

INTERPOLATION DANS LES ESPACES ABSTRAITS. MÉTHODES
ITÉRATIVES POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRA-
TIONNELLES OBTENUES PAR L'INTERPOLATION INVERSE.

II

par

Adrian Diaconu

Dans la première partie de ce travail [1] nous avons indiqué une méthode pour étendre la notion de polynôme d'interpolation au cas d'une application non-linéaire $f: X \longrightarrow Y$, où X et Y sont des espaces linéaires. Notre extension nous fournit la possibilité de généraliser les propriétés plus importantes connues dans le cas des fonctions réelles.

Ce travail est réservé au cas des noeuds multiples. Nous donnerons par conséquent une extension du polynôme d'interpolation de type Hermite. Dans le but d'un exposé unitaire nous présenterons succinctement dans le premier paragraphe les principaux résultats obtenus dans la première partie du travail. A cause du fait que les noeuds multiples exigent l'emploi des dérivées de type Fréchet, dans le deuxième paragraphe nous présenterons brièvement la définition ainsi que quelques propriétés de ces dérivées. Dans le troisième paragraphe nous présenterons la construction du polynôme abstrait d'interpolation de type Hermite ainsi que quelques exemples concrets. Enfin dans le quatrième et dernier paragraphe, nous présenterons quelques modalités pour définir les différences divisées abstraites au cas des noeuds multiples ainsi que quelques propriétés de ces différences.

§.1. Polynôme abstrait d'interpolation à noeuds simples.

Considérons une application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$ où $(X, +, \cdot)$ et $(Y, +, \cdot)$ sont des espaces linéaires. Considérons maintenant l'application bilinéaire $B: Y \times Y \rightarrow Y$, qui remplit les conditions suivantes:

$$(1.1) \quad \begin{cases} B(u, v) = B(v, u) & \text{pour chaque } u, v \in Y \\ B(B(u, v), w) = B(u, B(v, w)) & \text{pour chaque } u, v, w \in Y \end{cases}$$

Les relations (1.1) montrent que l'application B détermine sur Y une structure de demi-groupe commutative. Nous supposons de plus que les conditions suivantes sont remplies:

- A_1) Le demi-groupe (Y, B) admet un élément neutre u_0 . Il existe $Y_0 \subseteq Y$ tel que (Y_0, B) forme un groupe et $u_0 \in Y_0$.
- A_2) Il existe $X_0 \subseteq X$ et l'application bijective $\varphi_0: X_0 \rightarrow Y_0$.
- A_3) Il existe une application linéaire $\varphi: X \rightarrow Y$ avec la propriété $\varphi|_{X_0} = \varphi_0$.

À l'aide de l'application φ et de l'application bilinéaire B nous construisons la suite d'applications $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $A_n: X^n \rightarrow Y$ telles que:

$$(1.2) \quad \begin{cases} A_1(u) = \varphi(u) & \text{pour tout } u \in X \\ A_n(u_1, \dots, u_n) = B(A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), \varphi(u_n)) \\ & \text{pour } u_i \in X, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Considérons maintenant les points $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tels que $x_i - x_j \in X_0$ pour chaque $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. À l'aide des ces points et des applications $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par (1.2) nous construisons l'application non-linéaire:

$$(1.3) \quad \omega_{k,n}: X \rightarrow Y \quad \text{où} \quad \omega_{k,n}(x) = A_{n+1}(x - x_k, \dots, x - x_{k+n})$$

et aussi pour chaque $i \in \{k, \dots, k+n\}$ les applications linéaires

$$(1.4) \quad \omega'_{k,n}(x_i): X \rightarrow Y \quad \text{définies par}$$

$$\omega'_{k,n}(x_i)h = A_{n+1}(x_i - x_k, \dots, x_i - x_{i-1}, x_i - x_{i+1}, \dots, x_i - x_{k+n}, h)$$

On remarque que $\omega'_{k,n}(x_i)$ représente la dérivée de type Fréchet de l'application $\omega_{k,n}$ au point x_i . X et Y ayant dans ce cas la structure des espaces linéaires normés.

Dans le cas des applications définies par (1.4) on a le lemme suivant:

LEMME 1.1. Dans les conditions précisées, les restrictions à X_0 à valeurs en Y_0 , des applications définies par (1.4) sont bijectives.

Si nous gardons la notation $\omega'_{k,n}(x_i)$ pour désigner la fonction $\omega'_{k,n}(x_i)|_{X_0}$, il existe l'application $[\omega'_{k,n}(x_i)]^{-1}: Y_0 \rightarrow X_0$. Cette application peut se prolonger par linéarité à $\text{sp} Y_0$ et dans le cas où Y a aussi une structure topologique, le prolongement peut s'étendre à $\overline{\text{sp} Y_0}$. Nous désignons par Y_1 le sous-ensemble maximal de Y auquel on peut prolonger $[\omega'_{k,n}(x_i)]^{-1}$ et nous gardons la même notation pour l'application prolongée.

Supposons maintenant que $f(x_i) \in Y_1$ pour chaque $i = \overline{1, n}$. En ce cas on peut considérer l'application:

$$L(x_1, \dots, x_{n+1}; f): X \rightarrow Y \quad \text{définie par}$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} L(x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = \\ = \sum_{l=1}^{n+1} A_{n+1}(x - x_1, \dots, x - x_{l-1}, x - x_{l+1}, \dots, x - x_{n+1}, [\omega'_{l,n}(x_l)]^{-1} f(x_l)) \end{aligned}$$

Relativement à cette application on a le théorème suivant:

THÉOREME 1.2. Dans les conditions requises ci-dessus, les applications définies par (1.5) vérifient les égalités suivantes:

$$(1.6) \quad L(x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x_i) = f(x_i) \quad i = \overline{1, n+1}$$

Les relations (1.6) justifient l'emploi de l'expression "polynôme abstrait d'interpolation de type Lagrange" pour désigner les applications définies par (1.5).

Du fait de la multilinéarité des applications A_n , $n \in \mathbb{N}$, les applications (1.6) peuvent être écrites sous la forme:

$$(1.7) \quad L(x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = D_n x^n + D_{n-1} x^{n-1} + \dots + D_1 x + D_0$$

Dans (1.7) $D_0 \in Y$ et pour chaque $k = \overline{1, n}$, $D_k: X^k \rightarrow Y$ est une application k -linéaire.

Dans la théorie de l'interpolation on accorde une attention particulière à l'application n -linéaire $D_n: X^n \rightarrow Y$. Si nous écrivons $D_n = [x_1, \dots, x_{n+1}; f]$ il résulte de (1.7) pour cette application la définition suivante:

$$(1.8) \quad [x_1, \dots, x_{n+1}; f] h_1 \dots h_n = \sum_{i=1}^{n+1} A_{n+1}(h_1, \dots, h_n, [\omega'_{i,n}(x_i)]^{-1} f(x_i))$$

Nous appellerons cette expression "différence divisée abstraite d'ordre n de f sur les points $x_1, \dots, x_{n+1}$ ".

Dans [1], [3] nous avons donné quelques exemples dans lesquels nous avons construit le polynôme d'interpolation de type Lagrange tant au cas où X et Y sont de dimension finie qu'au cas des espaces de fonctions.

Les principales propriétés du polynôme abstrait d'interpolation et de la différence divisée sont présentées dans le théorème suivant:

THÉOREME 1.3. Le polynôme abstrait d'interpolation et la différence divisée jouissent des propriétés suivantes:

i) la relation de récurrence des différences divisées a lieu, c'est-à-dire qu'on a

$$(1.9) \quad [x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}; f](x_{n+1} - x_1) = [x_2, \dots, x_n, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$;

jj) il existe également une relation de récurrence pour les polynômes abstraits d'interpolation, notamment

$$(1.10) \quad L(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f)(x) = L(x_1, \dots, x_n; f)(x) + [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f](x - x_1) \dots (x - x_n)$$

pour chaque $x \in X$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$;

jjj) le polynôme abstrait d'interpolation peut s'écrire sous la forme de Newton:

$$(1.11) \quad L(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; f)(x) = f(x_1) + \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, x_{i+1}; f](x - x_1) \dots (x - x_i)$$

pour chaque $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$;

jv) on a une relation de type Aitken:

$$(1.12) \quad B(L(x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x), \varphi(x_{n+1} - x_1)) = B(L(x_2, \dots, x_{n+1}; f)(x), \varphi(x - x_1)) - B(L(x_1, \dots, x_n; f)(x), \varphi(x - x_{n+1}))$$

pour chaque $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$;

v) on a l'égalité:

$$(1.13) \quad f(x) = L(x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) + [x, x_1, \dots, x_{n+1}; f](x - x_1) \dots (x - x_{n+1})$$

La théorie présentée dans ce travail nécessite l'introduction de

la notion de $(\varphi - B)$ monôme et de celle de $(\varphi - B)$ polynôme.

Nous présentons ces notions par la définition suivante:

DÉFINITION 1.4. On appelle $(\varphi - B)$ monôme du n -ième degré, $n \geq 1$ une application $M_n: X \rightarrow Y$, définie par:

$$(1.14) \quad M_n(x) = A_n(x, x, \dots, x)$$

où $A_n: X^n \rightarrow Y$ est l'application n linéaire introduite par (1.2) à l'aide de l'application linéaire $\varphi: X \rightarrow Y$ et de l'application bilinéaire $B: Y \times Y \rightarrow Y$.

Dans ce qui suit, nous allons présenter une expression de la différence divisée au cas où f est remplacée par un $(\varphi - B)$ monôme. On a ainsi le théorème suivant qui généralise un résultat obtenu par T. Popoviciu [4].

THÉORÈME 1.5. Dans les conditions requises on a les relations suivantes:

$$(1.15) \quad [x_1, \dots, x_{n+1}; M_k] = \begin{cases} \theta_n & ; k < n \\ A_n & ; k = n \\ \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1} = k-n} A_n x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} & ; k > n \end{cases}$$

la différence divisée étant engendrée par les mêmes applications φ et B , qui engendrent le $(\varphi - B)$ monôme M_k .

Pour le théorème suivant nous désignons par $f: X \rightarrow Y_0$ une application donnée. À l'aide de f nous construisons l'application $g: X \rightarrow Y$ par la relation $g(x) = B(a, f(x))$ où $a \in Y_0$ est arbitraire.

