultat que nous avons déduit d'un travail de W. B. R. Lickorish.

En effet, conformément au théorème de H. Zieschang [3], chaque courbe fermée simple, tracée sur S , peut être obtenue comme image d'un générateur canonique du groupe fondamental $\pi_1(S)$ par un automorphisme de la surface S . Les générateurs canoniques sont ceux que l'on emploie couramment (fig. 1, a); ces générateurs seront désignés par des chiffres; considéré comme un nœud dans S^3 , chaque générateur

canonique est donc trivial (cercle); remarquons encore que chaque générateur canonique est contractible au point de base par l'intérieur $\mathcal{I}(S)$ s'il est représenté par un chiffre pair, par l'extérieur $\mathcal{E}(S)$ dans le cas contraire. Les générateurs intrinsèques de $\pi(N)$ résultent des générateurs canoniques de $\pi_1(S)$, en maintenant fixe le point de base $O \in S - N$ et en

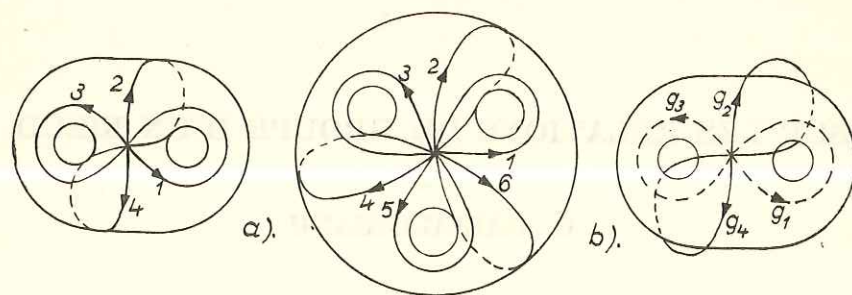


Fig. 1

faisant passer le reste de la courbe i ($i = 1, 2, \dots, 2h$) à l'intérieur de S si i est impair, à l'extérieur de S si i est pair (fig. 1, b). A chaque i il correspond ainsi une courbe g_i dont un seul point, O , se trouve sur S .

Ces courbes représentent donc des éléments de $\pi(N)$, et nous avons montré [1] qu'elles forment un système de générateurs de ce groupe, les relations entre ces g_i pouvant être obtenues après construction du graphe complémentaire de N sur S . Ce graphe Γ est caractérisé par les propriétés suivantes: 1) Γ et N sont disjoints, 2) chaque courbe simple tracée sur S , non contractible et disjointe de Γ , est homotope (donc aussi isotope, d'après Baer) à N . Or, la construction du graphe Γ pour un nœud N donné n'est pas facile. Les choses se simplifient si l'on fait intervenir les automorphismes de S .

Supposons que l'on connaisse un automorphisme $a \in \text{Aut } S$ qui applique l'un des générateurs canoniques de S (soit 1) sur N . Si N appartient à une classe d'homotopie $m \in \pi_1(S)$, on peut choisir (théorème de Zieschang) l'automorphisme a de manière que a induise dans $\pi_1(S)$ un automorphisme $A \in \text{Aut } \pi_1(S)$ dont une composante coïncide avec le mot m . Donc, si nous désignons par $A[m_1, m_2, \dots, m_{2h}]$ l'automorphisme dont les composantes sont les mots m_i ($i = 1, 2, \dots, 2h$), formés avec les générateurs canoniques $1, 2, \dots, 2h$, on a $m_k = m$ pour une valeur

