

Cette relation peut être utilisée pour évaluer le reste dans les formules d'interpolation inverse.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 DIACONU, A., Sur la dérivée de type Fréchet de l'application composée, Preprint Nr.1, 1983, "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminars, Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods.
- 2 PAVAIOLU, I., Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.
- 3 TUROWICZ, B.A., Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse, Colloq. Math. (1959), 83 - 87.

SUR UNE FONCTION SPLINE CUBIQUE

par

O. Iancu

Désignons par

$$(1) \quad \Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

une partition de l'intervalle $[a, b]$ et par

$$(2) \quad f_0, f_1, \dots, f_n$$

les valeurs de la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sur les noeuds (1).

Nous considérons la fonction spline cubique qui correspond à ces données [1], sous la forme :

$$(3) \quad s(x) = \frac{M_1 - M_{1-1}}{6 h_1} (x - x_{1-1})^3 + \frac{M_{1-1}}{2} (x - x_{1-1})^2 + M_{1-1}(x - x_{1-1}) + f_{1-1}$$

où $M_1 \neq M_{1-1}$, $x \in [x_{1-1}, x_1]$, $1 \in \{1, 2, \dots, n\}$, qui vérifie, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$ les conditions :

$$(4) \quad \begin{aligned} s(x_{1-1}) &= f_{1-1} \\ s'(x_{1-1}) &= M_{1-1} \end{aligned}$$

Si nous imposons les conditions

$$(5) \quad \begin{aligned} s(x_1) &= f_1 \\ s'(x_1) &= M_1 \end{aligned}$$

pour chaque $i = 0, 1, \dots, n$ on obtient la formule de récurrence

$$(6) \quad \begin{aligned} M_1 &= 6 \frac{f_1 - f_{1-1}}{h_1} - 6 \frac{M_{1-1}}{h_1} - 2 M_{1-1} \\ m_1 &= 3 \frac{f_1 - f_{1-1}}{h_1} - 2 M_{1-1} - \frac{M_{1-1}}{2} h_1, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

En supposant m_0 et M_0 initialement donnés, les formules (6) permettent de déterminer les valeurs m_k et M_k , $k=1, 2, \dots, n$. Dans (5) et (6) nous employé les notations suivantes

$$(7) \quad \begin{aligned} m_k &= s'(x_k) \\ M_k &= s''(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n \\ h_k &= x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Nous supposons $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixé. Pour cet i , nous supposons que les conditions suivantes sont remplies :

$$(8) \quad \begin{aligned} M_1 &< 0, \\ m_{1-1} &\in \mathbb{R} \setminus [0, -2 h_1 M_1] \end{aligned}$$

Dans ces conditions $\beta_1 = \sqrt{m_{1-1}^2 + 2 m_{1-1} h_1 M_1} \in \mathbb{R}$ et nous poserons

$$(8') \quad A_1 = \left(\frac{-m_{1-1} - \beta_1}{h_1}, \frac{-m_{1-1} + \beta_1}{h_1} \right)$$

Dans les conditions (8) et à l'aide des notations (8') nous considérons les relations suivantes :

$$(8 \text{ i}) \quad M_{1-1} \in A_1$$

$$(8 \text{ ii}) \quad M_{1-1} \in \left(-\infty, \frac{-m_{1-1} - \beta_1}{h_1} \right] \cap (-\infty, 0) \\ m_{1-1} < 0$$

$$(8 \text{ iii}) \quad \begin{aligned} M_{1-1} &\in (\mathbb{R} \setminus A_1) \cap \left(-M_1 - 2 \frac{m_{1-1}}{h_1}, \infty \right) \\ m_{1-1} &> -2 h_1 M_1 \end{aligned}$$

En outre pour le même $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nous considérons la fonctionnelle $\| \cdot \|_1 : \mathcal{F}(3, \Delta) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\|s\|_1 = \max_{x \in [x_{1-1}, x_1]} |s(x)|$$

pour $s \in \mathcal{F}(3, \Delta)$, où par $\mathcal{F}(3, \Delta)$ nous avons l'ensemble des fonctions définies par (3). La fonctionnelle considérée représente la norme des restrictions des fonctions de $\mathcal{F}(3, \Delta)$ à l'intervalle $[x_{1-1}, x_1]$. Le remplacement de la borne supérieure par "max" se justifie par la continuité des fonctions de $\mathcal{F}(3, \Delta)$ sur $[x_{1-1}, x_1]$.

Le but de ce travail est de donner une évaluation de la fonctionnelle ci-dessus, dans certaines conditions imposées aux coefficients de la fonction s .

