

aussi certains automorphismes intérieurs (I_1, I_2 plus haut). Mais, ces automorphismes intérieurs s'éliminent d'eux mêmes dans l'expression finale de ξ_1 ou ξ_2 , ces derniers automorphismes étant normés. Les mêmes remarques sont applicables aux automorphismes qui résultent de η, ζ, ω par application de P_2 et P_2^{-1} . En somme, on voit que les automorphismes élémentaires $\alpha_i, \gamma_i, \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, 6$, suffisent pour générer le groupe Γ_3 . Mais on peut vérifier les relations

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1} = \beta_1 \beta_2 \beta_3^{-1} \beta_2^{-1} \beta_1^{-1}, & \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5^{-1} \beta_4^{-1} \beta_3^{-1} \beta_2^{-1} \beta_1^{-1} \\ \gamma_3 \gamma_2 \gamma_3^{-1} = \beta_2 \beta_3 \beta_4^{-1} \beta_3^{-1} \beta_2^{-1}, & \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} = \beta_1^{-1}, \\ \gamma_4 \gamma_3 \gamma_4^{-1} = \beta_3 \beta_4 \beta_5^{-1} \beta_4^{-1} \beta_3^{-1}, & \varepsilon_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4^{-1} = \beta_2^{-1}, \\ \gamma_4 \gamma_5 \gamma_4^{-1} = \beta_1^{-1} \beta_2^{-1} \beta_3^{-1} \beta_2 \beta_1, & \varepsilon_5 \varepsilon_4 \varepsilon_5^{-1} = \beta_3^{-1}, \\ \gamma_5 \gamma_6 \gamma_5^{-1} = \beta_2^{-1} \beta_3^{-1} \beta_4^{-1} \beta_3 \beta_2, & \varepsilon_6 \varepsilon_5 \varepsilon_6^{-1} = \beta_4^{-1}, \quad \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_6 \varepsilon_1 = \beta_5^{-1}. \end{cases}$$

Les β étant exprimables avec les α , et (9) permettant d'exprimer les γ et ε en fonction des β et de γ_4, ε_6 , on voit que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \varepsilon_6$ suffisent comme générateurs de Γ_3 . Ainsi, le nombre 12 des générateurs indiqués par Dehn peut être diminué à 8, dans ce cas $p = 3$. Signalons les relations

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\rightleftharpoons \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_2 \rightleftharpoons \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_3 \rightleftharpoons \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5; \gamma_4 \rightleftharpoons \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6; \\ \gamma_5 &\rightleftharpoons \alpha_5, \alpha_6, \alpha_1; \gamma_6 \rightleftharpoons \alpha_6, \alpha_1, \alpha_2; \beta_1 \rightleftharpoons \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6; \beta_2 \rightleftharpoons \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_1; \\ \beta_3 &\rightleftharpoons \alpha_5, \alpha_6, \alpha_1, \alpha_2; \beta_4 \rightleftharpoons \alpha_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_5 \rightleftharpoons \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_i \alpha_k \alpha_i = \alpha_k \alpha_i \alpha_k, \\ \alpha_2 &= \beta_1 \alpha_1 \beta_1^{-1}, \alpha_3 = \beta_2 \alpha_2 \beta_2^{-1}, \alpha_4 = \beta_3 \alpha_3 \beta_3^{-1}, \alpha_5 = \beta_4 \alpha_4 \beta_4^{-1}, \alpha_6 = \beta_5 \alpha_5 \beta_5^{-1}. \end{aligned}$$

La double flèche $\alpha \rightleftharpoons \beta$ signifie, comme il est d'usage, l'égalité $\alpha\beta = \beta\alpha$. Les dernières relations expriment les α_i en fonction de α_1 et des $\beta_1, \dots, \beta_5$, de manière à ramener les automorphismes élémentaires à $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \alpha_1, \gamma_4, \varepsilon_6$.

Signalons encore les automorphismes de degré 3

$$\begin{aligned} u_1[12'3, 12'4, 13'4, 23'4, 5, 6], u_2[1, 23'4, 23'5, 24'5, 34'5, 6], \\ u_3[1, 2, 34'5, 34'6, 35'6, 45'6], \end{aligned}$$

qui peuvent remplacer avantageusement $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Reste à trouver une démonstration algébrique du fait que les automorphismes élémentaires signalés ici suffisent comme générateurs du groupe Γ_p pour $p \geq 4$.

Reçue le 8 I 1968

Académie de la République
Socialiste de Roumanie,
Filiatle de Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Dehn M., *Die Gruppe der Abbildungsklassen*. Acta math., 69, (1938), S. 135—206.
2. Magnus W., Karrass A., Solitar D., *Combinatorial Group Theory*, Interscience Publishers, New-York, 1966.
3. Zieschang H., *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen*. Mathematika scandinavica, 17, (1965), 17—40.