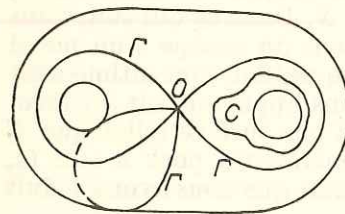


Fig. 2

de k . Or, on voit facilement que si $C \subset S$ est une courbe homotope au générateur canonique 1, disjointe de 1, le graphe complémentaire de C est formé par la réunion des générateurs canoniques de S qui ne rencontrent pas C , donc 1, 3, 4, 5, $\dots$, $2h$ (fig. 2). Si l'on applique alors l'automorphisme a , C étant appliquée sur N , les générateurs 1, 3, 4, $\dots$, $2h$ seront appliqués sur des courbes dont la réunion donne le graphe complémentaire de N . Si donc $m = m_k$, et si le générateur 2 est appliqué par A

sur la composante m_i (alors $l = k - (-1)^k$), le graphe $\Gamma(N)$ contient les circuits appartenant aux classes d'homotopie $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_{2h}$ (m_i étant éliminé de cette suite). On obtient donc [1] les relations du groupe $\pi(N)$ de la manière suivante: m_i , $i \neq l$, étant un mot appartenant à la suite précédente, et C_i un chemin fermé, orienté, partant de O et appartenant à la classe d'homotopie m_i , on fait passer C_i dans $\mathcal{I}(S)$ à l'exception du point O , puis on exprime C_i à l'aide des générateurs $g_1, g_3, \dots, g_{2h-1}$, ce qui donne un mot A_i . Ensuite, on fait passer C_i dans $\mathcal{E}(S)$, à l'exception du point O , et on l'exprime à l'aide des générateurs $g_2, g_4, \dots, g_{2h}$, ce qui donne un mot B_i . Alors $A_i = B_i$ est la relation correspondant à cette valeur de i . En tout, on obtient ainsi $2h-1$ relations qui caractérisent le groupe $\pi(N)$. Or, les mots A_i et B_i résultent immédiatement du mot m_i . En effet, faisons passer C_i dans $\mathcal{I}(S)$, en nous maintenant dans un petit voisinage de la surface S . Si $m_i = j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_s$, où les j sont des générateurs canoniques de $\pi_1(S)$, on pourra décomposer C_i en produit de circuits canoniques correspondant aux générateurs j . En faisant passer C_i dans $\mathcal{I}(S)$, chacun de ces circuits subira une petite déformation, et la courbe déformée C'_i sera encore le produit des circuits déformés correspondants. Or, dans ce produit, chaque circuit qui correspond à un j pair est contractible au point O , et peut être supprimé. On obtient donc le mot A_i en supprimant dans m_i chaque j pair, et en remplaçant chaque j impair par g_j . On voit d'une manière analogue que l'on obtient B_i en supprimant dans m_i chaque j impair et en remplaçant chaque j pair par g_j . Voici des exemples:

1) On considère l'automorphisme

$$a_1 [13^2 4^3 2^3 2^4 3^2 2^3 4^3 2^3 2^1, \\ 12^3 3^4 2^2 3^4 3^2 2^1 3^4 3^2 2^3 4^3 2^3 2^3 4^3 2^3 2^1, 12^3 3^4 2^2 3^4 3^2 2^3 4^3, \\ 43^2 2^3 3^4 3^2 2^3 4^3].$$

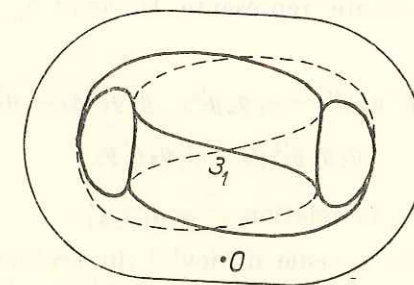


Fig. 3

La troisième composante représente le nœud 3_1 , qui ne divise pas S . Par le procédé indiqué on obtient les relations

$$(g'_4 g_2)^3 = g_1 g_3^2 g'_1, \quad (g'_2 g_4)^3 = g_1 g_3 \\ (g'_2 g_4)^3 (g_2 g'_4)^4 g_2 = g_1 g_3^2 g'_1 g_3^2 g'_1$$

dont il résulte

$$g_1 = (g'_2 g_4)^3 g_2 g'_4 g_2, \quad g_3 = g_2 g'_4 g_2 \text{ et la relation } g_4 g'_2 g_4 = g'_2 g_4 g'_2.$$

$$2) a_2 [12^2 4' 3' 2' 1', 12342' 1' 2' 343' 2' 1' 4' 3' 2' 1', 12342' 1' 2' 34, 42' 1' 2' 34].$$

