

Table 2

y	$T(y, 0.05)$	$T(y, 0.06)$	$T(y, 0.07)$	$T(y, 0.08)$	$T(y, 0.09)$	$T(y, 0.1)$
0	0.0365	0.0613	0.0933	0.1313	0.1734	0.2181
0.1	0.0417	0.0684	0.1022	0.1414	0.1843	0.2295
0.2	0.0584	0.0910	0.1295	0.1721	0.2173	0.2636
0.3	0.0904	0.1320	0.1774	0.2247	0.2726	0.3202
0.4	0.1438	0.1960	0.2486	0.3002	0.3501	0.3981
0.5	0.2255	0.2871	0.3448	0.3985	0.4483	0.4946
0.6	0.3408	0.4069	0.4650	0.5167	0.5631	0.6050
0.7	0.4901	0.5518	0.6039	0.6486	0.6875	0.7220
0.8	0.6637	0.7117	0.7506	0.7832	0.8111	0.8354
0.9	0.8432	0.8687	0.8893	0.9061	0.9204	0.9327
1.0	1	1	1	1	1	1

References

1. Brădeanu D., The heat transfer in a viscous unsteady flow through circular ducts, Preprint No.1, 1982, Seminar of numerical approximation methods in hydrodynamics and heat transfer, Babes-Bolyai University, pp.107-115.
2. Brădeanu P., The method of weighted integral relations for unsteady Poiseuille flow, Preprint No.1, 1982, Seminar of numerical approximation methods in hydrodynamics and heat transfer, Babes-Bolyai University, pp.10-20.
3. Finlayson B.A., The method of weighted residuals and variational principles, Acad. Press, 1972.
4. Smith G.D., Numerical solution of partial differential equations, Oxford University Press, 1965.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES DÉRIVÉES DE TYPE FRÉCHET D'ORDRE SUPÉRIEUR

par

ADRIAN DIACONU

Dans l'analyse fonctionnelle non-linéaire, la notion de dérivée de type Fréchet joue un rôle spécial, ce qui exige l'extension de quelques propriétés bienconnues au cas des fonctions réelles, au cas des applications $f: X \rightarrow Y$, où X et Y sont des espaces linéaires normés. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce travail.

Les résultats obtenus dans ce travail sont utilisés pour établir la forme du polynôme d'interpolation à noeuds multiples au cas d'une application entre espaces linéaires normés et pour obtenir des méthodes itératives qui utilisent l'interpolation inverse. Ces problèmes seront abordés dans [2].

Nous désignons par X et Y des espaces linéaires normés et par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et continues définies sur X et à valeurs dans Y . Nous envisageons également une application arbitraire $f: X \rightarrow Y$.

Définition 1. L'application f admet une dérivée de type Fréchet sur le point $x \in X$ s'il existe $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\xi: X \times X \rightarrow Y$ de manière que

$$(1) \quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \xi(x, h),$$

et

$$(2) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\xi(x, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Pour définir les dérivées d'ordre supérieur de l'application $f: X \rightarrow Y$, nous désignons par $\mathcal{L}_n(X, Y)$ l'ensemble d'applications

$$(3) \quad \mathcal{L}_n(X, Y) = \begin{cases} Y & \text{pour } n = 0 \\ \mathcal{L}(X, \mathcal{L}_{n-1}(X, Y)) & \text{pour } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Définition 2. L'application f admet une dérivée de type Fréchet d'ordre n sur le point x ; $f^{(n)}(x) \in \mathcal{L}_n(X, Y)$; $n \geq 1$, si les conditions suivantes sont remplies

i) il existe la dérivée de type Fréchet d'ordre $n-1$ de l'application f , $f^{(n-1)}(t) \in \mathcal{L}_{n-1}(X, Y)$, pour chaque $t \in V$; V étant un voisinage du point x .

ii) l'application $F : V \rightarrow \mathcal{L}_{n-1}(X, Y)$ définie par $F(t) = f^{(n-1)}(t)$ admet une dérivée de type Fréchet sur le point x . Alors $f^{(n)}(x) = F'(x)$.

Dans ce qui suivra nous présenterons une extension de la formule de Leibnitz.

Désignons par $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications. À l'aide de ces applications nous construisons l'application $F : X \rightarrow Y$ définie par

$$(4) \quad F(x) = B(f(x), g(x)), \quad x \in X,$$

où $B \in \mathcal{L}_2(Y, Y)$.