POINT DE VUE SUR LA THÉORIE DES NOEUDS

(L'Enseignement mathématique XVI, 1 (1970), p. 97—110)

Le développement moderne de la Géométrie ne peut ignorer une figure géométrique si familière que celle du nœud, au sens que l'on donne à ce mot dans la vie courante. En effet, le nœud sur un fil est une figure géométrique que chacun de nous réalise plusieurs fois par jour (nouer sa cravate et les lacets de ses souliers). Il n'est pas douteux que les nœuds sont employés depuis les âges les plus reculés de l'humanité. Malgré cela, les mathématiciens ne sont arrivés que très tard à dégager des méthodes plus ou moins efficaces pour l'étude des nœuds, pour leur classification d'abord. Il est surprenant que l'antiquité ne nous ait rien laissé là-dessus, sauf la légende du nœud gordien, alors que la géométrie de l'antiquité est si riche en faits géométriques essentiels. Le problème des nœuds de l'espace euclidien tridimensionnel paraît avoir été abordé au XIX^e siècle par les études de Listing et du physicien Kirchhoff. Mais les vraies méthodes mathématiques adaptées à cette étude apparaissent seulement au début de notre siècle, après le développement de l'Analysis situs par les travaux de H. Poincaré, puis, après la première guerre mondiale, par les travaux de plusieurs mathématiciens allemands. K. Reidemeister publia la première monographie sous le titre «Knotentheorie», parue sur ce sujet¹. La théorie s'est développée ensuite par l'apport de nombreux mathématiciens américains et japonais. On peut dire que, à notre époque, le problème des nœuds est loin d'être épuisé, et forme un domaine de la topologie algébrique aussi bien que de la géométrie différentielle globale.

1. *Noeuds*. Un nœud est une courbe fermée simple de l'espace R^3 . C'est donc l'image homéomorphe d'un cercle, dans R^3 . Mais cette courbe fermée peut être plongée dans R^3 d'une infinité de manières différentes, et c'est ce qui donne l'infinie variété des nœuds possibles, de plus en plus compliqués. Avec un fil, faisons un nœud que nous pouvons compliquer à loisir, puis, afin d'obtenir une figure bien stable, joignons les deux bouts du fil. De quelque manière que l'on déforme alors le fil, le nœud qui y est emmagasiné ne change pas sa nature, à moins que l'on coupe le fil. C'est cette invariance vis-à-vis des déformations qui définit le *type* de nœud, et l'on voit alors que le problème de la classification de ces types exige la recherches des invariants nécessaires et relève de la topologie. De plus, les déformations que notre nœud peut subir sans changer de type sont celles pendant lesquelles la courbe ne se traverse pas elle-même, donc notre problème appartient au domaine de la topologie algébrique nommé théorie de l'isotopie.

¹ Voir aussi [5] pour une riche bibliographie du sujet.

On sait que la notion générale de courbe continue dans un espace euclidien n'exclut pas des complications de la structure locale de la courbe, que l'on devra éviter d'abord, afin de ne pas alourdir la recherche par des éléments en quelque sorte pathologiques. D'ailleurs, toute réalisation physique d'un type de nœud à l'aide d'un fil exclut les complications de microstructure de la courbe et peut nous guider dans le choix des courbes fermées de R^3 que l'on devra appeler des *nœuds de type fini*. Ce sont :

1. Les polygones fermés simples de R^3 , orientés, à un nombre fini de côtés (nœuds polygonaux).
2. Les courbes simples de R^3 , rectifiables, orientées, ayant une tangente qui varie d'une manière continue en fonction de l'arc s sur la courbe (nœuds différentiables).

On démontre que chaque nœud polygonal peut être approché uniformément par des nœuds différentiables du même type, et réciproquement.

Deux nœuds différentiables N et N' sont *isotopes* dans R^3 s'il existe une famille d'homéomorphismes continuellement différentiables par rapport à (s, t) $d_t: N \rightarrow N_t$, $t \in [0, 1]$, avec $N_0 = N$, $N_1 = N'$; d_t sera une *déformation isotope* de N en N' , et l'on voit que pendant cette déformation N_t ne se traverse pas lui-même, étant une courbe sans points multiples pour chaque $t \in [0, 1]$. Lorsque N et N' sont isotopes, nous écrirons $N \cong N'$, et l'on voit que nous avons là une relation d'équivalence. Les types de nœuds sont les classes d'équivalence correspondantes. Dans chacune de ces classes on peut choisir des représentants qui soient des nœuds polygonaux, ou des nœuds différentiables. Mais nous avons démontré que chaque type de nœuds admet aussi comme représentants des courbes algébriques unicursales (rationnelles) de R^3 , car un nœud différentiable peut être approché uniformément par des courbes simples unicursales appartenant au même type.

Dans le cas des nœuds polygonaux, il a été démontré par W. Graeb que deux nœuds sont isotopes si et seulement si il existe un homéomorphisme simplicial de R^3 sur lui-même qui applique l'un des nœuds sur l'autre. Nous ne connaissons aucun résultat analogue dans le cas des nœuds différentiables.

L'instrument analytique le plus efficace dans l'étude des types de nœuds est le groupe fondamental de l'espace complémentaire $R^3 - N$, appelé *groupe du nœud* N . Ce groupe permet de distinguer entre des types différents de nœuds, dans bien des cas, si l'on peut établir que les groupes des deux nœuds en question ne sont pas isomorphes. Mais cet instrument ne peut suffire, car il existe aussi des couples de nœuds qui ne sont pas isotopes, quoique leurs groupes soient isomorphes. Tels sont par exemple les nœuds que les américains appellent *granny knot* et *square knot*.