THÉORÈME 1.6. On a la relation suivante:

$$(1.16) \quad [x_1, \dots, x_{n+1}; g] h_1 \dots h_n = B(a, [x_1, \dots, x_{n+1}; f] h_1 \dots h_n)$$

Des théorèmes 1.5 et 1.6 nous déduisons le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.7. Si $M_k: X \rightarrow Y$ est un $(\varphi - B)$ monôme du k -ième degré et $g: X \rightarrow Y$ est définie par $g(x) = B(a, M_k(x))$ avec $a \in Y_0$ arbitraire, on a les relations suivantes:

$$(1.17) \quad [x_1, \dots, x_{n+1}; g] h_1 \dots h_n = \begin{cases} \theta & ; k < n \\ B(a, A_n(h_1, \dots, h_n)) & ; k = n \\ \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k-n} B(a, A_k x_1^{\alpha_1} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} h_1 \dots h_n) & ; k > n \end{cases}$$

À titre d'extension de la notion de polynôme nous présentons celle de $(\varphi - B)$ polynôme, notion qui sera introduite par la définition suivante:

DÉFINITION 1.8. On appelle $(\varphi - B)$ polynôme de n -ième degré, une application $P: X \rightarrow Y$ définie par:

$$(1.18) \quad P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n B(a_k, M_k(x))$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$ et $M_k: X \rightarrow Y$ est un $(\varphi - B)$ monôme du k -ième degré, $k = \overline{1, n}$.

En se servant de cette définition et du corollaire 1.7. on établit le théorème suivant:

THEOREME 1.9. On a la relation:

$$(1.19) \quad P = L(x_1, \dots, x_{n+1}; P)$$

pour chaque $(\varphi - B)$ polynôme du k -ième degré, $k \leq n$; le polynôme abstrait d'interpolation étant engendré par les mêmes applications

φ et B qui engendrent le $(\varphi - B)$ polynôme P .

Du théorème 1.9. peut se déduire le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.10. On a la représentation sous forme barycentrique du polynôme abstrait d'interpolation:

$$(1.20) \quad L(x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} d_i^{-1} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n+1} d_i^{-1} f(x_i)$$

pour chaque $x \in X$, tel que $x - x_i \in X_0$, $i = \overline{1, n+1}$ et $d_i: X \rightarrow Y$ est une application linéaire définie par:

$$(1.21) \quad d_i h = A_{n+2}(x_i - x_1, \dots, x_i - x_{i-1}, x - x_i, x_i - x_{i+1}, \dots, x_i - x_{n+1}, h)$$

pour chaque $h \in X_0$ et $i = \overline{1, n+1}$.

Les démonstrations des théorèmes 1.1.-1.10. ont été données en [1], [3].

§.2. Dérivées de type Fréchet. Propriétés spéciales.

Désignons par X et Y des espaces linéaires normés et par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et continues définies sur X à valeurs en Y et considérons l'application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$.

DÉFINITION 2.1. L'application f admet une dérivée de type Fréchet au point $x \in X$, s'il existe $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $f'(x): X \times X \rightarrow Y$ tels que:

$$(2.1) \quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varepsilon(x, h) \quad \text{et} \quad (2.2) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(x, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

L'application $f'(x)$ s'appelle dérivée de type Fréchet de f au point x .

DÉFINITION 2.2. L'application f admet une dérivée de type Fréchet d'ordre n au point $x, n \geq 1$, si les conditions suivantes sont remplies:

1) il existe la dérivée de type Fréchet d'ordre $n-1$ de l'application f , $f^{(n-1)}(t) \in \mathcal{L}_{n-1}(X, Y)$ pour chaque $t \in V$; V étant un voisinage du point x ;

ii) l'application $F: V \rightarrow \mathcal{L}_{n-1}(X, Y)$ définie par $F(t) = f^{(n-1)}(t)$ est dérivable Fréchet au point x .

L'application $F'(x) = f^{(n)}(x)$ s'appelle dérivée de type Fréchet d'ordre n au point x .

Dans [2], [3] nous avons présenté quelques propriétés géné-

rales des dérivées de type Fréchet d'ordre n , dans le cas des applications entre des espaces linéaires normés.

Nous en présenterons ici quelques unes des propriétés d'un caractère plus spécial, qui seront utilisées dans le paragraphe suivant. Ces propriétés ont été établies en [2].

Considérons l'application symétrique $B \in \mathcal{L}_2(Y, Y)$ et les applications non-linéaires $f, g: X \rightarrow Y$. À l'aide des ces applications nous définissons l'application $F: X \rightarrow Y$ par la relation:

$$(2.3) \quad F(x) = B(f(x), g(x))$$

Ecrivons maintenant $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Nous désignons par $\mathcal{C}_{n,k}(\mathcal{E})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles à k éléments de $\mathcal{E}$. Ainsi qu'il est bien connu le nombre des éléments de $\mathcal{C}_{n,k}(\mathcal{E})$ est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Si $\mathcal{E} = \{1, \dots, n\}$ nous écrirons $\mathcal{C}_{n,k}(\mathcal{E}) = \mathcal{C}_{n,k}$. On a l'extension suivante de la formule de Leibnitz:

THÉOREME 2.3. Si les applications f, g admettent des dérivées de type Fréchet d'ordre n au point $x \in X$, alors l'application F définie par (2.3) admet aussi une dérivée de type Fréchet d'ordre n et pour chaque $h_1, \dots, h_n \in X$ on a:

$$(2.4) \quad F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} B(f^{(k)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_k}, g^{(n-k)}(x) h_{j_1} \dots h_{j_{n-k}})$$

où $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ et $j_1 < \dots < j_{n-k}$. On observe que le système d'indices $(i_1, \dots, i_k)$ parcourt l'ensemble $\mathcal{C}_{n,k}$, donc le nombre des termes de la deuxième somme de (2.4) est $\binom{n}{k}$. On déduit donc de (2.4) pour $h_1 = \dots = h_n = h$

$$(2.5) \quad F^{(n)}(x) h^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}(x) h^k, g^{(n-k)}(x) h^{n-k})$$

Le fait que le théorème 2.2 généralise la formule de Leibnitz est ainsi évident.

Nous pouvons obtenir une généralisation du théorème 2.3 si nous considérons une suite d'applications multilinéaires $(A_m)_{m \geq 2}$; $A_m \in \mathcal{L}_m(Y, Y)$ où les A_m se définissent à l'aide de $B \in \mathcal{L}_2(Y, Y)$ de la manière suivante :

$$(2.6) \quad \begin{cases} A_2(u_1, u_2) = B(u_1, u_2) \\ A_m(u_1, \dots, u_m) = B(A_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}), u_m) \end{cases} ; m \geq 2$$

où $u_1, u_2, \dots, u_m \in Y$.

Considérons aussi les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$, tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$ et désignons par $\mathcal{A}_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}$ l'ensemble des systèmes $(G_1, \dots, G_m)$ où $G_k = \{i_1^{(\alpha_1)}, \dots, i_{\alpha_k}^{(\alpha_k)}\} \in \mathcal{C}_{\alpha_k, H_k}$ avec $p_k = n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1})$ et $H_k = \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i$. Le nombre des éléments de l'ensemble $\mathcal{A}_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}$ est évidemment $\frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!}$.

Considérons les applications $f_i: X \rightarrow Y$; $i = \overline{1, m}$ et en outre l'application $F: X \rightarrow Y$ définie par :

$$(2.7) \quad F(x) = A_m(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

La généralisation du théorème 2.3. ci-dessus signalée s'exprime par le théorème suivant :

THÉOREME 2.4. Si les applications $f_i: X \rightarrow Y$; $i = \overline{1, m}$ admettent des dérivées de type Fréchet d'ordre n au point $x \in X$, alors l'application F définie par (2.7) admet aussi une dérivée d'ordre n au même point et pour chaque $h_1, \dots, h_n \in X$ on a :

$$(2.8) \quad F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \sum_{(G_1, \dots, G_m) \in \mathcal{A}_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_m}} A_n(f_1^{(\alpha_1)}(x) h_{i_1^{(\alpha_1)}} \dots h_{i_{\alpha_1}^{(\alpha_1)}} \dots f_m^{(\alpha_m)}(x) h_{i_1^{(\alpha_m)}} \dots h_{i_{\alpha_m}^{(\alpha_m)}})$$

où $G_k = \{i_1^{(\alpha_1)}, \dots, i_{\alpha_k}^{(\alpha_k)}\}$; $k = \overline{1, m}$.

Considérons maintenant l'application $T_m: X \rightarrow Y$ définie par :

$$(2.9) \quad T_m(x) = A_m(x, \dots, x)$$

où $A_m \in \mathcal{L}_m(X, Y)$ sont les applications introduites par (1.2) avec $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $B \in \mathcal{L}_2(Y, Y)$. Nous supposons que l'application B vérifie les relations (1.1).

THÉOREME 2.5. Les applications définies par (2.9) admettent des dérivées d'ordre n ; $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $h_1, \dots, h_n \in X$ on a :

$$(2.10) \quad T_m^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = \begin{cases} 0 & ; n > m \\ A_n(h_1, \dots, h_n) & ; n = m \\ m(m-1) \dots (m-n+1) A_n(x, \dots, x)^{m-n} h_1 \dots h_n & ; n < m \end{cases}$$

A l'aide des applications introduites par (1.2) telles que les conditions (1.1) soient vérifiées avec $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}_2(Y, Y)$ nous pouvons considérer l'application $F: X \rightarrow Y$ définie par :

$$(2.11) \quad F(x) = A_{r_1 + \dots + r_m}((x-x_1)^{r_1}, (x-x_2)^{r_2}, \dots, (x-x_m)^{r_m})$$

où $r_i \in \mathbb{N}$; $i = \overline{1, m}$. Relativement à cette application on a le théorème suivant :

THÉOREME 2.6. L'application définie par (2.11) admet une dérivée de type Fréchet d'ordre $n \leq r_1 + r_2 + \dots + r_m$ au point $x \in X$ et :

$$(2.12) \quad F^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = n! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \prod_{i=1}^m \binom{r_i}{\alpha_i} A_{r_1 + \dots + r_m}((x-x_1)^{r_1 - \alpha_1}, \dots, (x-x_m)^{r_m - \alpha_m} h_1, \dots, h_m)$$



Le théorème 2.3. représente une extension de la formule de Leibnitz. Nous donnerons aussi une autre extension de cette formule, extension qui est nécessaire pour obtenir des résultats présentés dans la suite de ce travail.