Pour exprimer la dérivée d'ordre n de l'application F il est nécessaire de présenter quelques notions de combinatoire. Si $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$, nous désignons par $\mathcal{C}_{n,k}(\mathcal{E})$ l'ensemble de tous les points construits avec k éléments de $\mathcal{E}$. Comme il est bien connu le nombre des éléments de $\mathcal{C}_{n,k}(\mathcal{E})$ est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Si $\mathcal{E} = \{1, \dots, n\}$ nous écrivons pour abréger $\mathcal{C}_{n,k}(\mathcal{E}) = \mathcal{C}_{n,k}$.

On a l'extension suivante de la formule de Leibnitz.

THEOREME 3. Si les applications $f, g : X \rightarrow Y$ admettent des dérivées de type Fréchet d'ordre n , alors l'application F définie par (4) admet aussi dérivée de type Fréchet d'ordre n et pour chaque $h_1, \dots, h_n \in X$ on a:

$$(5) \quad F^{(n)}(x)h_1 \dots h_n = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{C}_{n,k} \\ i_1 < \dots < i_k}} B(f^{(k)}(x)h_{i_1} \dots h_{i_k}, g^{(n-k)}(x)h_{j_1} \dots h_{j_{n-k}})$$

où $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ et $j_1 < \dots < j_{n-k}$.

Démonstration. On a évidemment:

$$(6) \quad F(x+h) - F(x) = B(f(x+h) - f(x), g(x)) + B(f(x), g(x+h) - g(x)) + B(f(x+h) - f(x), g(x+h) - g(x)).$$

À cause du fait que les applications f et g admettent des dérivées Fréchet du premier ordre, on a:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \mathcal{E}_f(x, h); \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{E}_f(x, h)\|}{\|h\|} = 0,$$

$$\text{et } g(x+h) - g(x) = g'(x)h + \mathcal{E}_g(x, h); \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{E}_g(x, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

De (6) on déduit

$$(7) \quad F(x+h) - F(x) = B(f'(x)h, g(x)) + B(f(x), g'(x)h) + \mathcal{E}(x, h),$$

où

$$\mathcal{E}(x, h) = B(\mathcal{E}_f(x, h), g(x)) + B(f(x), \mathcal{E}_g(x, h)) + B(f'(x)h, g'(x)h) + B(f'(x)h, \mathcal{E}_g(x, h)) + B(g'(x)h, \mathcal{E}_f(x, h)) + B(\mathcal{E}_f(x, h), \mathcal{E}_g(x, h)),$$

et

$$\frac{\|\mathcal{E}(x, h)\|}{\|h\|} \leq \|B\| \left(\frac{\|\mathcal{E}_f(x, h)\|}{\|h\|} \|g(x)\| + \frac{\|\mathcal{E}_g(x, h)\|}{\|h\|} \|f(x)\| + \|f'(x)\| \|g'(x)\| \|h\| + \|f'(x)\| \|\mathcal{E}_g(x, h)\| + \|g'(x)\| \|\mathcal{E}_f(x, h)\| + \frac{\|\mathcal{E}_f(x, h)\|}{\|h\|} \|\mathcal{E}_g(x, h)\| \right)$$

d'où l'on déduit que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{E}(x, h)\|}{\|h\|} = 0$, donc

$$(8) \quad F'(x)h = B(f'(x)h, g(x)) + B(f(x), g'(x)h).$$

On suppose que (5) est vérifiée pour $n = m$. En tenant compte de (8), il résulte:

$$(9) \quad F^{(m+1)}(x)h_1 \dots h_{m+1} = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{C}_{m+1,k} \\ i_1 < \dots < i_k}} B(f^{(k)}(x)h_{i_1} \dots h_{i_k}, g^{(m-k)}(x)h_{j_1} \dots h_{j_{m-k}})$$

où $\mathcal{C}_{m+1,k}^{[i_1, \dots, i_k]} = B(f^{(k+1)}(x)h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}}, g^{(m-k)}(x)h_{j_1} \dots h_{j_{m-k}}) +$

$$+ B(f^{(k)}(x)h_1 \dots h_k, g^{(m+1-k)}(x)h_{j_1} \dots h_{j_{m+1-k}} h_{m+1}).$$