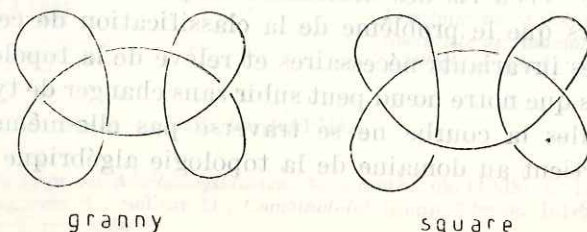


Fig. 1

Il ne manque donc pas d'intérêt d'essayer, en dehors du concept de groupe fondamental de $R^3 - N$, d'autres éléments topologiques liés au nœud, qui seraient susceptibles de fournir des informations supplémentaires sur le type d'un nœud.

2. *Surfaces de Seifert*. Il a été démontré par L. Pontryagin et Frankl, puis par H. Seifert que, un nœud N étant donné, on peut construire une surface orientable, sans singularités, dont le bord est N . Il en résulte que chaque nœud peut être tracé sur une surface fermée orientable, sans singularités. Car, si S est une surface de Seifert pour le nœud N , il suffit de construire une seconde surface S' , que l'on obtient en portant sur chaque normale positive à S un segment de longueur ε ; on prendra $\varepsilon \rightarrow 0$ à mesure que l'on s'approche du bord N , de manière que S' soit elle aussi une surface de Seifert de N , ayant en commun avec S les points de N seulement. Alors $S \cup S'$ forme une surface fermée orientable sur laquelle le nœud N se trouve tracé de manière à diviser $S \cup S'$ en deux domaines disjoints. Or, la classification des surfaces, orientables ou non, est un problème résolu: les surfaces fermées orientables sont des *sphères à anses* (ou coussins troués). Mais, pour un nœud N donné dans R^3 , la surface fermée orientable qui porte N peut, elle aussi, être plongée d'une manière compliquée dans R^3 , les anses de cette surface pouvant être nouées et enlacées. Cependant, il est possible d'éviter cette complication en transformant la surface en une autre, dont les anses ne sont

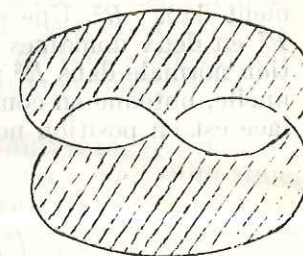


Fig. 2

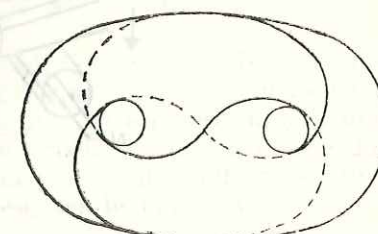


Fig. 3

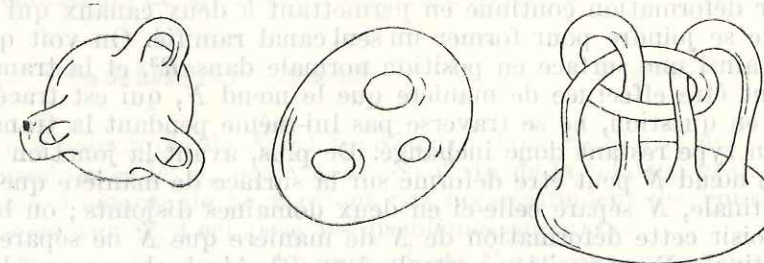


Fig. 4

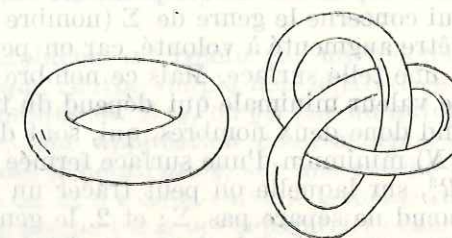


Fig. 5

pas nouées ni enlacées; c'est ce que l'on appelle une surface fermée orientable en position normale dans R^3 .

Par exemple, le tore de rotation que l'on étudie en géométrie est homéomorphe à un tore noué, et ne diffère de celui-ci que par le plongement dans R^3 . Une surface fermée orientable sans singularités divisant R^3 en deux domaines disjoints, on peut caractériser les surfaces en position normale dans R^3 par cette propriété: Si S^3 est la sphère tridimensionnelle, obtenue en compactifiant R^3 par l'adjonction d'un point, une surface est en position normale dans R^3 si elle divise S^3 en deux domaines,