Dans ce but nous établirons le théorème suivant :

THEOREME 1. Si la fonction $s \in \mathcal{F}(3, \Delta)$ vérifie les conditions (8) et aussi l'une des conditions (8 i), (8 ii) ou (8 iii) pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixé, alors pour ce i on a :

$$(9) \quad \|s\|_1 = \max \{ |f_{1-1}|, |f_1| \}.$$

Démonstration. Une condition suffisante pour la conclusion (9) est la monotonie de la fonction s sur l'intervalle $[x_{1-1}, x_1]$. Cette condition est équivalente à l'absence des racines de la fonction s' dans l'intervalle considéré.

Pour simplifier le calcul nous posons

$$(10) \quad x - x_{i-1} = \alpha$$

De $x \in [x_{i-1}, x_i]$ il résulte $\alpha \in [0, h_i]$ et la fonction (3) devient :

$$(11) \quad s(\alpha + x_{i-1}) = \frac{M_i - M_{i-1}}{6 h_i} \alpha^3 + \frac{M_{i-1}}{2} \alpha^2 + m_{i-1} \alpha + f_{i-1}$$

Du fait qu'on transpose l'étude sur l'intervalle $[0, h_i]$ il résulte que dans le cas où la dérivée de la fonction (11) n'a pas de racines dans l'intervalle $[0, h_i]$, cette fonction n'a pas d'extremes dans cet intervalle. L'expression de cette dérivée est :

$$(12) \quad s'(\alpha + x_{i-1}) = \frac{M_i - M_{i-1}}{2 h_i} \alpha^2 + M_{i-1} \alpha + m_{i-1}$$

La fonction (12) n'a pas de racines dans l'intervalle $[0, h_i]$ dans les conditions suivantes :

- 1) Le trinôme (12) a des racines complexes ,
- 2) Le trinôme (12) a des racines α_1 et α_2 telles que $\alpha_1 \leq 0 < h_i < \alpha_2$,

- 3) Le trinôme (12) a les racines α_1 et α_2 telles que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 0 < h_i$,

- 4) Le trinôme (12) a les racines α_1 et α_2 telles que $0 < h_i \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$.

Les conditions énumérées sont caractérisées respectivement par les relations suivantes :

$$1') \quad D = M_{i-1}^2 - 4 m_{i-1} \frac{M_i - M_{i-1}}{2 h_i} < 0 ,$$

$$D \geq 0$$

$$2') \quad \frac{M_i - M_{i-1}}{2 h_i} s'(x_{i-1}) < 0$$

$$\frac{M_i - M_{i-1}}{2 h_i} s'(h_i + x_{i-1}) < 0$$

$$D \geq 0$$

$$3') \quad \frac{M_i - M_{i-1}}{2 h_i} s'(x_{i-1}) \geq 0$$

$$\frac{-M_{i-1} h_i}{M_i - M_{i-1}} < 0$$

$$D \geq 0$$

$$4') \quad \frac{M_i - M_{i-1}}{2 h_i} s'(h_i + x_{i-1}) \geq 0$$

$$\frac{-M_{i-1} h_i}{M_i - M_{i-1}} \geq h_i$$

Ces relations sont elles mêmes équivalentes respectivement aux relations :

$$1'') \quad h_i M_{i-1}^2 + 2 m_{i-1} M_{i-1} - 2 m_{i-1} M_i < 0$$

$$h_i M_{i-1}^2 + 2 m_{i-1} M_{i-1} - 2 m_{i-1} M_i \geq 0$$

$$2'') \quad (M_i - M_{i-1}) m_{i-1} \leq 0$$

$$(M_i - M_{i-1})(M_i h_i + M_{i-1} h_i + 2 m_{i-1}) \leq 0$$

$$h_1 M_{1-1}^2 + 2 m_{1-1} M_{1-1} - 2 m_{1-1} M_1 \geq 0$$

$$3^{\circ}) \quad (M_1 - M_{1-1}) m_{1-1} \geq 0$$

$$\frac{M_{1-1}}{M_1 - M_{1-1}} \geq 0$$

$$h_1 M_{1-1}^2 + 2 m_{1-1} M_{1-1} - 2 m_{1-1} M_1 \geq 0$$

$$4^{\circ}) \quad (M_1 - M_{1-1})(M_1 h_1 + M_{1-1} h_1 + 2 m_{1-1}) \geq 0$$

$$\frac{M_1}{M_1 - M_{1-1}} \leq 0$$

Nous supposons pour commencer que la condition (8 i) est vérifiée. Evidemment ce fait est équivalent à l'inégalité 1").