En groupant convenablement les termes de la somme de (9) on déduit

$$(10) \quad F^{(m+1)}(x)h_1 \dots h_{m+1} = B(f(x), g^{(m+1)}(x)h_1 \dots h_{m+1}) + \\ + \sum_{k=1}^m \left[\sum_{(i_1, \dots, i_{k-1}) \in \mathcal{C}_{m,k-1}} B(f^{(k)}(x)h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} h_{m+1-k}, g^{(m+1-k)}(x)h_{j_1} \dots h_{j_{m+1-k}}) \right. \\ \left. + \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{C}_{m,k}} B(f^{(k)}(x)h_{i_1} \dots h_{i_k}, g^{(m+1-k)}(x)h_{j_1} \dots h_{j_{m+1-k}} h_{m+1}) \right] \\ + B(f^{(m+1)}(x)h_1 \dots h_m, g(x)).$$

Nous nous servons du résultat suivant, bien connu en combinatoire:

Si nous posons $\overline{\mathcal{C}}_{m,k} = \{ \{h_{i_1}, \dots, h_{i_{k-1}}, h_{m+1-k}\} / (i_1, \dots, i_{k-1}) \in \mathcal{C}_{m,k-1} \}$, alors $\mathcal{C}_{m,k} \cup \overline{\mathcal{C}}_{m,k} = \mathcal{C}_{m+1,k}$. Donc:

$$(11) \quad F^{(m+1)}(x)h_1 \dots h_{m+1} = B(f^{(m+1)}(x)h_1 \dots h_{m+1}, g(x)) + \\ + \sum_{k=1}^m \sum_{(s_1, \dots, s_k) \in \mathcal{C}_{m,k}} B(f^{(k)}(x)h_{s_1} \dots h_{s_k}, g^{(m+1-k)}(x)h_{t_1} \dots h_{t_{m+1-k}}) \\ + B(f^{(m+1)}(x)h_1 \dots h_{m+1}, g(x)) = \\ = \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{(s_1, \dots, s_k) \in \mathcal{C}_{m+1,k}} B(f^{(k)}(x)h_{s_1} \dots h_{s_k}, g^{(m+1-k)}(x)h_{t_1} \dots h_{t_{m+1-k}})$$

Cette relation montre que (5) est vérifiée pour $n = m + 1$. A cause du principe de l'induction mathématique il résulte que (5) est vérifiée pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Le théorème est donc démontré.

Remarque 4. Si dans (5) on fait $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$, on déduit

la relation

$$(12) \quad F^{(n)}(x)h^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}(x)h^k, g^{(n-k)}(x)h^{n-k}),$$

qui généralise la formule de Leibnitz.

On considère la suite d'applications multilinéaires $(A_m)_{m \geq 2}$; $A_m \in \mathcal{L}_m(Y, Y)$ définie comme suit:

$$A_2(u_1, u_2) = B(u_1, u_2)$$

$$A_m(u_1, \dots, u_m) = B(A_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}), u_m),$$

où $u_1, \dots, u_m \in Y$.

Considérons les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$, tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$. Nous désignons par $A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}$ l'ensemble des systèmes $(G_1, \dots, G_m)$ où $G_k = \{i_1^{(k)}, \dots, i_k^{(k)}\} \in \mathcal{C}_{p_k, \alpha_k}(H_k)$ où $p_k = n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1})$ et $H_k = \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i$.

Le nombre des éléments de l'ensemble $A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}$ est évidemment $n! / (\alpha_1! \dots \alpha_m!)$.

On considère les applications $f_i : X \rightarrow Y$, $i = \overline{1, m}$ et aussi l'application $F : X \rightarrow Y$ définie par:

$$(13) \quad F(x) = A_m(f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

On a le théorème suivant concernant la dérivée d'ordre n de l'application F :

THEOREME 5. Si les applications $f_i : X \rightarrow Y$, $i = \overline{1, m}$ admettent des dérivées d'ordre n , alors la fonction définie par (13) admet aussi une dérivée d'ordre n et pour chaque $h_1, \dots, h_n \in X$

$$(14) \quad F^{(n)}(x)h_1 \dots h_n = \\ = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \sum_{(G_1, \dots, G_m) \in A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}} A_m(f_1^{(\alpha_1)}(x)h_{i_1^{(1)}} \dots h_{i_{\alpha_1}^{(1)}} \dots f_m^{(\alpha_m)}(x)h_{i_1^{(m)}} \dots h_{i_{\alpha_m}^{(m)}})$$