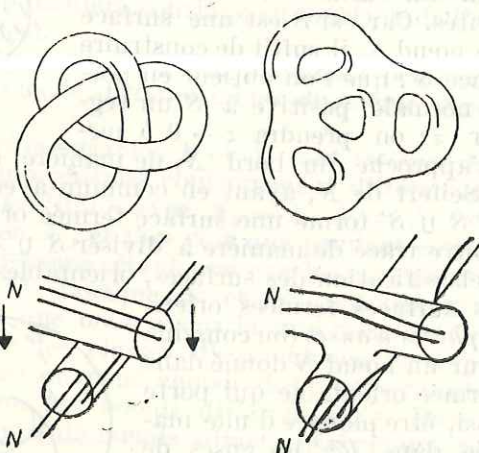


Fig. 6

dont les groupes fondamentaux sont libres et alors seulement. Or, si une sphère à anses n'est pas en position normale, il suffit d'aplatir cette surface par déformation continue en permettant à deux canaux qui se touchent de se joindre pour former un seul canal ramifié. On voit que l'on obtient ainsi une surface en position normale dans R^3 , et la transformation peut être effectuée de manière que le nœud N , qui est tracé sur la surface en question, ne se traverse pas lui-même pendant la transformation, son type restant donc inchangé. De plus, avant la jonction des canaux, le nœud N peut être déformé sur la surface de manière que, sur la surface finale, N sépare celle-ci en deux domaines disjoints; ou bien, on peut choisir cette déformation de N de manière que N ne sépare pas la surface finale Σ , en position normale dans R^3 . Ainsi, chaque nœud N peut être placé sur une surface fermée orientable Σ , en position normale dans R^3 , et ceci de deux manières: comme courbe séparatrice de Σ , ou comme non-séparatrice. En ce qui concerne le genre de Σ (nombre des anses), on voit que ce nombre peut être augmenté à volonté, car on peut toujours ajouter de nouvelles anses à une telle surface. Mais ce nombre ne peut être diminué au dessous d'une valeur minimale qui dépend du type $[N]$. A chaque type $[N]$ il correspond donc deux nombres, qui, sont des invariants d'isotopie: 1. le genre $p_1(N)$ minimum d'une surface fermée simple Σ , en position normale dans R^3 , sur laquelle on peut tracer un nœud de type $[N]$ de manière que ce nœud ne sépare pas Σ ; et 2. le genre $p_2(N)$ minimum d'une surface analogue que le nœud sépare en deux domaines disjoints. En outre, il y a un autre invariant important: c'est h , le genre du nœud,

donné par la caractéristique d'Euler de la surface de Seifert inscrite dans le nœud, nombre qui diffère en général de p_1 et p_2 .

Dans nos recherches, nous avons tâché d'analyser de plus près les surfaces Σ qui portent un nœud N comme courbe séparatrice ou non-séparatrice de Σ ; ayant en vue qu'une telle surface est un élément topologique lié d'une manière intrinsèque au nœud N , on peut espérer que son emploi puisse fournir des informations sur le type $[N]$ éventuellement plus abondantes que celles qui sont données par le groupe fondamental de $R^3 - N$.

Or, on peut affirmer que ce point de vue conduit à un système complet d'invariants d'isotopie, pour chaque type $[N]$. C'est une suite finie, ordonnée, de nombres entiers, dont la connaissance permet de retrouver le type $[N]$. En effet, N étant tracé sur sa surface Σ_{p_1} (resp. Σ_{p_2}), prenons un point de N comme point de base pour le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma)$ de la surface Σ . On sait que ce groupe est engendré par $2p_1$ (resp. $2p_2$) générateurs, liés par une seule relation. Ces générateurs sont donnés par les coupures canoniques de Σ . La courbe orientée N appartient alors à une classe d'homotopie qui s'exprime par un mot formé avec les générateurs de $\pi_1(\Sigma)$. La suite des exposants de ce mot

$$m = g_1^{\alpha_{11}} g_2^{\alpha_{21}} \dots g_{2p}^{\alpha_{2p,1}} g_1^{\alpha_{12}} \dots g_1^{\alpha_{1n}} g_2^{\alpha_{2n}} \dots g_{2p}^{\alpha_{2p,n}}$$

forment une suite d'entiers (l'ordre est essentiel) dont la connaissance permet évidemment d'obtenir un représentant du type $[N]$. Le point de base pouvant être choisi arbitrairement sur N , le mot m est déterminé à une permutation circulaire près; c'est ce que l'on appelle un mot cyclique. La suite des exposants $\{\alpha_{ij}\}$ qui détermine m , donc $[N]$, subit, elle aussi, une permutation circulaire, sans cesser de représenter le type $[N]$.

3. *Théorème de Zieschang.* Le nœud N étant tracé sur la surface Σ , et les générateurs de $\pi_1(\Sigma)$ étant liés par la relation

$$[g_1, g_2][g_3, g_4] \dots [g_{2p-1}, g_{2p}] = 1, [g_i, g_j] = g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1}$$

la classe d'homotopie de N est représentée dans $\pi_1(\Sigma)$ par une classe de mots formés avec les g_i , équivalents en vertu de la relation ci-dessus. Or, une classe d'homotopie ne contient pas nécessairement des courbes simples tracées sur Σ . Ceci pose les problèmes suivants:

I. Trouver les classes d'homotopie de Σ qui contiennent des courbes simples tracées sur Σ , que nous appellerons *classes simples*.

II. Trouver les classes simples de Σ qui contiennent des nœuds isotopes dans R^3 .

Le premier problème est résolu par un théorème de H. Zieschang, suivant lequel chaque courbe simple non-séparatrice tracée sur Σ résulte d'une coupure canonique de Σ (g_1 ou g_2) par un automorphisme de la surface Σ ; c'est donc une application homéomorphe de Σ sur elle-même qui applique l'un des générateurs g_i sur une courbe homotope à N . Si N est une séparatrice de Σ , il existe, suivant le même théorème, un automorphisme de Σ qui applique l'une des séparatrices canoniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ de Σ sur une courbe homotope à N . Ceci nous donne le moyen de trouver

toutes les classes d'homotopie de Σ qui contiennent des courbes simples, donc des nœuds, si l'on connaît le groupe $\text{Aut } \Sigma$ des automorphismes de Σ . On obtiendra alors tous les types de nœuds qui peuvent être tracés sur une surface Σ de genre donné, en appliquant à une courbe g_i (ou Γ_i) les automorphismes de Σ . Le problème II, qui paraît être difficile, s'impose

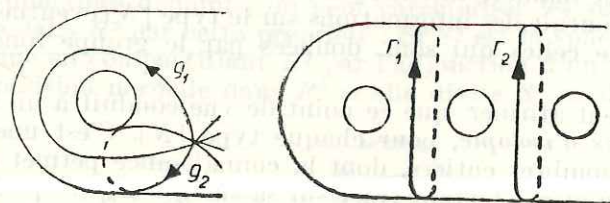


Fig. 7

à cause du fait qu'il existe des classes d'homotopie de Σ qui ne sont pas conjuguées dans $\pi_1(\Sigma)$ et contiennent quand même des nœuds isotopes dans R^3 . Ceci fait que la suite d'invariants que nous avons attachés à un nœud (suite des exposants du mot m) n'est pas définie d'une manière univoque.