Nous supposons maintenant que les conditions (8 ii) sont vérifiées. On distinguera deux cas :

$$a) \quad M_{1-1} < M_1.$$

Dans ce cas il résulte :

$$M_1 - M_{1-1} > 0.$$

De cette dernière inégalité et en tenant compte que $m_{1-1} < 0$, il résulte que la deuxième inégalité de 2") est vérifiée.

Du fait que $M_1 < 0$ il résulte $M_{1-1} < 0$ d'où en tenant compte que $m_{1-1} < 0$, il résulte que la troisième condition de 2") est vérifiée.

$$\text{Enfin, de } M_{1-1} \in \left(-\infty, \frac{-m_{1-1} - \beta_1}{h_1} \right] \subset \mathbb{R} \setminus A_1$$

il résulte que la première inégalité de 2") est vérifiée.

$$b) \quad M_{1-1} > M_1.$$

En ce cas nous démontrons que le système 3") est vérifié.

En effet, d'une manière analogue au cas a) il résulte que la première inégalité est vérifiée. De $M_{1-1} \in (M_1, 0]$ il résulte :

$$(13) \quad \begin{aligned} M_1 - M_{1-1} &< 0 \\ M_{1-1} &< 0 \end{aligned}$$

et de (13) il résulte immédiatement que la troisième inégalité de 3") est vraie. De (13) et en tenant compte que $m_{1-1} < 0$ nous déduisons que la deuxième relation du système 3") est vérifiée.

En supposant que les conditions (8 iii) sont vérifiées, on a de nouveau deux cas a) et b), analogues à ceux rencontrés dans l'étude de (8 ii).

Dans le cas a) on a $-M_{1-1} + M_1 > 0$. Cette inégalité jointe à la première inégalité de (8) implique la troisième inégalité de 4").

$$\text{De } M_1 - M_{1-1} > 0 \text{ et } M_{1-1} \in \left(-M_1 - 2 \frac{m_{1-1}}{h_1}, +\infty \right)$$

il résulte que la deuxième inégalité du système 4") est vérifiée, et de $M_{1-1} \in \mathbb{R} \setminus A_1$ il résulte que la première inégalité du système 4") est aussi vérifiée. Nous avons démontré que dans le cas où $M_{1-1} < M_1$ les conditions (8 iii) impliquent les conditions 4").

Nous démontrerons maintenant que les conditions (8 iii) jointes à $M_{1-1} > M_1$ impliquent les conditions 2"). D'une manière analogue au cas précédent la première inégalité de 2") résulte de $M_{1-1} \in \mathbb{R} \setminus A_1$. De $M_{1-1} > M_1$; $m_{1-1} > -2 h_1 M_1$ et à cause des conditions (8) il résulte que la deuxième inégalité du système 2") est vérifiée.

De $M_{1-1} > M_1$ et $M_{1-1} \in \left(-M_1 - 2 \frac{m_{1-1}}{h_1}, +\infty \right)$ on déduit immédiatement que la troisième inégalité du système 2") est aussi vérifiée.

Donc on a démontré que chacune des conditions (8 i), (8 ii) ou (8 iii) jointe à (8) implique que l'un des systèmes 1"), 2") 3") ou 4") sont vérifiés. Ce fait équivaut à la monotonie de la fonction spline (3) sur $[x_{i-1}, x_i]$. En ce cas on a évidemment, l'évaluation donnée par (9). Le théorème est démontré.

REMARQUE 1. Si la première des condition (8) est modifiée en $M_1 > 0$, alors les conditions (8') et (8 i) restent inchangées, et les conditions (8), (8 ii) et (8 iii) auront respectivement les formes suivantes :

$$\begin{aligned} (14) \quad & M_1 > 0 \\ & m_{i-1} \in \mathbb{R} \setminus [-2 h_1 M_1, 0] \\ (14 \text{ ii}) \quad & m_{i-1} \in (\mathbb{R} \setminus A_1) \cap (-\infty, -M_1 - 2 \frac{m_{i-1}}{h_1}] \\ & \text{et} \\ & m_{i-1} < -2 h_1 M_1 \\ (14 \text{ iii}) \quad & m_{i-1} \in (\frac{-m_{i-1} + \beta_1}{h_1}, +\infty) \cap [0, +\infty) \\ & \text{et} \\ & m_{i-1} > 0 \end{aligned}$$

De cette manière la conclusion du théorème 1 est vraie aussi dans le cas où sont vérifiées les conditions (14) et une des conditions (8 i), (14 ii) (14 iii). Nous pouvons affirmer ce fait, par ce que d'une manière analogue à la démonstration du théorème 1, on démontre que (14) et (14 ii) impliquent 2") pour $m_{i-1} < M_1$, et 4") pour $m_{i-1} > M_1$, et (14) et (14 iii) impliquent 3") pour $m_{i-1} < M_1$ et 2") pour $m_{i-1} > M_1$.