En vue de cette extension considérons les espaces linéaires normés X, Y et Z et les applications $f: X \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$; $g: X \rightarrow Y$. A l'aide de f et g nous définissons l'application $F: X \rightarrow Z$ par:

$$F(x) = [f(x)]g(x).$$

THÉOREME 2.7. Si les applications f et g admettent des dérivées de type Fréchet d'ordre n au point $x \in X$, alors l'application F admet aussi une dérivée de type Fréchet d'ordre n au point x et:

$$(2.13) \quad ([f(x)]g(x))^{(n)} h_1 \dots h_n = \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} [f^{(k)}(x) h_{i_1} \dots h_{i_k}] g^{(n-k)}(x) h_{j_1} \dots h_{j_{n-k}}$$

où $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}$ pour chaque $h_1, \dots, h_n \in X$. et $n \in \mathbb{N}$.

Considérons maintenant l'application $f: X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ et supposons que $f(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ admet une inverse pour chaque $x \in X$. Alors on peut considérer l'application $g: X \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ définie par $g(x) = [f(x)]^{-1}$.

THÉOREME 2.8. Si l'application f admet une dérivée de type Fréchet, alors l'application g admet aussi une dérivée de type Fréchet et:

$$(2.14) \quad ([f(x)]^{-1})' h = - [f(x)]^{-1} f'(x) h [f(x)]^{-1}$$

pour chaque $h \in Y$.

Les démonstrations des théorèmes 2.3.- 2.8. sont données en [2], [3].

Supposons à présent que les conditions $A_1) - A_3)$ de §.1. sont remplies et en ce cas considérons aussi les applications $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par (1.2) avec $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $B \in \mathcal{L}_2(Y, X)$. B vérifie aussi (1.1) et X, Y sont des espaces linéaires normés. Dans ces conditions considérons l'application désignée par:

$$\omega \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m \end{matrix}; x \right) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

où

$$(2.15) \quad \omega \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m \end{matrix}; x \right) h = A_{p_1 + \dots + p_m + 1} ((x-x_1)^{p_1}, \dots, (x-x_m)^{p_m}, h)$$

Si $x-x_1 \in X_0$; $i = \overline{1, m}$ il résulte de $A_1) - A_3)$ que l'application définie par (2.15) représente une bijection de X_0 en Y_0 . L'inverse de cette bijection définie sur Y_0 peut s'étendre par linéarité et par continuité à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$. Donc on peut considérer l'application:

$$(2.16) \quad g: X \rightarrow \mathcal{L}(\overline{\text{sp}(Y_0)}, X)$$

où

$$g(x) = \omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m \end{matrix}; x \right)$$

Par ω^{-1} nous avons désigné l'extension de l'inverse à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$ de l'application définie par (2.15).

Nous allons donner à présent une expression de la dérivée de type Fréchet d'ordre n de l'application introduite par (2.16). A cette fin nous employons le lemme suivant énoncé et démontré en [1].

LEMME 2.9. Si $B \in \mathcal{L}_2(Y, X)$ vérifie les relations (1.1) pour chaque $p, n \in \mathbb{N}$, $p < n$, on a l'égalité suivante:

$$(2.17) \quad A_n(u_1, \dots, u_n) = B(A_p(u_1, \dots, u_p), A_{n-p}(u_{p+1}, \dots, u_n))$$

Enonçons maintenant le théorème qui exprime la dérivée d'ordre n de l'application définie par (2.15), théorème que nous démontrons dans ce travail.

THÉOREME 2.10. L'application définie par (2.15) admet une dérivée de type Fréchet d'ordre n , pour chaque $n \in \mathbb{N}$ au point $x \in X$ pour lequel $x - x_k \in X_0$ pour chaque $k = \overline{1, m}$, et:

$$(2.18) \quad [g^{(n)}(x)h_1 \dots h_n]t = (-1)^n n! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n} \prod_{i=1}^m \binom{p_i + \alpha_i - 1}{\alpha_i} \cdot$$

$$\varphi^{-1} A_{n+1}(\omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)t, h_1, \dots, h_n)$$

pour $t \in \overline{\text{sp}(Y_0)}$ et $h_1, \dots, h_n \in X$.

Démonstration. Du théorème 2.8. il résulte:

$$(2.19) \quad g'(x)h = -\omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x) \left[\omega'(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)h \right] \omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x).$$

En tenant compte des théorèmes 2.4. et 2.6. nous déduisons:

$$(2.20) \quad \omega'(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)h u = \sum_{k=1}^m p_k A_{p_1 + \dots + p_{m+1}}((x-x_1)^{p_1}, \dots, (x-x_{k-1})^{p_{k-1}}, (x-x_k)^{p_k}, (x-x_{k+1})^{p_{k+1}}, \dots, (x-x_m)^{p_m}, h, u)$$

pour chaque $h, u \in X$. Considérons un $t \in \overline{\text{sp}(Y_0)}$ et

$$u = \omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)t \in X$$

De (2.20) on déduit:

$$(2.21) \quad \omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)h \omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)t = \sum_{k=1}^m p_k B(\omega(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_{k-1}}{p_{k-1}}, \frac{x_k}{p_k}, \frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)h, \varphi \omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)t)$$

Nous établirons maintenant la relation:

$$(2.22) \quad \varphi(\omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)t) = A_2(x-x_k, \omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_{k-1}}{p_{k-1}}, \frac{x_k}{p_k}, \frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)t)$$

Pour cela nous remarquons que nous pouvons supposer $t \in Y_0$, l'extension à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$ étant évidente.

Soit donc $t \in Y_0$. Vu que les applications définies par (2.15) sont bijectives il résulte l'existence et l'unicité des éléments $h, u \in X_0$ tels que:

$$(2.23) \quad t = \omega(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)h = \omega(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_{k-1}}{p_{k-1}}, \frac{x_k}{p_k}, \frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)u$$

En tenant compte de la relation (2.15) et du lemme 2.9., la relation (2.23) prend la forme:

$$(2.24) \quad B(A_{p_1 + \dots + p_m}((x-x_1)^{p_1}, \dots, (x-x_m)^{p_m}, \varphi(h) - A_2(x-x_k, u)) = 0$$

De $x-x_k \in X_0$ pour chaque $k = \overline{1, m}$ il résulte:

$$A_{p_1 + \dots + p_m}((x-x_1)^{p_1}, \dots, (x-x_m)^{p_m}) \in Y_0$$

En tenant compte que B détermine sur Y_0 une structure de groupe, il résulte de (2.24) :

$$(2.25) \quad \varphi(h) = A_2(x-x_k, u)$$

De (2.23) et (2.25) on déduit la relation (2.22) qu'il fallait établir.

De (2.21) et (2.22) et en employant de nouveau le lemme 2.9. on déduit:

$$(2.26) \quad \omega'(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)h \omega^{-1}(\frac{x_1}{p_1}, \dots, \frac{x_m}{p_m}; x)t =$$

$$= \sum_{k=1}^m p_k B(\omega(x_1, \dots, x_m; x), \omega^{-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m; x) \varphi(h))$$

Nous remarquons maintenant que pour chaque $a \in Y_0$ il existe $\bar{y} \in Y_0$ tel que pour chaque $s \in Y$ on a:

$$(2.27) \quad B(s, B(a, \bar{y})) = s$$

En effet, du fait que B détermine sur Y_0 une structure de groupe il résulte que pour $a \in Y_0$ il existe $\bar{y} \in Y_0$ tel que $B(a, \bar{y}) = u_0$; u_0 étant l'élément neutre de groupe (Y_0, B) donc aussi du demi-groupe (Y, B) , par suite $B(s, u_0) = s$ pour chaque $s \in Y$ et en remplaçant la valeur ci-dessus de u_0 il résulte la relation (2.27).

Vu que $x - x_k \in X_0$; $k = \overline{1, m}$ il résulte

$$a = A_{p_1 + \dots + p_m}((x - x_1)^{p_1}, \dots, (x - x_m)^{p_m}) \in Y_0$$

et de (2.27) et (2.15) il résulte

$$\omega(x_1, \dots, x_m; x) \varphi^{-1} B(s, \bar{y}) = s$$

d'où

$$(2.28) \quad B(s, \bar{y}) = \varphi \omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x) s \quad \text{pour chaque } s \in Y$$

De (2.28) en prenant $s = B(u, v)$ il résulte:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \varphi \omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x) B(u, v) &= B(B(u, v), \bar{y}) = \\ &= B(B(\bar{y}, u), v) = B(\varphi \omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x) u, v) \end{aligned}$$

En prenant en (2.29) $v = \varphi(h)$ et

$$u = \omega(x_1, \dots, x_m; x) \omega^{-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m; x) t$$

il résulte:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} &\varphi \omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x) B(\omega(x_1, \dots, x_m; x) \cdot \\ &\cdot \omega^{-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m; x) t, \varphi(h)) = \\ &= B(\varphi \omega^{-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m; x) t, \varphi(h)) = \\ &= A_2(\omega^{-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m; x) t, h) \end{aligned}$$

De (2.19), (2.26) et (2.29) il résulte:

$$(g'(x)h)t = - \sum_{k=1}^m p_k \varphi^{-1} A_2(\omega^{-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m; x) t, h) \\ = - \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1} \prod_{i=1}^m (p_i + \alpha_i - 1) \varphi^{-1} A_2(\omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x) t, h)$$

donc la relation (2.19) est vraie pour $n = 1$.