4. Les groupes $\text{Aut } \Sigma$ et $\text{Aut } \pi_1(\Sigma)$. Les automorphismes d'une surface Σ se divisent en deux espèces. Il y a des automorphismes $a \in \text{Aut } \Sigma$ qui sont des déformations isotopes de Σ en elle-même; il existe alors une famille $a_t \in \text{Aut } \Sigma$, $t \in [0, 1]$ où a_t est continue par rapport à t , telle que $a_0 = \text{id}_\Sigma$, $a_1 = a$. Or, chaque automorphisme $a \in \text{Aut } \Sigma$ induit un automorphisme $\alpha \in \text{Aut } \pi_1(\Sigma)$; a applique une courbe appartenant à la classe d'homotopie $g_i \in \pi_1(\Sigma)$ sur une courbe $C_i \subset \Sigma$ qui appartient à une autre classe d'homotopie $h_i \in \pi_1(\Sigma)$. Alors $\alpha(g_i) = h_i$ définit l'automorphisme $\alpha \in \text{Aut } \pi_1(\Sigma)$ induit par $a \in \text{Aut } \Sigma$. On établit que si a est une déformation de Σ en elle-même, α est un automorphisme intérieur de $\pi_1(\Sigma)$, et réciproquement. Mais en dehors des déformations, il existe d'autres automorphismes de Σ , et les automorphismes α qu'ils induisent sont des automorphismes extérieurs de $\pi_1(\Sigma)$. Or, si a est une déformation de Σ , a applique le nœud $N \subset \Sigma$ sur un nœud N' qui résulte de N par déformation sur Σ ; on a donc $N' \cong N$. Toute déformation de Σ applique donc les générateurs g_i , et les courbes Γ_i , qui sont des cercles de R^3 , sur des nœuds qui sont aussi des cercles de R^3 . Les seuls automorphismes de Σ qui peuvent intéresser sont donc ceux qui correspondent aux automorphismes extérieurs de $\pi_1(\Sigma)$. La connaissance du groupe $\text{Aut } \pi_1(\Sigma)$ nous permettra donc de trouver toutes les classes d'homotopie des nœuds que l'on peut tracer sur Σ . Les mots correspondants $m \in \pi_1(\Sigma)$ nous fourniront alors les systèmes complets d'invariants, donnés par les exposants de chaque m .

Or, connaître le groupe $\text{Aut } \pi_1(\Sigma)$ c'est connaître un système de générateurs de ce groupe, et les relations qui lient ces générateurs. Ce problème a fait l'objet des recherches de L. Göritz, Max Dehn et W. Lickorish. On doit à Göritz la notion de *torsion* (Schraubung chez Dehn, twist chez Lickorish); c'est un automorphisme de Σ d'une nature spéciale. Soit C une courbe fermée simple tracée sur Σ , et C' une courbe parallèle à C , située aussi sur Σ , de manière que C et C' forment le bord d'une bande mince placée sur Σ , bande sans autosections (abréviation de : in-

tersection avec elle-même). Soit h un homéomorphisme qui applique une couronne circulaire (c, c') du plan sur la bande (C, C') , avec $h(c) = C$, $h(c') = C'$. Donnons à (c, c') une déformation continue qui laisse fixe le bord c et fait tourner de 2π le bord c' sur lui-même. Chaque segment radial de la couronne (c, c') sera appliqué finalement sur un arc de spirale aux mêmes extrémités.

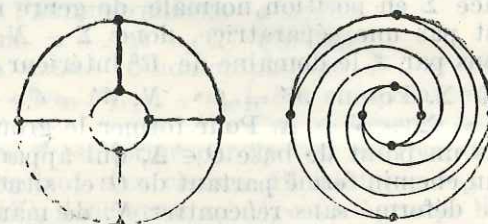


Fig. 8

L'image par h de cette déformation laisse fixe la courbe C , et fait glisser C' sur elle-même, chaque point revenant à sa position initiale, après avoir décrit une fois la courbe C' . Cette déformation de la bande (C, C') est ce que l'on appelle une *torsion* de Σ le long de (C, C') , et représente un automorphisme de Σ si l'on complète cette application par l'identité sur $\Sigma - (C, C')$. Or, Göritz et Dehn ont démontré que le groupe $\text{Aut } \Sigma$ des automorphismes de Σ qui ne sont pas des déformations est engendré par un nombre fini de torsions, le long de certaines courbes convenablement choisies sur Σ . Les résultats de Dehn ont été simplifiés par Lickorish, qui a montré que, Σ étant de genre p , il suffit de $3p - 1$ torsions pour engendrer $\text{Aut } \Sigma$. Ce sont les torsions le long des générateurs g_i , $i = 1, 2p$ et le long de $p - 1$ courbes γ_i , où γ_i coupe g_i et g_{i+1} seulement. En partant de ce résultat de Lickorish, j'ai pu traduire les torsions en question par les automorphismes de $\pi_1(\Sigma)$ qu'elles induisent, et obtenir ainsi un système de générateurs de $\text{Aut } \pi_1(\Sigma)$, contenant tous les automorphismes extérieurs de $\pi_1(\Sigma)$. Il m'a été possible de réduire à 2 le nombre des générateurs pour $p = 2$, et à 3 pour $p > 2$.