La troisième composante représente le nœud 4_1 , qui ne divise pas S . On a les relations

$$g_2^2 g'_4 g'_2 = g_1 g'_3 g'_1, \quad g_2 g_4 g_2'^2 g_4 = g_1 g_3 g'_1 g_3$$

$$g_2 g_4 g_2'^2 g_4 g'_2 g'_4 g'_2 = g_1 g_3 g_1'^2 g'_3 g'_1$$

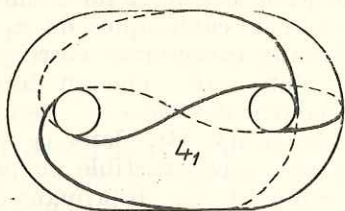


Fig. 4

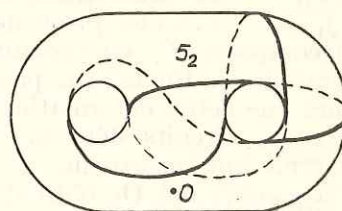


Fig. 5

dont on déduit

$$g_3 = g_4, \quad g_4 = g_1'^2 g_2^3 \text{ et la relation } g_1 g_2 g_1'^2 g_2 g_1 g_2'^3 = 1.$$

$$3) a_3 [12^2 4' 3' 2' 1', 12342' 1' 2' 343' 2' 1' 2' 2' 1', 12342' 1' 2' 34, 42' 1' 2' 34].$$

La seconde composante représente le nœud 5_2 , qui ne divise pas S . On a

$$g_2 g_4 g_2'^2 g_4 g_2'^3 = g_1 g_3 g_1'^3, \quad g_4 g_2'^2 g_4 = g'_1 g_3$$

$$g_2 g_4 g_2'^2 g_4 = g_1 g_3 g'_1 g_3$$

donc $g_1 = g_2^2$, $g_3 = g'_2$ et la relation $g_2^3 = g'_4 g_2 g'_4$.

De cette manière, la seule difficulté du problème est la recherche d'un automorphisme $a \in \text{Aut } \pi_1(S)$ qui applique l'un des générateurs canoniques sur un nœud N dont le type est donné. Or, les générateurs de $\text{Aut } \pi_1(S)$ étant connus [2], on pourra procéder inversement : construire des automorphismes de $\pi_1(S)$ à l'aide de ces générateurs, identifier les types de nœuds qui correspondent à leurs composantes (cette identification est, elle aussi, assez laborieuse), puis former les relations qui caractérisent les groupes de ces nœuds par le procédé ci-dessus.

Nos trois exemples ont été obtenus par ce procédé. On doit remarquer qu'à chaque automorphisme de $\pi_1(S)$ il correspond ainsi une suite de $2h$

nœuds sur S avec les relations qui caractérisent leurs groupes. Mais ces types ne sont pas distincts, en général. Ainsi, dans l'exemple 1) ci-dessus, les quatre composantes de a_1 représentent le même nœud 3_1 . Les relations correspondantes, quoique équivalentes, ne sont pas identiques.

Reçu le 14 février 1969

Université de Cluj

Faculté de mathématiques et mécanique

BIBLIOGRAPHIE

1. G. CĂLUGĂREANU, *Sur un choix intrinsèque des générateurs du groupe d'un nœud*. Rev. roum. math. pures et appl., 1968, **13**, 19–23.
2. — *Sur les générateurs de certains groupes d'automorphismes*. Mathematica (Cluj), 1968, **10**, 245–251.
3. H. ZIESCHANG, *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen*. Math. scand., 1965, **17**, 17–40.