Supposons maintenant que la relation (2.19) est vraie pour $n = p$, c'est-à-dire que

$$(2.31) \quad [g^{(p)}(x) h_2 \dots h_{p+1}] t = (-1)^p p! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \prod_{i=1}^m (p_i + \alpha_i - 1) \cdot \varphi^{-1} A_{p+1}(\omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x) t, h_2, \dots, h_{p+1})$$

et

$$(2.32) \quad [g^{(p)}(x+h_1) h_2 \dots h_{p+1}] t = (-1)^p p! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \prod_{i=1}^m (p_i + \alpha_i - 1) \cdot \varphi^{-1} A_{p+1}(\omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x+h_1) t, h_2, \dots, h_{p+1})$$

On déduit de (2.31) et (2.32) par soustraction:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} &[(g^{(p)}(x+h_1) - g^{(p)}(x)) h_2 \dots h_{p+1}] t = \\ &= (-1)^p p! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \prod_{i=1}^m (p_i + \alpha_i - 1) \varphi^{-1} A_{p+1}([\omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x+h_1) - \\ &- \omega^{-1}(x_1, \dots, x_m; x)] t, h_2, \dots, h_{p+1}) \end{aligned}$$

Mais

$$(2.34) \quad \omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 + \alpha_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m + \alpha_m \end{matrix}; x + h_1 \right) t - \omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 + \alpha_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m + \alpha_m \end{matrix}; x \right) t =$$

$$= \left[\omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 + \alpha_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m + \alpha_m \end{matrix}; x \right) \right]' h_1 t + \varepsilon_{\omega^{-1}}(x, h_1)$$

où

$$\lim_{\|h_1\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_{\omega^{-1}}(x, h_1)\|}{\|h_1\|} = 0$$

En tenant compte de la $p+1$ -linéarité et de la continuité de A_{p+1} , il résulte de (2.33) et (2.34) l'existence de $g^{(p+1)}(x)$ et en vertu de la propriété déjà démontrée pour $n = 1$ on a:

$$(2.35) \quad [g^{(p+1)}(x) h_1 \dots h_{p+1}] t =$$

$$= (-1)^{p+1} p! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_m = 1} \prod_{i=1}^m \binom{p_i + \alpha_i - 1}{\alpha_i} \binom{p_i + \alpha_i + \beta_i - 1}{\beta_i} \cdot$$

$$\varphi^{-1} A_{n+1} (\varphi^{-1} A_2 (\omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 + \alpha_1 + \beta_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m + \alpha_m + \beta_m \end{matrix}; x, h_1, h_2, \dots, h_{p+1} \right)))$$

En écrivant $\delta_i = \alpha_i + \beta_i$; $i = \overline{1, m}$ il résulte évidemment $\delta_1 + \dots + \delta_m = p+1$ et

$$\binom{p_i + \alpha_i - 1}{\alpha_i} \binom{p_i + \alpha_i + \beta_i - 1}{\beta_i} = \binom{\delta_i}{\alpha_i} \binom{p_i + \delta_i - 1}{\delta_i}$$

d'où

$$(2.36) \quad \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_m = 1} \left[\prod_{i=1}^m \binom{p_i + \alpha_i - 1}{\alpha_i} \binom{p_i + \alpha_i + \beta_i - 1}{\beta_i} \right] \cdot$$

$$T_{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m} = \sum_{\delta_1 + \dots + \delta_m = p+1} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \left[\prod_{i=1}^m \binom{\delta_i}{\alpha_i} \binom{p_i + \delta_i - 1}{\delta_i} \right] T_{\delta_1, \dots, \delta_m}$$

$$= \sum_{\delta_1 + \dots + \delta_m = p+1} \prod_{i=1}^m \binom{p_i + \delta_i - 1}{\delta_i} T_{\delta_1, \dots, \delta_m} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \prod_{i=1}^m \binom{\delta_i}{\alpha_i}$$

Nous nous servirons de l'égalité

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p} \prod_{i=1}^m \binom{\delta_i}{\alpha_i} = \binom{\delta_1 + \dots + \delta_m}{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} = \binom{p+1}{p} = p+1$$

dont la démonstration est élémentaire. L'expression du membre gauche de la relation (2.36) prend donc la forme

$$(p+1) \sum_{\delta_1 + \dots + \delta_m = p+1} \prod_{i=1}^m \binom{p_i + \delta_i - 1}{\delta_i} T_{\delta_1, \dots, \delta_m}$$

On déduit ainsi de (2.35)

$$(2.37) \quad [g^{(p+1)}(x) h_1 \dots h_{p+1}] (t) = (-1)^{p+1} (p+1)! \sum_{\delta_1 + \dots + \delta_m = p+1} \prod_{i=1}^m \binom{p_i + \delta_i - 1}{\delta_i} \cdot$$

$$\varphi^{-1} A_{p+2} (\omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 + \delta_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m + \delta_m \end{matrix}; x \right) t, h_1, \dots, h_{p+1})$$

Dans la déduction de (2.37) nous avons utilisé les relations suivantes:

$$A_{p+1} (\varphi^{-1} A_2 (u, h_1, h_2, \dots, h_{p+1})) = \varphi^{-1} B(A_2(u, h_1), A_p(h_2, \dots, h_{p+1})) =$$

$$= \varphi^{-1} A_{p+2}(u, h_1, \dots, h_{p+1})$$

La relation (2.37) montre que la relation (2.18) est vraie pour $n = p+1$. Le principe de l'induction mathématique assure la validité de cette relation pour chaque $n = p+1$. Le théorème est donc démontré.

§.3. Construction du polynôme abstrait à noeuds multiples.

Exemples.

Considérons l'application $f: X \rightarrow Y$; X et Y étant des espaces linéaires normés. Le problème général d'interpolation s'énonce de la manière suivante

(I) Etant donnés les nombres $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ et $f^{(j)}(x_1) \in \mathcal{L}_j(X, Y)$ pour chaque $j = \overline{0, r_1-1}$ et $i = \overline{1, m}$, on demande de déterminer un $(\varphi - B)$ polynôme $P: X \rightarrow Y$ de degré minimal tel que:

$P^{(j)}(x_1) = f^{(j)}(x_1)$ pour chaque $j = \overline{0, r_1-1}$ et $i = \overline{1, m}$.

Pour donner une réponse à ce problème nous supposons que les conditions $A_1) - A_3)$ sont remplies. Dans ces conditions nous consi-

définissons l'application (2.15) et à l'aide de cette application nous construisons l'application: $\Omega_{1,m,i} \in \mathcal{L}(X,Y)$ par la relation

$$(3.1) \quad \Omega_{1,m,i} = \omega \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_m \\ r_1 + \alpha_1 & \dots & r_{i-1} + \alpha_{i-1} & r_{i+1} + \alpha_{i+1} & \dots & r_m + \alpha_m \end{matrix} ; x_i \right)$$

Si $x_1, \dots, x_j \in X_0$ pour chaque $i, j = \overline{1, m}$; $i \neq j$, ainsi qu'on le verra au paragraphe suivant, l'application définie par (3.1) peut s'inverser sur Y_0 et cette inverse peut s'étendre à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$. Désignons par $\Omega_{1,m,i}^{-1}$ l'extension de cette inverse.

À titre de réponse au problème général d'interpolation (I) on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. Si $x_1, \dots, x_j \in X_0$ pour $i, j = \overline{1, m}$; $i \neq j$ et $f^{(j)}(x_1) \in \mathcal{L}_j(X, \overline{\text{sp}(Y_0)})$ pour chaque $j = \overline{1, r_1-1}$; $i = \overline{1, m}$ où $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ sont des nombres donnés, il existe un $(\varphi - B)$ polynôme de degré $n = r_1 + \dots + r_m - 1$ qui remplit les conditions du problème (I). L'expression de ce $(\varphi - B)$ polynôme est:

$$(3.2) \quad H_n \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \frac{(-1)^k}{j!} \cdot$$

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k} E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i, j, k)} (x) =$$

$$(3.3) \quad E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i, j, k)} (x) = \\ = \binom{r_1 + \alpha_1 - 1}{\alpha_1} \dots \binom{r_{i-1} + \alpha_{i-1} - 1}{\alpha_{i-1}} \binom{r_{i+1} + \alpha_{i+1} - 1}{\alpha_{i+1}} \dots \binom{r_m + \alpha_m - 1}{\alpha_m} \cdot$$

$$A_{n-r_i+k+2} \left((x-x_1)^{r_1}, \dots, (x-x_{i-1})^{r_{i-1}}, (x-x_{i+1})^{r_{i+1}}, \dots, (x-x_m)^{r_m} \right), \\ \Omega_{1,m,i}^{-1} f^{(j)}(x_i) (x-x_i)^j$$

Démonstration. Nous supposons que l'application

$H_n \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) : X \rightarrow Y$ est de la forme suivante:

$$(3.4) \quad H_n \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} l_{i,j} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x)$$

Afin que l'application considérée remplisse les conditions du problème (I) il est nécessaire que les applications $l_{i,j} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) : X \rightarrow Y$ $j = \overline{1, r_1-1}$; $i = \overline{1, m}$ vérifient les relations

$$(3.5) \quad l_{i,j}^{(t)} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x) = \delta_{i,s} \delta_{t,j} f^{(j)}(x_i)$$

où δ_{pq} est le symbole de Kronecker.

Pour remplir les conditions (3.5) nous cherchons une application $l_{i,j}$ de la forme:

$$(3.6) \quad l_{i,j} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x) = B(g_i(x), Q_{i,j}(x)); j = \overline{0, r_i-1}; i = \overline{1, m}$$

où

$$(3.7) \quad g_i(x) = A_{n-r_i+1} \left((x-x_1)^{r_1}, \dots, (x-x_{i-1})^{r_{i-1}}, (x-x_{i+1})^{r_{i+1}}, \dots, (x-x_m)^{r_m} \right)$$

et

$$(3.8) \quad Q_{i,j}(x) = B(A_j(x-x_i)^j, h_{i,j}(x))$$

où $h_{i,j} : X \rightarrow Y$ est une fonction à déterminer.

Il résulte de (3.6)-(3.8), en employant les théorèmes 2.3. et 2.4. pour $i \neq j$ et aussi pour $i = j$ et $t < j$ que les relations suivantes ont lieu:

$$(3.9) \quad l_{i,j}^{(t)} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x) = 0$$

Il faut déterminer les applications $h_{i,j} : X \rightarrow Y$ de (3.8) de telle manière qu'elles vérifient en outre les autres conditions, c'est-à-dire:

$$(3.10) \quad \begin{cases} l_{i,j}^{(j)}(x_1, \dots, x_m; f)(x_i) = f^{(j)}(x_i) \\ l_{i,j}^{(t)}(x_1, \dots, x_m; f)(x_i) = 0 \quad \text{pour } t > j \end{cases}$$

De (3.6), (3.8) et du fait que le degré du polynôme à déterminer est n , il résulte que le degré de $h_{i,j}$ est $n_i - j - 1$.

On connaît [3] la formule de Taylor dans le cas des applications entre des espaces linéaires normés. Cette formule s'exprime par l'inégalité suivante:

$$(3.11) \quad \|F(x) - \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k\| \leq \frac{\|x-x_0\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F^{(n+1)}(x_0 + \theta h)\|$$

où x et x_0 sont des points d'un ensemble ouvert U , ensemble sur lequel l'application $F: X \rightarrow Y$ admet bien entendu des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement. Si F est un $(\varphi - B)$ polynôme du n -ième degré, en employant le théorème 2.5. et l'inégalité (3.11) on déduit l'égalité suivante:

$$(3.12) \quad F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

De (3.12) et de la remarque que $h_{i,j}$ est un $(\varphi - B)$ polynôme du $n_i - j - 1$ n -ième degré on déduit l'égalité suivante:

$$(3.13) \quad h_{i,j}(x) = \sum_{k=0}^{n_i-j-1} \frac{1}{k!} h_{i,j}^{(k)}(x_i) (x-x_i)^k$$

De (3.6), (3.8) et (3.13) il résulte:

$$(3.14) \quad l_{i,j}(x_1, \dots, x_m; f)(x) = \sum_{k=0}^{n_i-j-1} \frac{1}{k!} B(g_i(x), B(A_j(x-x_i)^j, h_{i,j}^{(k)}(x_i)(x-x_i)^k))$$

ce qui montre que le problème est résolu au cas où les constantes $h_{i,j}^{(k)}(x_i)$ sont déterminées de telle manière que les conditions (3.10) soient remplies.