Démonstration. On utilisera l'induction mathématique par rapport

à n . Pour $n = 2$ la propriété est vérifiée; ainsi que l'affirme le théorème 3. Nous supposons que (14) est vérifiée pour $n = p$. De (12) il résulte $F(x) = B(F_1(x), f_{p+1}(x))$, où $F_1(x) = \mathbb{F}_p(f_1(x), \dots, f_p(x))$. A cause de (5), il résulte:

$$(15) \quad F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{C}_{n,k}} B(F_1^{(k)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_k}, f_{p+1}^{(n-k)}(x) h_{j_1} \dots h_{j_{n-k}}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{C}_{n,k}} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k} \sum_{(G_1, \dots, G_p) \in \mathcal{A}_{k; \alpha_1, \dots, \alpha_p}(\mathcal{K})} Q_{n,k; \alpha_1, \dots, \alpha_p; G_1, \dots, G_p} =$$

$$= B(A_p(f_1^{(\alpha_1)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_{\alpha_1}}, \dots, f_p^{(\alpha_p)}(x) h_{i_p} \dots h_{i_{\alpha_p}}), f_{p+1}^{(n-k)}(x) h_{j_1} \dots h_{j_{n-k}})$$

et $\mathcal{K} = \{i_1, \dots, i_k\}$.

Considérons les nombres $\beta_1, \dots, \beta_{p+1} \in \mathbb{N}$ tels que : $\beta_1 = \alpha_1$; $i = \overline{1, p}$ et $\beta_{p+1} = n - k$. Il en résulte $\beta_1 + \dots + \beta_p + \beta_{p+1} = k + n - k = n$. En outre nous posons $\bar{G}_i = G_i$ pour $i = \overline{1, p}$ et $\bar{G}_{p+1} = \{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{j_1, \dots, j_{p+1}\}$. On a évidemment $(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{p+1}) \in \mathcal{A}_{n; \beta_1, \dots, \beta_{p+1}}$.

On déduit alors de (15)

$$(16) \quad F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n =$$

$$= \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_{p+1} = n} \sum_{(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{p+1}) \in \mathcal{A}_{n; \beta_1, \dots, \beta_{p+1}}} L(\beta_1, \dots, \beta_{p+1}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{p+1})$$

où

$$(17) \quad L(\beta_1, \dots, \beta_{p+1}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_{p+1}) =$$

$$= B(A_p(f_1^{(\beta_1)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_{\beta_1}}, \dots, f_p^{(\beta_p)}(x) h_{i_p} \dots h_{i_{\beta_p}}), f_{p+1}^{(\beta_{p+1})}(x) h_{j_1} \dots h_{j_{\beta_{p+1}}}) =$$

$$= A_{p+1}(f_1^{(\beta_1)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_{\beta_1}}, \dots, f_p^{(\beta_p)}(x) h_{i_p} \dots h_{i_{\beta_p}}, f_{p+1}^{(\beta_{p+1})}(x) h_{j_1} \dots h_{j_{\beta_{p+1}}})$$

Nous déduisons des relations (16) et (17) que (14) est vérifiée pour $n = p + 1$, donc à cause du principe de l'induction mathématique il résulte que (14) est vérifiée pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Si dans (14) on choisit $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$ on obtient :

$$(18) \quad F^{(n)}(x) h^n = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} A_n(f_1^{(\alpha_1)}(x) h^{\alpha_1}, \dots, f_n^{(\alpha_n)}(x) h^{\alpha_n})$$

On considère maintenant l'application $T_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ définie par:

$$(19) \quad T_n(x) = A_n(x - a)^n,$$

où $A_n \in \mathcal{L}_n(\mathbb{I}, \mathbb{I})$ est donnée par:

$$(20) \quad \begin{cases} A_1(x) = \varphi(x) \\ A_n(x_1, \dots, x_n) = B(A_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \varphi(x_n)) \end{cases}$$

φ étant une application linéaire donnée et $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{I}, \mathbb{I})$ une application telle que

$$(21) \quad \begin{cases} B(u, v) = B(v, u) \text{ pour chaque } u, v \in \mathbb{I} \\ B(B(u, v), w) = B(u, B(v, w)) \text{ pour chaque } u, v, w \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Dans [1] nous avons établi le lemme suivant :