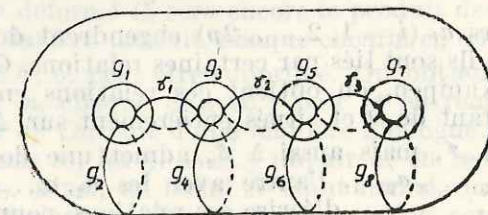


Fig. 9

5. Présentation intrinsèque du groupe d'un nœud. Comme une dernière section de cet exposé, je montrerai comment, en utilisant la surface Σ de genre p_1 qui porte le nœud N , on obtient une présentation du groupe du nœud N que j'ai qualifiée de présentation intrinsèque.

En effet, le procédé que l'on emploie couramment pour obtenir une présentation du groupe d'un nœud consiste à projeter orthogonalement ce nœud sur un plan, choisir les générateurs de $\pi_1(R^3 - N)$ à l'aide de cette

projection, et former alors sans difficulté les relations que la structure du nœud impose entre ces générateurs. Or, il entre ici un élément étranger au nœud, un système de référence, qui est le plan de projection. Par contre, la surface Σ de genre minimum, en position normale dans R^3 , qui porte le nœud, est un élément entièrement topologique lié d'une manière intrinsèque au nœud.

Pour choisir les générateurs intrinsèques du groupe $\pi_1(R^3 - N)$, considérons la surface Σ en position normale, de genre minimum $p_1 = p$ sur laquelle N n'est pas une séparatrice, donc $\Sigma - N$ est un domaine connexe Δ . Désignons par $\mathcal{J}$ le domaine de R^3 intérieur à Σ , et par $\mathcal{E}$ le domaine extérieur à Σ . Posons $\mathcal{J}' = \mathcal{J} - N$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - N$.

On a $\mathcal{J}' \cap \mathcal{E}' = \Sigma - N = \Delta$. Pour former le groupe fondamental $\pi_1(R^3 - N)$, prenons un point de base $O \in \Delta$, qui appartient donc aussi à $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{E}'$. Soit Γ un chemin fermé partant de O et situé dans $R^3 - N$. Ce chemin peut être déformé sans rencontrer N , de manière qu'il coupe Σ en un nombre fini de points $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$, que l'on rencontre dans cet ordre quand on parcourt Γ dans le sens positif. Désignons par γ_1 l'arc $Op_1 \subset \Gamma$, par γ_2 l'arc $p_1p_2 \subset \Gamma$, ..., par γ_k l'arc $p_{k-1}O \subset \Gamma$. Joignons chaque point p_i à O par un arc $\alpha_i \subset \Delta$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), ce qui est possible puisque Δ est connexe. Le chemin Γ se présente alors comme produit des chemins $\gamma_1\alpha_1^{-1}, \alpha_1\gamma_2\alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_{k-1}\gamma_k$. Considérons l'un de ces chemins $\alpha_{i-1}\gamma_i\alpha_i^{-1}$. Si $\gamma_i \subset \mathcal{J}'$, le chemin peut être ramené dans $\mathcal{J}$, à l'exception du seul point O , sans rencontrer N . Il pourra donc être exprimé par un produit des générateurs de $\pi_1(\mathcal{J})$. De même, si $\gamma_i \subset \mathcal{E}'$, ce chemin pourra être ramené dans $\mathcal{E}$, à l'exception du point O , et sera exprimable avec les générateurs de $\pi_1(\mathcal{E})$. Le chemin Γ sera donc représenté par un produit des générateurs de $\pi_1(\mathcal{J})$ et $\pi_1(\mathcal{E})$, groupes qui n'ont en commun que l'élément unité, correspondant aux chemins contractibles au point O , dans $R^3 - N$. Or, les groupes $\pi_1(\mathcal{J})$ et $\pi_1(\mathcal{E})$ sont des groupes libres à p générateurs, la surface Σ étant en position normale dans R^3 . Désignons par $a_1, a_3, \dots, a_{2p-1}$ les générateurs de $\pi_1(\mathcal{J})$, et par $a_2, a_4, \dots, a_{2p}$ les [générateurs de $\pi_1(\mathcal{E})$. Le raisonnement que nous venons d'exposer est celui qui conduit au théorème de van Kampen sur le groupe fondamental de la réunion de deux espaces linéairement connexes dont l'intersection est connexe.