Définissons pour chaque $x \in X$, l'application $\tilde{g}_i(x) \in \mathcal{L}(Y, Y)$ par la relation $\tilde{g}_i(x)h = B(g_i(x), h)$. Il résulte alors de (3.6) que:

$$l_{i,j}(x_1, \dots, x_m; f)(x) = \tilde{g}_i(x) B(A_j(x-x_i)^j, h_{i,j}(x))$$

d'où l'on déduit:

$$(3.15) \quad B(A_j(x-x_i)^j, h_{i,j}(x)) = [\tilde{g}_i(x)]^{-1} l_{i,j}(x_1, \dots, x_m; f)(x)$$

En dérivant au sens de Fréchet $j+k$ fois les deux membres de la relation (3.15) et en utilisant les relations (2.5) et (2.13) nous déduisons pour chaque $t \in X$:

$$(3.16) \quad \sum_{j=0}^{j+k} \binom{j+k}{j} B([A_j(x-x_i)^j]^{(j+k-j)} t^{j+k-j}, h_{i,j}^{(v)}(x_i) t^j) = \sum_{j=0}^{j+k} \binom{j+k}{j} \{[\tilde{g}_i(x)]^{-1}\}^{(j+k-j)} t^{j+k-j} \} l_{i,j}^{(v)}(x_1, \dots, x_m; f)(x_i) t^j$$

En vertu du théorème 2.5. nous déduisons de la condition

$$l_{i,j}^{(v)}(x_1, \dots, x_m; f)(x_i) = \delta_{vj} f^{(j)}(x_i)$$

en faisant $x = x_i$ en (3.16):

$$(3.17) \quad j! B(A_j t^j, h_{i,j}^{(k)}(x_i) t^k) = \{[\tilde{g}_i(x)]^{-1}\}_{x=x_i}^{(k)} t^k \} f^{(j)}(x_i) t^j$$

On remarquera que $\tilde{g}_i(x)t = \tilde{g}_i(x) \varphi^{-1} t$, où:

$$\tilde{g}_i(x) = \omega \left(\begin{matrix} x_1 & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_m \\ r_1 & r_{i-1} & r_{i+1} & \dots & r_m \end{matrix} ; x \right)$$

Du théorème 2.10. appliqué à $\tilde{g}_i$ on déduit:

$$(3.18) \quad \{ ([\tilde{g}_i(x)]^{-1})^{(k)} t^k \} u = (-1)^k k! \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k} \prod_{v=1, v \neq i}^m \binom{h_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} \cdot \varphi^{-1} A_{k+1} (\Omega_{1,m,i}^{-1} u, t^k)$$

En tenant compte que $\tilde{g}_i(x) = \tilde{g}_i(x) \varphi$, donc $[\tilde{g}_i(x)]^{-1} = \varphi [\tilde{g}_i(x)]^{-1}$ il résulte de (3.18):

$$(3.19) \quad \{ ([\tilde{g}_i(x)]^{-1})^{(k)} t^k \} u = (-1)^k k! \cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k} \prod_{v=1, v \neq i}^m \binom{h_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} A_{k+1} (\Omega_{1,m,i}^{-1} u, t^k)$$

Nous déduisons de (3.17) et (3.19):

$$(3.20) \quad B(A_j t^j, h_{i,j}^{(k)}(x_i) t^k) = (-1)^k \frac{k!}{j!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k} \prod_{v=1, v \neq i}^m \binom{h_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} \cdot A_{k+1} (\Omega_{1,m,i}^{-1} f^{(j)}(x_i) t^j, t^k)$$

Si en (3.20) nous prenons $t = x - x_1$, nous obtenons:

$$(3.21) \quad B(A_j (x - x_i)^j, h_{i,j}^{(k)}(x_i) (x - x_i)^k) = (-1)^k \frac{k!}{j!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k} \prod_{v=1, v \neq i}^m \binom{h_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} \cdot A_{k+1} (\Omega_{1,m,i}^{-1} f^{(j)}(x_i) (x - x_i)^j, (x - x_i)^k)$$

On déduit de (3.14) et (3.21):

$$(3.21') \quad l_{ij} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{h_i - j - 1} (-1)^k \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k} E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i,j,k)}(x)$$

La relation (3.21') nous montre que les relations (3.2)-(3.3) sont démontrées, ce qui démontre le théorème.

Nous en donnerons à présent quelques exemples.

1. Considérons l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas il résulte $f^{(j)}(x_i) \in \mathbb{R}$ et:

$$(3.22) \quad E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i,j,k)}(x) = \prod_{v=1, v \neq i}^m \binom{h_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} \cdot \frac{(x - x_1)^{h_1} \dots (x - x_{i-1})^{h_{i-1}} (x - x_{i+1})^{h_{i+1}} \dots (x - x_m)^{h_m}}{(x_i - x_1)^{h_1 + \alpha_1} \dots (x_i - x_{i-1})^{h_{i-1} + \alpha_{i-1}} (x_i - x_{i+1})^{h_{i+1} + \alpha_{i+1}} \dots (x_i - x_m)^{h_m + \alpha_m}} \cdot f^{(j)}(x_i)$$

Ainsi nous retrouvons le résultat obtenu directement par D.D. STANCU [5].

2. Considérons l'application $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. En ce cas $f^{(j)}(x_i) \in \mathcal{L}_j^p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ donc pour chaque $j = \overline{1, r_1 - 1}$ et $i = \overline{1, p}$ on a:

$$(3.23) \quad f^{(j)}(x_i) (x - x_i)^j = (y_{i,j}^{(d)})_{s=\overline{1,p}}$$

où

$$(3.24) \quad y_{i,j}^{(d)} = \sum_{k_1 + \dots + k_p = j} \frac{\partial^j f_s}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_p^{k_p}} (x_1^1, \dots, x_p^p) \prod_{v=1}^p (x^v - x_i^v)^{k_v}$$

L'application $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ sera choisie par la relation

$$(3.25) \quad B(u, v) = (u^i v^i)_{i=\overline{1,p}}$$

pour chaque $u, v \in \mathbb{R}^p$; $u = (u^1, \dots, u^p)$, $v = (v^1, \dots, v^p)$ et pour l'application $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ on choisit l'application identique. Il en résulte que $A_n \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ a l'expression:

$$(3.26) \quad A_n(u_1, \dots, u_n) = (u_1^s u_2^s \dots u_n^s)_{s=\overline{1,p}}$$

où $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^p)$ pour chaque $k = \overline{1, n}$.

En outre on a:

$$X_0 = Y_0 = \{x = (x^i)_{i=\overline{1,p}} / x^i \in \mathbb{R} ; x^i \neq 0 ; i = \overline{1,p}\}$$

et évidemment $\text{sp}(Y_0) = \mathbb{R}^p = Y$, donc $\overline{\text{sp}(Y_0)} = Y$.

L'application $\omega(x_1, \dots, x_m; x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ sera

$$(3.27) \quad \omega\left(\frac{x_1}{q_1}, \dots, \frac{x_m}{q_m}; x\right)h = ((x^s - x_1^s)^{q_1} \dots (x^s - x_m^s)^{q_m} h^s)_{s=\overline{1,p}}$$

Donc l'application $\Omega_{1,m,i}$ définie par (3.1) est donnée par l'expression:

(3.28)

$$\Omega_{1,m,i} h = ((x^s - x_1^s)^{h_1 + \alpha_1} \dots (x^s - x_{i-1}^s)^{h_{i-1} + \alpha_{i-1}} (x^s - x_{i+1}^s)^{h_{i+1} + \alpha_{i+1}} \dots (x^s - x_m^s)^{h_m + \alpha_m})$$

pour chaque $h = (h^1, \dots, h^p) \in \mathbb{R}^p$.

Si $x_i^s \neq x_j^s$ pour chaque $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$ et $s = \overline{1, p}$; c'est-à-dire $x_1 - x_j \in X_0$ pour $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$; il résulte que l'application définie par (3.28) est inversable, donc il existe $\Omega_{1,m,i}^{-1}$. On a en outre:

$$(3.29) \quad \Omega_{1,m,i}^{-1} t = \frac{t^s}{(x_1^s - x_1^s)^{h_1 + \alpha_1} \dots (x_{i-1}^s - x_{i-1}^s)^{h_{i-1} + \alpha_{i-1}} (x_i^s - x_{i+1}^s)^{h_{i+1} + \alpha_{i+1}} \dots (x_m^s - x_m^s)^{h_m + \alpha_m}}$$

pour chaque $t = (t^1, t^2, \dots, t^p)$.

De (3.23) et (3.29) il résulte que:

$$(3.30) \quad \Omega_{1,m,i}^{-1} \frac{y_{i,j}^{(s)}}{(x_1^s - x_1^s)^{h_1 + \alpha_1} \dots (x_{i-1}^s - x_{i-1}^s)^{h_{i-1} + \alpha_{i-1}} (x_i^s - x_{i+1}^s)^{h_{i+1} + \alpha_{i+1}} \dots (x_m^s - x_m^s)^{h_m + \alpha_m}} =$$

où l'expression de $y_{i,j}^{(s)}$ est donnée par (3.24).