REMARQUE 2. Si la première des conditions (8) se modifie en $M_1 = 0$, alors les conditions (8), (8'), (8 ii) et (8 iii) auront respectivement les formes suivantes :

$$\begin{aligned} (15) \quad & M_1 = 0 \\ & m_{i-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (15') \quad & A_1 = (\frac{-m_{i-1} - |m_{i-1}|}{h_1}, \frac{-m_{i-1} + |m_{i-1}|}{h_1}) \\ (15 \text{ ii}) \quad & m_{i-1} \in (-\infty, 0] \\ & m_{i-1} < 0 \\ \text{et} \\ (15 \text{ iii}) \quad & m_{i-1} \in (-\frac{2 m_{i-1}}{h_1}, +\infty) \\ & m_{i-1} > 0 \end{aligned}$$

Pour $M_1 = 0$ les systèmes 2") et 4") deviennent :

$$\begin{aligned} 2'') \quad & h_1 m_{i-1}^2 + 2 m_{i-1} M_{i-1} \geq 0 \\ & -m_{i-1} m_{i-1} \leq 0 \\ & -m_{i-1}(m_{i-1} h_1 + 2 m_{i-1}) \leq 0 \\ 4'') \quad & h_1 m_{i-1}^2 + 2 m_{i-1} M_{i-1} \geq 0 \\ & -m_{i-1}(m_{i-1} h_1 + 2 m_{i-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

et le système 3") contient l'absurdité $-1 \geq 0$.

Des considérations antérieures il résulte que la conclusion du théorème 1 est vraie aussi dans le cas où sont vérifiées les conditions (15) et chaque des conditions (8 i), (15 ii), (15 iii).

En effet il résulte évidemment que (15) et (15 ii) impliquent $2''$), et (15) et (15 iii) impliquent $4''$) pour $M_{1-1} < 0$ et $2''$) pour $M_{1-1} > 0$.

COROLLAIRE . Si la fonction spline (3) satisfait aux hypothèses du théorème dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, alors :

$$(16) \quad \|s\| = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|$$

BIBLIOGRAPHIE

1. IANCU, G., On the cubic spline of interpolation, Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods, "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminars, Preprint Nr.4 (1981), 52 - 71 .
2. GUZEK, A.J. and KEMPER, G. A., A new Error Analysis for a Cubic Spline Approximate Solution of a Class of Volterra Integro-Differential Equations, Mathematics of Computation 27, 123 (1975), 563 - 570 .

MÉTHODES ITÉRATIVES OPTIMALES DE TYPE STEFFENSEN OBTENUES PAR INTERPOLATION INVERSE

par

GRĂCIUN IANCU, ION PĂVĂLOIU et IOAN SERB

Dans le travail [1] nous avons procédé à l'étude d'une classe de méthodes pour la résolution des équations de la forme :

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction réelle de variable réelle et I est un intervalle de l'axe réel. On parvient à cette classe de méthodes en utilisant la méthode d'interpolation inverse, à l'aide du polynôme d'interpolation de Hermite.

L'ordre de convergence des méthodes étudiées dans [1] dépend du nombre des noeuds et de leurs ordres de multiplicité.

Dans ce travail nous démontrerons que dans la classe de méthodes étudiées dans [1], il se détache une classe de méthodes de type Steffensen pour laquelle l'ordre de convergence est le plus grand. Dans ce qui suit les noeuds d'interpolation ne sont plus choisis de manière arbitraire, ils seront générés à l'aide de fonctions itératives.

Désignons par $\varphi_i : I \rightarrow I$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, $n+1$ fonctions itératives, c'est-à-dire des fonctions dont les points fixes coïncident avec les racines de l'équation (1) dans l'intervalle I .

Nous supposons également que les fonctions φ_i ; $i = \overline{1, n+1}$ et f vérifient les conditions suivantes :

$$(2) \quad |f(\varphi_i(x))| \leq \int_1 |f(x)|^{p_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

où $\int_1$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, sont des nombres réels et positifs