LEMME 6. Si les conditions (21) sont vérifiées les applications définies par (20) sont symétriques c'est-à-dire:

$$A_n(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) = A_n(u_1, \dots, u_n)$$

pour chaque permutation $(i_1, \dots, i_n)$ de $(1, \dots, n)$; et pour chaque $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$ on a l'égalité suivante:

$$A_n(u_1, \dots, u_n) = B(A_k(u_1, \dots, u_k), A_{n-k}(u_{k+1}, \dots, u_n)).$$

On a le théorème suivant:

THEOREME 7. Les applications définies par (20) admettent des dérivées d'ordre n ; n étant un nombre naturel arbitraire, et pour chaque $h_1, \dots, h_n \in X$ on a :

$$(22) \quad T_m^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n > m, \\ A_m(h_1, \dots, h_n) & \text{pour } n = m, \\ m(m-1) \dots (m-n+1) A_m(x-a)^{m-n}, & \text{pour } n < m. \end{cases}$$

Démonstration. On a évidemment:

$$\begin{aligned} T_m(x+h) - T_m(x) &= A_m(x+h-a)^m - A_m(x-a)^m = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} A_m((x+h-a)^{m-j}, (x-a)^j) - A_m((x-a)^{m-j}, (x-a)^j) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} A_m((x+h-a)^{m-j-1}, h, (x-a)^j) = \sum_{j=0}^{m-1} A_m((x-a)^{m-j-1}, h) + \xi(x, h), \\ &= m A_m((x-a)^{m-1}, h) + \xi(x, h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \xi(x, h) &= \sum_{j=0}^{m-1} [A_m(x+h-a)^{m-j-1}, (x-a)^j, h] - A_m((x-a)^{m-1}, h) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} B(A_{m-1}((x-h-a)^{m-j-1}, (x-a)^j) - A_{m-1}(x-a)^{m-1}, \varphi(h)), \end{aligned}$$

et on déduit

$$\frac{\|\xi(x, h)\|}{\|h\|} \leq \sum_{j=0}^{m-1} \|B\| \cdot \|\varphi\| \|A_{m-1}((x-h-a)^{m-j-1}, (x-a)^j) - A_{m-1}(x-a)^{m-1}\|$$

d'où à cause de la continuité de A_{m-1} et de la norme il résulte :

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\xi(x, h)\|}{\|h\|} = 0, \text{ donc } T_m^{(n)}(x) h = m A_m((x-a)^{m-1}, h) \text{ et en utili-}$$

sant l'induction mathématique il résulte que (22) est vérifiée pour chaque $n \leq m$. Pour $n > m$ on déduit:

$$\begin{aligned} T_m^{(n)}(x) h_1 \dots h_n &= [T_m^{(m)}(x)]^{(n-m)} h_1 \dots h_m h_{m+1} \dots h_n = \\ &= (A_m(h_1 \dots h_m))^{(n-m)} h_{m+1} \dots h_n = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du fait que l'application $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ définie par $\tilde{T}(x) = A_m h_1 \dots h_m$ est constante. La proposition est démontrée.

Dans [1] nous avons introduit les notions de $(\varphi - B)$ monôme et de $(\varphi - B)$ polynôme. Si dans (22) nous faisons $a = 0$ il résulte l'expression d'une $(\varphi - B)$ monôme, d'où on déduit que

$$(23) \quad P^{(n)}(x) = 0,$$

pour chaque $(\varphi - B)$ polynôme de degré $< n$. En employant une extension dans le cas des espaces normés de la formule de Taylor il résulte:

$$(24) \quad P(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(x) h^k,$$

pour chaque $x, h \in X$ et $P : X \rightarrow Y$ étant un $(\varphi - B)$ polynôme de degré $\leq n$.

Nous présentons maintenant le théorème suivant:

THEOREME 8. Si les applications $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{L}_n(X, Y)$ sont données par (20) de telle manière que les relations (22) sont vérifiées, alors l'application $F : X \rightarrow Y$ définie par :

$$(25) \quad F(x) = A_{r_1} + \dots + A_{r_m} ((x-x_1)^{r_1}, (x-x_2)^{r_2}, \dots, (x-x_m)^{r_m}),$$

$r_i \in \mathbb{N}$; $i = \overline{1, m}$, admet une dérivée Fréchet d'ordre n et :

$$(26) \quad F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = n! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \prod_{i=1}^m \binom{r_i}{\alpha_i} A_{r_1 + \dots + r_m} ((x-x_1)^{r_1 - \alpha_1}, \dots, (x-x_m)^{r_m - \alpha_m}, h_1, \dots, h_n)$$