Par conséquent on a:

$$(3.31) \quad E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i,j,k)}(x) = \left(\frac{y_{i,j}^{(s)}}{(x_1^s - x_1^s)^{\alpha_1} \dots (x_{i-1}^s - x_{i-1}^s)^{\alpha_{i-1}} (x_{i+1}^s - x_{i+1}^s)^{\alpha_{i+1}} \dots (x_m^s - x_m^s)^{\alpha_m}} \right)_{s=\overline{1,p}}$$

où

$$(3.32) \quad \frac{y_{i,j}^{(s)}}{(x_1^s - x_1^s)^{\alpha_1} \dots (x_{i-1}^s - x_{i-1}^s)^{\alpha_{i-1}} (x_{i+1}^s - x_{i+1}^s)^{\alpha_{i+1}} \dots (x_m^s - x_m^s)^{\alpha_m}} = \frac{\binom{h_1 + \alpha_1 - 1}{\alpha_1} \dots \binom{h_{i-1} + \alpha_{i-1} - 1}{\alpha_{i-1}} \binom{h_{i+1} + \alpha_{i+1} - 1}{\alpha_{i+1}} \dots \binom{h_m + \alpha_m - 1}{\alpha_m} (x^s - x_1^s)^{h_1} \dots (x^s - x_{i-1}^s)^{h_{i-1}} (x^s - x_i^s)^k (x^s - x_{i+1}^s)^{h_{i+1}} \dots (x^s - x_m^s)^{h_m}}{(x_1^s - x_1^s)^{h_1} \dots (x_{i-1}^s - x_{i-1}^s)^{h_{i-1} + \alpha_{i-1}} (x_i^s - x_{i+1}^s)^{h_{i+1} + \alpha_{i+1}} \dots (x_m^s - x_m^s)^{h_m + \alpha_m}} y_{i,j}^{(s)}$$

3. Considérons maintenant l'application $f: C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$; par $C[a, b]$ nous avons désigné l'espace des fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$. En ce cas nous définissons l'ensemble $Y_0 \subseteq C[a, b]$ de la manière suivante:

$$(3.33) \quad Y_0 = \{x \in C[a, b] / x(t) \neq 0 \text{ pour chaque } t \in [a, b]\}$$

Aussi l'application bilinéaire $B: C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ sera

$$(3.34) \quad (B(u, v))(t) = u(t)v(t)$$

pour chaque $u, v \in C[a, b]$ et $t \in [a, b]$. Pour l'application

$\varphi: C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ on choisira l'application identique et $X_0 = Y_0$.

Il est évident que l'application B détermine sur $C[a, b]$ une structure de demi-groupe commutatif, l'élément neutre étant $u_0 = 1_{C[a, b]}$ (la

fonction identique), et que la même application détermine sur Y_0 une structure de groupe.

Montrons maintenant que $\overline{\text{sp}(Y_0)} = C[a, b]$. Pour démontrer cette égalité nous remarquerons d'abord qu'on a évidemment:

$$(3.35) \quad \overline{\text{sp}(Y_0)} = \overline{\text{sp}(Y_0)} \subseteq C[a, b]$$

L'adhérence des ensembles s'entend au sens de la norme uniforme.

Nous montrerons que:

$$(3.36) \quad C[a, b] \subseteq \overline{\text{sp}(Y_0)}$$

Pour ce faire, nous remarquerons qu'en vertu du théorème de Weierstrass il résulte que pour chaque $x \in C[a, b]$ il existe une suite de polynômes sur $C[a, b]$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite qui converge uniformément vers x . De la sorte, pour démontrer (3.36), il suffit de démontrer l'appartenance à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$ de chaque polynôme de degré au moins 1.

Considérons donc un polynôme P de degré arbitraire. On peut supposer que $P(a) \neq 0$ et $P(b) \neq 0$. Au cas contraire nous considérons une suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies de la manière suivante:

$$(3.37) \quad \tilde{P}_n(t) = \begin{cases} P(a + \frac{1}{n}) & \text{pour } t \in [a, a + \frac{1}{n}] \\ P(t) & \text{pour } t \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \\ P(b - \frac{1}{n}) & \text{pour } t \in [b - \frac{1}{n}, b] \end{cases}$$

où n est un nombre naturel choisi de telle manière que les intervalles $[a, a + \frac{1}{n}]$ et $[b - \frac{1}{n}, b]$ ne contiennent aucune racine du polynôme P . Il est évident que la suite $(\tilde{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend uniformément vers P et que de plus $\tilde{P}_n(a) \tilde{P}_n(b) \neq 0$. Pour n choisi comme ci-dessus, $\tilde{P}_n$ a les mêmes racines et les mêmes ordres de multiplicité. Ainsi $\tilde{P}_n$ assume le rôle de P .

Supposons donc $P(a) P(b) \neq 0$ et que le polynôme P a n racines à

ordre impair de multiplicité et désignons par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ces racines. Donc en chaque point α_i , P change de signe. On a évidemment:

$$(3.38) \quad P = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n+1}$$

où pour chaque $i = \overline{1, n+1}$

$$(3.39) \quad Q_i(t) = \begin{cases} P(t) & \text{pour } x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

De (3.38) et (3.39) il résulte que pour démontrer que $P \in \overline{\text{sp}(Y_0)}$ il suffit de démontrer que $Q_i \in \overline{\text{sp}(Y_0)}$ pour chaque $i = \overline{1, n+1}$. Pour prouver cette appartenance on remarquera qu'il est possible qu'il existe des racines à ordre pair de multiplicité, en chaque intervalle $]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$. Ces racines représentent les points où le graphique de P est tangent à l'axe Ox . Supposons que $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \dots, \beta_{r,i}$ sont les racines de ce type qui se trouvent dans l'intervalle $]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$. Nous construisons maintenant les suites de polynômes $(\tilde{Q}_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations suivantes:

$$(3.40) \quad \tilde{Q}_i^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{f(\alpha_{i-1} + \frac{1}{n})}{n(\alpha_{i-1} - a) + 1} & \text{pour } x \in [a, a + \frac{1}{n}] \\ \frac{n f(\alpha_{i-1} + \frac{1}{n})(x-a)}{n(\alpha_{i-1} - a) + 1} & \text{pour } x \in [a + \frac{1}{n}, \alpha_{i-1} + \frac{1}{n}] \\ P(x) & \text{pour } x \in [\alpha_{i-1} + \frac{1}{n}, \beta_{r,i} - \frac{1}{n}] \cup [\beta_{1,i} + \frac{1}{n}, \alpha_i - \frac{1}{n}] \\ \tilde{Q}_i^{(n)}(x) & \text{pour } x \in [\beta_{r,i} - \frac{1}{n}, \beta_{r,i} + \frac{1}{n}] \\ \frac{n f(\alpha_i - \frac{1}{n})(x-b)}{n(\alpha_i - b) - 1} & \text{pour } x \in [\alpha_i - \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \\ \frac{f(\alpha_i - \frac{1}{n})}{n(b - \alpha_i) + 1} & \text{pour } x \in [b - \frac{1}{n}, b] \end{cases}$$

$$(3.41) \quad \tilde{Q}_i^{(n)}(x) = \begin{cases} f(\beta_{ji} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{2} [f(\beta_{ji} + \frac{1}{n}) - f(\beta_{ji} - \frac{1}{n})] [n(x - \beta_{ji}) + 1] \\ \text{pour } x \in [\beta_{ji} - \frac{1}{n}, \beta_{ji} + \frac{1}{n}] \text{ et } j = \overline{1, k_i} \\ \\ P(x) \quad \text{pour } x \in [\beta_{ji} + \frac{1}{n}, \beta_{j+1, i} - \frac{1}{n}] \\ \text{et } j = \overline{1, k_i - 1} \end{cases}$$

En (3.40) et (3.41) $i = \overline{1, n+1}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un exemple de construction de $\tilde{Q}_i^{(n)}$ est présenté dans la fig.1, où nous supposons $k_1 = 2$.

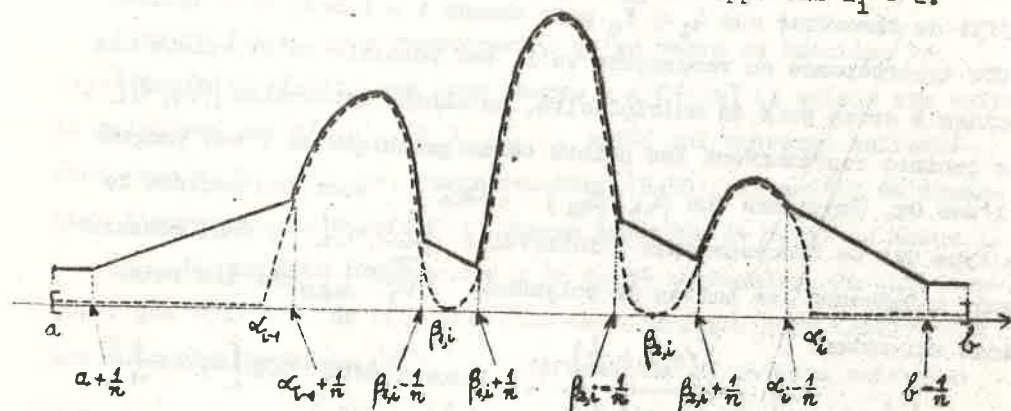


fig.1

On remarque facilement que $\tilde{Q}_i^{(n)} \in Y_0$ et qu'en outre $\tilde{Q}_i^{(n)}$ tend uniformément vers Q_1 . Donc $Q_1 \in \overline{Y_0}$ d'où l'on déduit que $P \in \text{sp}(\overline{Y_0})$ et en vertu de ce que nous avons montré ci-dessus on déduit que $\overline{\text{sp}(Y_0)} = C[a, b]$. Cette égalité étant établie, en vertu du théorème 3.1. il résulte l'existence du polynôme abstrait d'interpolation pour chaque application $f: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$. Bien entendu, il est nécessaire que les noeuds d'interpolation utilisés vérifient la condition $x_1 - x_j \in X_0$; c'est-à-dire que $x_1(t) \neq x_j(t)$ pour chaque $t \in [a, b]$ et $i, j = \overline{1, n+1}$; $i \neq j$.

De la définition de B donnée par (3.34) il résulte pour $A_n \in \mathcal{L}_n(C[a, b], C[a, b])$ la relation de définition suivante:

$$(3.42) \quad (A_n(u_1, \dots, u_n))(t) = u_1(t) u_2(t) \dots u_n(t)$$

pour chaque $u_i \in C[a, b]$; $i = \overline{1, n}$ et $t \in [a, b]$.

On a donc pour l'application $\omega(x_1, \dots, x_m; x) \in \mathcal{L}(C[a, b], C[a, b])$ la relation suivante:

$$(3.43) \quad [\omega(x_1, \dots, x_m; x)h](t) = h(t) \prod_{k=1}^m (x(t) - x_k(t))^{p_k}$$

pour chaque $t \in [a, b]$ et $x_1, \dots, x_m, x, h \in C[a, b]$; $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{N}$.