Les générateurs a_i ($i = 1, 2, \dots, 2p$) engendrent donc $\pi_1(R^3 - N)$, mais dans ce groupe ils sont liés par certaines relations. Conformément au théorème de van Kampen, on obtient ces relations en considérant les chemins fermés partant de O et situés entièrement sur Δ , car un tel chemin, appartenant à $\mathcal{J}$, mais aussi à $\mathcal{E}$, admet une double expression, l'une avec les $a_1, a_3, \dots, a_{2p-1}$, l'autre avec les $a_2, a_4, \dots, a_{2p}$. Il suffira d'écrire ces relations pour les générateurs de $\pi_1(\Delta)$, pour obtenir les relations du groupe $\pi_1(R^3 - N)$. Or, $\pi_1(\Delta)$ est aussi un groupe libre, à $2p-1$ générateurs. On le voit en construisant un graphe $\mathcal{G}$ sur Σ qui est un rétracte de déformation de Δ , donc $\pi_1(\Delta) \cong \pi_1(\mathcal{G})$. Pour construire $\mathcal{G}$, considérons un automorphisme $\alpha \in \text{Aut } \Sigma$ qui applique une courbe simple $C \subset \Sigma$, homotope à $g_1 \in \pi_1(\Sigma)$, sur le nœud N . On voit

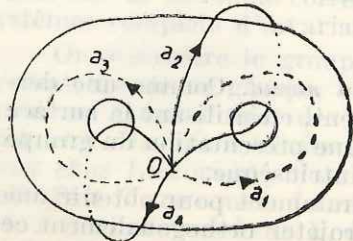


Fig. 10

sans peine que la réunion des générateurs $g_1, g_3, g_4, \dots, g_{2p}$ est un graphe sur Σ qui est un rétracte de déformation de $\Sigma - C$. L'automorphisme α applique C sur N et $g_1 \cup g_3 \cup g_4 \cup \dots \cup g_{2p}$ sur le graphe $\mathcal{G}$, qui est donc la réunion de $2p-1$ courbes fermées simples, passant par O et disjointes en dehors de O . Or, l'automorphisme α induit un automorphisme $\alpha \in \text{Aut } \pi_1(\Sigma)$ qui applique g_1 sur la classe d'homotopie de N ; α est défini par ses $2p$ composantes, $\alpha[m_1, m_2, \dots, m_{2p}]$, ces composantes m_i étant des mots formés avec les $g_1, g_2, \dots, g_{2p}$. Alors m_1 représente la classe d'homotopie de N , et le graphe $\mathcal{G}$ est formé par $2p-1$ courbes simples passant par O , disjointes, appartenant aux classes d'homotopie $m_1, m_3, m_4, \dots, m_{2p}$. Il en résulte que $\pi_1(\mathcal{G})$, donc aussi $\pi_1(\Delta)$, est un groupe libre à $2p-1$ générateurs. On obtient donc les relations du groupe $\pi_1(R^3 - N)$ de la manière suivante: m_i étant une composante de α , avec $i \neq 2$, et $C_i \subset \Delta$ étant un chemin fermé, orienté, partant de O et appartenant à la classe d'homotopie m_i , on fait passer C_i dans $\mathcal{J}(\Sigma)$, à l'exception du point O , puis on exprime C_i à l'aide des générateurs $a_1, a_3, \dots, a_{2p-1}$, ce qui donne un mot A_i . Ensuite, on fait passer C_i dans $\mathcal{E}(\Sigma)$, à l'exception du point O , et on l'exprime à l'aide des générateurs $a_2, a_4, \dots, a_{2p}$, ce qui donne un mot B_i . Alors $A_i = B_i$ est une relation correspondant à cette valeur de i . Les $2p-1$ relations ainsi obtenues fournissent la présentation intrinsèque du groupe $\pi_1(R^3 - N)$ sous la forme

$$(a_1, a_2, \dots, a_{2p}; A_1 B_1^{-1}, A_3 B_3^{-1}, A_4 B_4^{-1}, \dots, A_{2p} B_{2p}^{-1}).$$

Or, les mots A_i, B_i peuvent être facilement obtenus à partir du mot m_i . En effet, faisons passer C_i dans $\mathcal{J}(\Sigma)$ en nous maintenant dans un voisinage restreint de la surface Σ . Si $m_i = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k}$, on pourra décomposer le chemin C_i en produit de chemins $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ appartenant respectivement aux classes d'homotopie $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}$. En faisant passer C_i dans $\mathcal{J}(\Sigma)$, chacun des circuits $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ subira une petite déformation, et le chemin déformé C'_i sera encore le produit des chemins déformés $c'_{i_1}, \dots, c'_{i_k}$. Mais, dans ce produit, chaque chemin c_i , où i est pair, est contractible au point O , et peut être supprimé. On obtient donc le mot A_i en supprimant dans m_i chaque g_j avec j pair et en remplaçant chaque g_j avec j impair par a_j . On voit d'une manière analogue que l'on obtient B_i en supprimant dans m_i les g_j avec j impair et en remplaçant chaque g_j avec j pair par a_j . Ainsi, un nœud N étant donné, on obtient facilement la présentation intrinsèque de son groupe si l'on connaît:

1. Le genre minimum p_1 d'une surface fermée orientable Σ , en position normale dans R^3 , sur laquelle N peut être tracé sans séparer cette surface.
2. Un automorphisme $\alpha \in \text{Aut } \pi_1(\Sigma)$ qui applique un générateur $g_i \in \pi_1(\Sigma)$ sur la classe d'homotopie de N .

La présentation intrinsèque ainsi définie possède cette particularité que les relateurs ont la forme spéciale $A_i B_i^{-1}$, où A_i est un mot en $a_1, a_3, \dots, a_{2p-1}$ et B_i est un mot en $a_2, a_4, \dots, a_{2p}$.