Démonstration. Nous désignons par $M_1 : X \rightarrow Y$, l'application définie par $M_1(x) = A_{r_1}(x-x_1)^{r_1}$; $i = \overline{1, m}$. Nous considérons en outre l'application m -linéaire $\tilde{A}_m \in \mathcal{L}_m(Y, Y)$ définie par :

$$(27) \quad \tilde{A}_m(y_1, \dots, y_m) = B(y_1, B(y_2, B(y_3, \dots, B(y_{m-1}, y_m) \dots))).$$

En utilisant le lemme 6 et l'induction mathématique on peut dé-

montrer facilement que

$$(28) \quad \tilde{A}_m(A_{r_1}(h_1^{(1)}, \dots, h_1^{(r_1)}), A_{r_2}(h_2^{(1)}, \dots, h_2^{(r_2)}), \dots, A_{r_m}(h_m^{(1)}, \dots, h_m^{(r_m)})) \text{ ne dépend pas du choix de } (a_1, \dots, a_m) \in A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}.$$

$$= A_{r_1 + \dots + r_m}(h_1^{(1)}, \dots, h_1^{(r_1)}, h_2^{(1)}, \dots, h_2^{(r_2)}, \dots, h_m^{(1)}, \dots, h_m^{(r_m)}) \text{ il en résulte}$$

Nous déduisons de (27) et de la définition de M_i : $i = \overline{1, n}$

$$(29) \quad A_{r_1 + \dots + r_m}((x-x_1)^{r_1}, \dots, (x-x_m)^{r_m}) = \tilde{A}_m(M_1(x), M_2(x), \dots, M_n(x))$$

A cause des théorèmes 5 et 6 il en résulte :

$$(30) \quad F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \sum_{(a_1, \dots, a_m) \in A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}} \tilde{A}_m(M_1^{(a_1)}(x) h_{1, a_1} \dots h_{1, a_1}, \dots, M_m^{(a_m)}(x) h_{m, a_m} \dots h_{m, a_m})$$

$$= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \prod_{i=1}^m r_i(r_i-1) \dots (r_i-\alpha_i+1) \sum_{(a_1, \dots, a_m) \in A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}} \tilde{A}_m(\bar{M}_1(x) h_{1, a_1} \dots h_{1, a_1}, \dots, \bar{M}_m(x) h_{m, a_m} \dots h_{m, a_m})$$

où nous avons posé

$$(31) \quad \bar{M}_k(x) h_{1, a_1} \dots h_{1, a_1} = A_{r_k}(x-x_k)^{r_k-\alpha_k} h_{1, a_1} \dots h_{1, a_1}$$

Du fait que $\{h_1, \dots, h_n\} = \{h_{1,1}, \dots, h_{1,1}, \dots, h_{1,m}, \dots, h_{1,m}\}$

, $h_{1,m}\}$ et en utilisant (28) et la symétrie de l'application multilinéaire $A_m \in \mathcal{L}_m(X, Y)$ il résulte :

$$(32) \quad \tilde{A}_m(\bar{M}_1(x) h_{1, a_1} \dots h_{1, a_1}, \dots, \bar{M}_m(x) h_{m, a_m} \dots h_{m, a_m}) =$$

$$= A_{r_1 + \dots + r_m}((x-x_1)^{r_1-\alpha_1}, h_{1, a_1}, \dots, h_{1, a_1}, \dots, (x-x_m)^{r_m-\alpha_m}, h_{m, a_m}, \dots, h_{m, a_m})$$

$$= A_{r_1 + \dots + r_m}((x-x_1)^{r_1-\alpha_1}, \dots, (x-x_m)^{r_m-\alpha_m}, h_1, \dots, h_n)$$

$$(33) \quad \sum_{(a_1, \dots, a_m) \in A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}} \tilde{A}_m(\bar{M}_1(x) h_{1, a_1} \dots h_{1, a_1}, \dots, \bar{M}_m(x) h_{m, a_m} \dots h_{m, a_m}) = \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} A_{r_1 + \dots + r_m}((x-x_1)^{r_1-\alpha_1}, \dots, (x-x_m)^{r_m-\alpha_m}, h_1, \dots, h_n)$$

De (30) et (33) on déduit :

$$F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = n! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \prod_{i=1}^m \frac{r_i(r_i-1) \dots (r_i-\alpha_i+1)}{\alpha_i!} A_{r_1 + \dots + r_m}((x-x_1)^{r_1-\alpha_1}, \dots, (x-x_m)^{r_m-\alpha_m}, h_1, \dots, h_n)$$

et parce que $\binom{r_1}{\alpha_1} = \frac{r_1(r_1-1) \dots (r_1-\alpha_1+1)}{\alpha_1!}$ il résulte la conclusion du théorème.