De (3.43) et en employant les relations $x_i(t) \neq x_j(t)$ pour chaque $t \in [a, b]$ et $i, j = \overline{1, n+1}$; $i \neq j$, il résulte pour $\Omega_{1, m, i}^{-1} \in \mathcal{L}(C[a, b], C[a, b])$ la relation suivante:

$$(3.44) \quad (\Omega_{1, m, i}^{-1} l)(x) = \frac{l(t)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (x_i(t) - x_j(t))^{k_j + q_{kj}}}$$

De (3.42) et (3.43) il résulte l'expression du polynôme d'interpolation de l'application $f: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$. Cette expression est:

$$(3.45) \quad [H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x)](t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{K=0}^{r_i-j-1} \frac{(-1)^K}{j!} \alpha_i + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = K \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m} (E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i, j, K)}(x))(t)$$

où

$$(3.46) \quad (E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i, j, K)}(x))(t) =$$

$$= (x(t) - x_0(t))^k \prod_{v=1, v \neq i}^n \frac{(x(t) - x_v(t))^{r_v}}{(x_i(t) - x_v(t))^{r_v + \alpha_v}}$$

et

$$(3.47) \quad y_{i,j}(t) = \left[f^{(j)}(x_i) (x - x_i)^j \right](t)$$

Les fonctions $y_{i,j}(t)$ seront calculées en tenant compte de l'expression de l'application f . Par exemple dans le cas où $f: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ est l'opérateur non-linéaire de Hammerstein donné par la relation suivante:

$$(3.48) \quad (f(x))(t) = \int_a^b K(t,s) g(s, x(s)) ds$$

on a pour $y_{i,j}(t)$ l'égalité suivante:

$$(3.49) \quad y_{i,j}(t) = \int_a^b K(t,s) \left[\frac{\partial^j g(s,u)}{\partial u^j} \right]_{u=x(s)} [x(s) - x_i(s)]^j ds$$

REMARQUES. 1. De (3.2), (3.3) et (1.5) il résulte immédiatement que:

$$(3.50) \quad H_{n-1} \left(\begin{matrix} x_1 & x_m \\ 1 & 1 \end{matrix}; f \right)(x) = L(x_1, \dots, x_m; f)(x)$$

2. Considérons le cas $m = 1$, c'est-à-dire le cas d'un seul noeud d'interpolation $x_0 \in X$. Pour obtenir un $(\varphi - B)$ polynôme du n -ième degré il est nécessaire que nous choisissons la multiplicité de x_0 égale à $n+1$. En ce cas on remarque que l'application $\Omega_{1,m,i}$ devient l'application identique. En outre

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m\} = \emptyset$$

et donc la relation $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k$ implique $k = 0$ et

de (3.2) et (3.3) pour $m = 1$, $r_1 = n+1$ il résulte que:

$$(3.51) \quad H_n \left(\begin{matrix} x_0 \\ n+1 \end{matrix}; f \right)(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x - x_0)^j$$

donc dans le cas d'un seul noeud d'interpolation le $(\varphi - B)$ polynôme d'interpolation de type Hermite se réduit au $(\varphi - B)$ polynôme de Taylor.

§.4. Différences divisées aux noeuds multiples.

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'étendre la notion de différence divisée à noeuds multiples à des applications entre espaces linéaires normés et en employant les noeuds multiples.

Considérons d'abord l'application $\omega \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix}; x \right) \in \mathcal{L}(X, Y)$ donnée par (2.15), à l'aide de laquelle nous introduisons l'application:

$$D_{k,j} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix}; x, y; f \right) \in \mathcal{L}_{k+j}(X, Y)$$

définie par l'égalité suivante:

$$(4.1) \quad D_{k,j} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix}; x, y; f \right) h_1 \dots h_{k+j} = \\ = A_{k+j} (h_1, \dots, h_k, \omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix}; x \right) f^{(j)}(y) h_{k+1} \dots h_{k+j})$$

où nous avons désigné par $f^{(j)}(y) \in \mathcal{L}_j(X, Y)$ la dérivée de type Fréchet d'ordre j de l'application f au point y . Les éléments $x_1, \dots, x_m$ s'appellent noeuds et les nombres $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ représentent leurs ordres de multiplicité.

Pour assurer l'existence d'une application inverse de l'applica-

tion définie par (2.15) il est nécessaire de supposer que $x-x_k \in X_0$ pour chaque $k = \overline{1, m}$.

Au cas où les noeuds leurs ordres de multiplicité et les points $x, y \in X$ sont sous-entendus, nous pouvons simplifier l'écriture en remplaçant la notation $\omega(x_1, \dots, x_m; x)$ par ω et la notation $D_{k,j}(x_1, \dots, x_m; x, y, f)$ par $D_{k,j}$. Dans cette écriture simplifiée, au cas où la multiplicité du noeud x_1 se modifie d'un nombre p d'unités nous marquerons ce fait par les notations $\omega^{(x_1, \pm p)}$ et $D_{k,j}^{(x_1, \pm p)}$.

Dans le but de présenter quelques-unes des propriétés des applications introduites, nous établirons le lemme suivant:

LEMME 4.1. Si les conditions $A_1) - A_3)$ sont remplies et si $Y = \overline{\text{sp}(Y_0)}$, alors pour $p \in \{1, \dots, m\}$ on a la relation suivante:

$$(4.2) \quad D_{k+1,j}(x-x_p) = D_{k,j}^{(x_p, -1)}$$

l'égalité étant entendue entre deux éléments de $\mathcal{L}_{k+j}(X, Y)$.

Démonstration. Nous établirons la relation

$$(4.3) \quad A_2(x-x_p, \omega^{-1}t) = \varphi([\omega^{(x_p, -1)}]^{-1}t)$$

pour chaque $t \in Y$.

A cet effet, nous pouvons supposer que $t \in Y_0$, l'extension à $Y = \overline{\text{sp}(Y_0)}$ étant évidente, du fait qu'elle s'effectue par linéarité et par continuité.

Par le fait que les applications qui interviennent en (4.3) ont des expressions symétriques par rapport aux noeuds, il suffit de démontrer la relation (4.3) pour $p = 1$.

Soit donc $t \in Y_0$ et $h = [\omega^{(x_1, -1)}]^{-1}t$. Du fait que $x-x_i \in X_0$ pour chaque $i = \overline{1, m}$ il résulte que

$$(4.4) \quad A_{h_1 + \dots + h_m}((x-x_1)^{h_1}, \dots, (x-x_m)^{h_m}) \in Y_0$$

et du fait que l'application $B \in \mathcal{L}_2(Y, Y)$ détermine sur Y_0 une structure de groupe, il résulte qu'il existe $u \in X_0$ tel que :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \omega^{(x_1, -1)}(h) &= \\ &= B(A_{h_1 + \dots + h_m}((x-x_1)^{h_1}, \dots, (x-x_m)^{h_m}), \varphi(h)) = \\ &= A_{h_1 + \dots + h_m + 1}((x-x_1)^{h_1}, \dots, (x-x_m)^{h_m}, u) = \omega(u) \end{aligned}$$

Donc $t = \omega^{(x_1, -1)}(h) = \omega(u)$ et $u = \omega^{-1}(t)$. La relation (4.5) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} B(A_{h_1 + \dots + h_m - 1}((x-x_1)^{h_1 - 1}, (x-x_2)^{h_2}, \dots, (x-x_m)^{h_m}), \varphi(h)) &= \\ &= B(A_{h_1 + \dots + h_m - 1}((x-x_1)^{h_1 - 1}, (x-x_2)^{h_2}, \dots, (x-x_m)^{h_m}), A_2(x-x_1, u)) \end{aligned}$$

Du fait que

$$A_{h_1 + \dots + h_m - 1}((x-x_1)^{h_1 - 1}, (x-x_2)^{h_2}, \dots, (x-x_m)^{h_m}) \in Y_0$$

il résulte que $A_2(x-x_1, u) = \varphi(h)$ d'où l'on déduit immédiatement la relation (4.3).

Considérons les éléments $h_1, \dots, h_{k+j} \in X$, d'ailleurs quelconques. De (4.3), où l'on remplace t par $f^{(j)}(y)h_{k+1} \dots h_{k+j}$ il résulte que:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} A_2(x-x_p, \omega^{-1}f^{(j)}(y)h_{k+1} \dots h_{k+j}) &= \\ &= \varphi([\omega^{(x_p, -1)}]^{-1}f^{(j)}(y)h_{k+1} \dots h_{k+j}) \end{aligned}$$

On déduit de (4.7):

$$D_{k+j,j}(x-x_p, h_1, \dots, h_{k+j}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= A_{k+2}(x-x_p, h_1, \dots, h_k, \omega^{-1} f^{(j)}(y) h_{k+1} \dots h_{k+j}) = \\
 &= B(A_k(h_1, \dots, h_k), B(\varphi(x-x_p), \varphi \omega^{-1} f^{(j)}(y) h_{k+1} \dots h_{k+j})) = \\
 &= B(A_k(h_1, \dots, h_k), A_2(x-x_p, \omega^{-1} f^{(j)}(y) h_{k+1} \dots h_{k+j})) = \\
 &= B(A_k(h_1, \dots, h_k), \varphi[\omega^{(x_p, -1)}]^{-1} f^{(j)}(y) h_{k+1} \dots h_{k+j}) = \\
 &= A_{k+1}(h_1, \dots, h_k, [\omega^{(x_p, -1)}]^{-1} f^{(j)}(y) h_{k+1} \dots h_{k+j}) = \\
 &= D_{k,j}^{(x_p, -1)}(h_1, \dots, h_{k+j})
 \end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré.

REMARQUE 4.2. Du lemme 4.1. il résulte immédiatement que pour chaque p et chaque q ; $p, q \in \{1, \dots, m\}$; $p \neq q$ on a en $\mathcal{L}_{k+j}^{(X, Y)}$ l'égalité suivante:

$$(4.3) \quad D_{k+1,j}(x_q - x_p) = D_{k,j}^{(x_p, -1)} - D_{k,j}^{(x_q, -1)}$$

À cause de cette relation, qui ressemble à la relation (1.9), nous appellerons les applications définies par (4.1) différences divisées élémentaires à noeuds multiples.

Afin d'établir un rapport entre les différences divisées élémentaires et le polynôme abstrait d'interpolation de type Hermite (3.2), il est nécessaire de prendre $x = y = x_1$ et

$$\omega = \omega \left(\begin{matrix} x_1 & x_{i-1} & x_{i+1} & x_m \\ h_1 + \alpha_1 & h_{i-1} + \alpha_{i-1} & h_{i+1} + \alpha_{i+1} & h_m + \alpha_m \end{matrix} ; x_i \right) = \Omega_{i, m_i}$$

où $i = \overline{1, m}$.