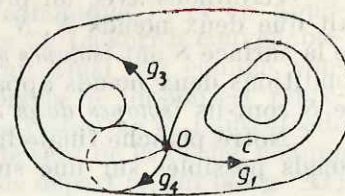


Fig. 11

Terminons avec un problème, non-résolu à notre connaissance : On sait que deux nœuds N, N' appartenant à une même classe d'homotopie de la surface S ont *isotopes sur S* , donc aussi isotopes dans S^3 ; dans quelles conditions deux nœuds appartenant à des classes d'homotopie différentes de S sont-ils *isotopes dans S^3* (donc sans être isotopes sur S) ?

Notre planche finale fait voir la manière dont on peut engendrer les nœuds possibles sur une surface fermée S de genre 2, en partant d'un

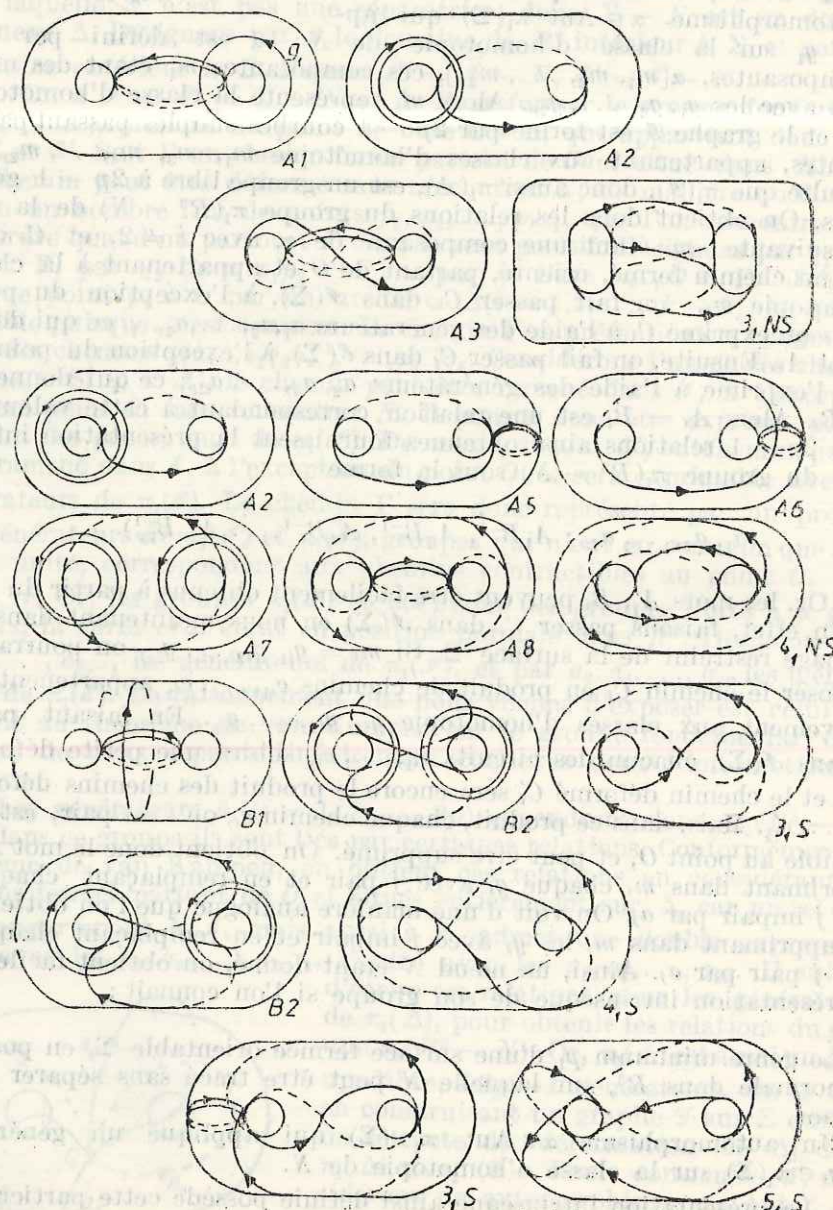


Fig. 12

générateur canonique g_1 ou d'une séparatrice canonique Γ , et en appliquant des torsions de S suivant des générateurs de Lickorish convenablement choisis. Un même nœud (3_1 ou 4_1) apparaît ainsi soit comme non-séparatrice de S , soit comme séparatrice. La bande de torsion est représentée par deux courbes rapprochées dont l'une reste fixe et l'autre (celle qui porte une flèche) glisse sur elle-même dans le sens de la flèche, chaque point revenant à sa position initiale. La courbe de départ (g_1 sur la fig. A1) se transforme en une autre, représentée sur la figure suivante ($A1 \rightarrow A2$), et sur celle-ci se trouve représentée aussi la torsion suivante à appliquer, etc. L'indication NS à côté de la courbe finale signifie « non-séparatrice » et S signifie « séparatrice » de la surface.

RÉFÉRENCES

1. H. Zieschang, *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen*. Mathematica Scandinavica 17 (1965), 17—40.
2. L. Göritz, *Die Abbildungen der Bretzfläche und der Vollkugel vom Geschlecht 2* Abhandl. d. math. Sem. Hamburg. 9 (1933), 244—259.
3. M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*. Acta math., 69 (1938), 135—206.
4. W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold* Proc. Cambridge Phil. Soc., 60 (1964), 769—778.
— *Corrigendum* Proc. Cambr. Ph. Soc., 62 (1966), 679—681.
5. R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. Ginn and Co., New-York, 1963.

(Reçu le 1^{er} novembre 1969)