Nous considérons maintenant les espaces linéaires normés X, Y , et les applications $f : X \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ et $g : X \rightarrow Y$ données et on étudie l'application $F : X \rightarrow Z$ définie par $F(x) = [f(x)] g(x)$.

THEOREME 9. Si les applications f et g admettent des dérivées Fréchet d'ordre n au point $x \in X$, alors l'application F admet aussi une dérivée Fréchet d'ordre n et :

$$(35) \quad ([f(x)] g(x))^{(n)} h_1 \dots h_n = \sum_{k=0}^n \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{C}_{n,k}} [f^{(k)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_k}] g^{(n-k)}(x) h_{j_1} \dots h_{j_{n-k}}$$

où $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ et $j_1 < \dots < j_{n-k}$ pour chaque $h_1, \dots, h_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. De la définition de F il résulte :

$$F(x+h) - F(x) = [f(x+h) - f(x)] g(x) + f(x) [g(x+h) - g(x)] - [f(x+h) - f(x)] [g(x+h) - g(x)].$$

Du fait que f et g admettent des dérivées Fréchet il résulte :

$$(36) \quad f(x+h) - f(x) = f'(x) h + \varepsilon_f(x,h) \quad \text{et} \\ g(x+h) - g(x) = g'(x) h + \varepsilon_g(x,h),$$

$$\text{où } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_f(x,h)\|}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_g(x,h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Donc

$$(37) \quad F(x+h) - F(x) = [f'(x) h] g(x) + f(x) g'(x) h + \xi(x,h)$$

où

$$\xi(x,h) = \varepsilon_f(x,h) g(x) + f(x) \varepsilon_g(x,h) - [f'(x) h + \varepsilon_f(x,h)] [g'(x) h + \varepsilon_g(x,h)] \quad \text{et}$$

$$(38) \quad \frac{\|\xi(x,h)\|}{\|h\|} \leq \|f'(x)\| \cdot \|g'(x)\| \cdot \|h\| + \frac{\|\varepsilon_f(x,h)\|}{\|h\|} \cdot \|\varepsilon_g(x,h)\| + \frac{\|\varepsilon_f(x,h)\|}{\|h\|} (\|g(x)\| + \|g'(x)\| \cdot \|h\|) + \frac{\|\varepsilon_g(x,h)\|}{\|h\|} (\|f(x)\| + \|f'(x)\| \cdot \|h\|)$$

$$\text{De (36) et (38) il résulte } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\xi(x,h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{et à cause de (37)}$$

il résulte que l'application F admet une dérivée Fréchet et :

$$(39) \quad ([f(x)] g(x))' h = [f'(x) h] g(x) + f(x) g'(x) h.$$

La relation (39) montre que le théorème 9 est vrai pour $n = 1$. En employant l'induction mathématique, le théorème 9 et la relation (35) résultent d'une manière absolument analogue à celle employée à la démonstration du théorème 3.

Considérons maintenant l'application $f : X \rightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ à l'aide de laquelle nous définissons l'application $g : X \rightarrow \mathcal{L}(Y,X)$, par

$$g(x) = [f(x)]^{-1}.$$

THEOREME 10. Si l'application f admet une dérivée Fréchet, alors l'application g admet aussi une dérivée Fréchet et :

$$(40) \quad ([f(x)]^{-1})' h = - [f(x)]^{-1} f'(x) h [f(x)]^{-1},$$

pour chaque $h \in X$.

Démonstration. De la définition de g il résulte :

$$(41) \quad g(x+h) - g(x) = [f(x+h)]^{-1} - [f(x)]^{-1} = \\ = [f(x+h)]^{-1} f(x) [f(x)]^{-1} - [f(x+h)]^{-1} f(x+h) [f(x)]^{-1} = \\ = [f(x+h)]^{-1} (f(x) - f(x+h)) [f(x)]^{-1}.$$

Du fait que $f(x+h) - f(x) = f'(x) h + \varepsilon_f(x,h)$, où

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_f(x,h)\|}{\|h\|} = 0, \quad \text{il résulte :}$$

$$(42) \quad g(x+h) - g(x) = - [f(x)]^{-1} (f'(x) h) [f(x)]^{-1} + \varepsilon_g(x,h),$$

où

$$\varepsilon_g(x,h) = ([f(x)]^{-1} - [f(x+h)]^{-1}) (f'(x) h) [f(x)]^{-1} - \\ - [f(x+h)]^{-1} \varepsilon_f(x,h) [f(x)]^{-1},$$

et

$$(43) \quad \frac{\|\varepsilon_g(x,h)\|}{\|h\|} = \|[f(x)]^{-1} - [f(x+h)]^{-1}\| \|f'(x)\| \| [f(x)]^{-1} \| + \\ + \|[f(x+h)]^{-1}\| \frac{\|\varepsilon_f(x,h)\|}{\|h\|} \| [f(x)]^{-1} \|.$$

En posant $\delta = \|[f(x)]^{-1} - [f(x+h)]^{-1}\|$, de (41) il résulte :

$$(44) \quad \delta \leq \|[f(x+h)]^{-1}\| \|f(x+h) - f(x)\| \| [f(x)]^{-1} \|,$$

et

$$\|[f'(x+h)]^{-1}\| \leq \|[f(x)]^{-1}\| + \|[f'(x+h)]^{-1} - [f'(x)]^{-1}\| =$$

$$= \delta + \|[f(x)]^{-1}\|,$$

donc $\delta \leq (\delta + \|[f(x)]^{-1}\|) \|f(x+h) - f(x)\| \|[f(x)]^{-1}\|$.

Du fait que f est dérivable, il résulte qu'elle est continue, d'où l'on déduit qu'il existe un h_0 dans X tel que pour chaque $h \in X$ avec $\|h\| \leq \|h_0\|$ on a:

$$\|f(x+h) - f(x)\| \cdot \|[f'(x)]^{-1}\| < 1,$$

d'où il résulte:

$$\delta \leq \frac{\|[f'(x)]^{-1}\|^2 \|f(x+h) - f(x)\|}{1 - \|f(x+h) - f(x)\| \cdot \|[f'(x)]^{-1}\|}$$

et à cause de la continuité de f il résulte la continuité de g , donc:

$$(45) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|[f'(x+h)]^{-1} - [f'(x)]^{-1}\| = 0.$$

De (43) et (45) il résulte que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|E_g(x,h)\|}{\|h\|} = 0$, donc g admet une dérivée Fréchet et cette dérivée est donnée par (40). La proposition est donc démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 Diaconu, A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenues par l'interpolation inverse (I); Preprint Nr. 4, 1981, "Babeş-bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research seminars, Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods, 1-51.
- 2 Diaconu, A., Interpolare cu noduri multiple, vol. Studiul unor operatori ce intervin în fizică tehnică şi economie, Contract M.E.I. Nr. 9 / 1982.

SUR LA DÉRIVÉE DE TYPE FRÉCHET DE L'APPLICATION COMPOSÉE

par

Adrian Diaconu

Dans ce travail nous désirons établir une formule pour exprimer la dérivée d'ordre n de l'application composée de deux fonctions à l'aide des dérivées de diverse ordres des fonctions composantes. Dans le cas des fonctions réelles de variables réelles de telles formules sont connues. Une démonstration en est donnée dans [5].

Dans [6], T. POPOVICIU établit une formule pour la différence divisée d'ordre n d'une fonction composée de deux fonctions réelles de variables réelles. Certains aspect de cette formule ont été généraliser par I. PAVALOIU dans [3], [4]. Dans ([2], p.309) et dans [4] on donne sans démonstration un cas particulier de la formule que nous établirons dans ce qui va suivre.

Considérons les espaces linéaires et normés X, Y, Z et les applications $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$. Par l'application composée des applications f et g nous entendons l'application $g \circ f: X \rightarrow Z$ définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Nous désignons par $\mathcal{L}_n(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et continues en rapport à chaque variable.

Nous établirons pour commencer le lemme suivant:

LEMME 1. Considérons les applications $u_i: X \rightarrow Y$, $i = \overline{1, n}$, $w: X \rightarrow Z$ et $v: Z \rightarrow \mathcal{L}_n(X, Y)$ qui admettent des dérivées de type Fréchet du premier ordre. Dans ces conditions l'application