Les différences divisées élémentaires qui correspondent à ce

choix sont:

$$(4.9) \quad D_{k,j} \left(\begin{matrix} x_1 & x_{i-1} & x_{i+1} & x_m \\ h_1 + \alpha_1 & h_{i-1} + \alpha_{i-1} & h_{i+1} + \alpha_{i+1} & h_m + \alpha_m \end{matrix} ; x_i ; f \right)$$

où les variables $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$ prennent toutes les valeurs entières et non-négatives qui vérifient l'égalité $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k$ et $k \in \{1, \dots, r_1 - j - 1\}$; $j \in \{1, \dots, r_1 - 1\}$; $i \in \{1, \dots, m\}$. Les éléments $x_1, \dots, x_m \in X$ et aussi les nombres $r_1, \dots, r_m$ sont fixés.

Pour abréger l'écriture nous désignerons par R_i et A_i les systèmes de nombres entiers et non-négatifs $(r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_m)$, respectivement $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)$ et par $s(A_i)$ la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m$. Pour les différences divisées élémentaires (4.9) nous employons la notation abrégée $\mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, k)}$.

DEFINITION 4.3. On appelle différence divisée abstraite de la fonction $f: X \rightarrow Y$ sur les noeuds $x_1, \dots, x_m$ aux ordres de multiplicité $r_1, \dots, r_m$, une application $[x_1, \dots, x_m; f] \in \mathcal{L}_n(X, Y)$ définie par l'égalité suivante:

$$(4.10) \quad \left[\begin{matrix} x_1 & x_{i-1} & x_{i+1} & x_m \\ h_1 & h_{i-1} & h_{i+1} & h_m \end{matrix} ; f \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \sum_{s(A_i)=k} p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)}$$

où $n+1 = r_1 + \dots + r_m$ et $p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)}$ sont des nombres réels arbitraires.

Selon le choix des nombres réels $p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)}$, on peut donner aux applications (4.10). par rapport au polynôme abstrait d'interpolation de type Hermite, des interprétations différentes.

Ainsi si nous posons:

$$(4.11) \quad p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} = p_{A_i}^{(i, j, k)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{j!} \binom{n_1 + \alpha_1 - 1}{\alpha_1} \dots \binom{n_{i-1} + \alpha_{i-1} - 1}{\alpha_{i-1}} \binom{n_{i+1} + \alpha_{i+1} - 1}{\alpha_{i+1}} \dots \binom{n_m + \alpha_m - 1}{\alpha_m}$$

L'application (4.10) correspondante représente la somme des coefficients des $(\varphi - B)$ monômes au degré maximal de tous les $(\varphi - B)$ polynômes $E^{(i,j,k)}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}$ qui sont donnés par (3.3).

Si l'on fait le choix

$$(4.12) \quad p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)} = \begin{cases} P_{R_i, A_i}^{(i,j, r_i-j-1)} & \text{pour } k = r_i-j-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

L'expression respective de (4.10) représente le coefficient du $(\varphi - B)$ monôme du n -ième degré de l'expression du polynôme abstrait d'interpolation de type Hermite.

Nous établirons maintenant le théorème suivant:

THÉORÈME 4.4. Si $Y = \overline{\text{sp}(Y_0)}$, les conditions $A_1) - A_3)$ sont remplies et les nombres réels $p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}$ vérifient les relations suivantes:

i) pour $A_1 = 0$ les nombres $p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}$ ne dépendent pas de $R_1 = (r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_m)$;

$$ii) \quad p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)} = \left[p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)} \right]^{(n_i-1)} + \left[p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)} \right]^{(\alpha_i-1)}$$

pour chaque $i, \ell \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq \ell$; $j = \overline{1, r_i-1}$; $k = \overline{1, r_i-j-1}$, alors les différences divisées (4.10) vérifient la relation de récurrence:

$$(4.13) \quad \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ n_1 & \dots & n_m \end{matrix} ; f \right] (x_s - x_t)$$

$$= \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_{t-1} & x_t & x_{t+1} & \dots & x_m \\ n_1 & \dots & n_{t-1} & n_t & n_{t+1} & \dots & n_m \end{matrix} ; f \right] - \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_{t-1} & x_t & x_{t+1} & \dots & x_m \\ n_1 & \dots & n_{t-1} & n_{t-1} & n_{t-1} & \dots & n_m \end{matrix} ; f \right]$$

où $t, s \in \{1, \dots, m\}$ et sont distincts. (Nous avons désigné par $[p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}]^{(n_i-1)}$ et $[p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}]^{(\alpha_i-1)}$ les nombres obtenus de $p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}$ en diminuant d'une unité la valeur de r_i et α_i respectivement).

Démonstration. On déduit de la définition des différences divisées (4.10) que le deuxième membre de l'égalité (4.13) peut s'écrire sous la forme d'une somme $T_1 + T_{2,t} - T_{2,s}$. Les termes de cette somme ont les expressions suivantes:

$$(4.14) \quad T_1 = \sum_{\ell \in \{1, \dots, m\} \setminus \{t, s\}} \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{r_i-j-1} (T_{1,t}^{(i,j,k)} - T_{1,s}^{(i,j,k)})$$

où

$$T_{1,\ell}^{(i,j,k)} = \sum_{s(A_i)=k} [p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}]^{(n_i-1)} [D_{R_i, A_i}^{(i,j, n-n_i+k)}]^{(x_{\ell}-1)}$$

pour chaque $\ell \in \{t, s\} \subseteq \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ et

$$(4.15) \quad T_{2,t} = \sum_{j=0}^{r_t-2} \sum_{k=0}^{r_t-j-2} \sum_{s(A_t)=k} p_{R_t, A_t}^{(t,j,k)} D_{R_t, A_t}^{(t,j, n-n_t+k+1)} - \sum_{j=0}^{r_t-1} \sum_{k=0}^{r_t-j-1} \sum_{s(A_t)=k} [p_{R_t, A_t}^{(t,j,k)}]^{(n_t-1)} [D_{R_t, A_t}^{(t,j, n-n_t+k)}]^{(x_s-1)}$$

L'expression de $T_{2,s}$ est analogue à l'expression de $T_{2,t}$; on l'obtient en y permutant les variables t et s .

Supposons pour commencer $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{t, s\}$. On remarquera que pour $k = 0$ il résulte $s(A_i) = \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m$ et du fait que α_i ; $\forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ sont des nombres entiers non-négatifs on a $\alpha_i = 0$ pour chaque $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$, donc $A_1 = 0$ et à cause de i) on déduit que $p_{R_i, A_i}^{(i,j,0)} = a_{ij}$ et ces constantes ne dépendent pas de $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_m$.

$$\text{Donc } \left[p_{R_i, A_i}^{(i, j, 0)} \right]^{(n_t-1)} = \left[p_{R_i, A_i}^{(i, j, 0)} \right]^{(n_s-1)} = q_{i, j}$$

pour chaque $t, s \in \{1, \dots, m\}$. Par suite

$$(4.16) \quad T_{1, t}^{(i, j, 0)} - T_{1, s}^{(i, j, 0)} = q_{i, j} \left\{ \left[\mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i)} \right]^{(x_t-1)} - \left[\mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i)} \right]^{(x_s-1)} \right\}$$

et à cause de la relation (4.8) on a :

$$(4.17) \quad T_{1, t}^{(i, j, 0)} - T_{1, s}^{(i, j, 0)} = q_{i, j} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+1)} (x_s - x_t) = p_{R_i, A_i}^{(i, j, 0)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+0+1)} (x_s - x_t)$$

Supposons donc $k \geq 1$. A cause du lemme 4.1 on a pour chaque $i, t \in \{1, \dots, m\}$; $i \neq t$:

$$(4.18) \quad \left[\mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k)} \right]^{(x_t-1)} = \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)} (x_i - x_t)$$

et aussi

$$(4.19) \quad \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)} = \left[\mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+2)} \right]^{(x_i-1)} (x_i - x_t)$$

L'augmentation d'une unité de la multiplicité de x_t se reflète en x_t par le fait que la multiplicité de x_t devient $n_t + \alpha_t + 1$. En écrivant $\beta_e = \alpha_e$ pour $e \in \{1, \dots, m\} - \{i, t\}$ et $\beta_t = \alpha_t + 1$ on peut écrire:

$$(4.20) \quad \left[\mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+2)} \right]^{(x_t+1)} = \mathcal{D}_{R_i, B_i}^{(i, j, n-n_i+k+2)}$$

où $B_i = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m)$ et $s(B_i) = k+1$.

Considérons maintenant les applications

$$(4.21) \quad S^{(i, j, k)} = \sum_{s(B_i)=k} p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)}$$

A cause de (4.19) et (4.20) on peut écrire les applications (4.21) sous la forme:

$$(4.22) \quad S^{(i, j, k)} = \sum_{s(B_i)=k+1} \left[p_{R_i, B_i}^{(i, j, k)} \right]^{(\beta_t-1)} \mathcal{D}_{R_i, B_i}^{(i, j, n-n_i+k+2)} (x_i - x_t)$$

En effectuant une translation d'indices on a:

$$(4.23) \quad \sum_{k=0}^{r_i-j-2} S^{(i, j, k)} = \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \sum_{s(B_i)=k} \left[p_{R_i, B_i}^{(i, j, k-1)} \right]^{(\beta_t-1)} \mathcal{D}_{R_i, B_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)} (x_i - x_t)$$

De (4.20) nous déduisons que:

$$(4.24) \quad T_{1, t}^{(i, j, k)} = \sum_{s(A_i)=k} \left[p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \right]^{(n_t-1)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)} (x_i - x_t)$$

De (4.23) et (4.24) nous déduisons:

$$(4.25) \quad \sum_{k=1}^{r_i-j-1} T_{1, t}^{(i, j, k)} - \sum_{k=0}^{r_i-j-2} S^{(i, j, k)} = \sum_{k=1}^{r_i-j-1} \left\{ \left[p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \right]^{(n_t-1)} - \left[p_{R_i, A_i}^{(i, j, k-1)} \right]^{(\alpha_t-1)} \right\} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)} (x_i - x_t) = \sum_{k=1}^{r_i-j-1} p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)} (x_i - x_t);$$

la dernière égalité peut s'écrire à cause de l'hypothèse ii).

En employant un procédé analogue à celui qui a conduit à (4.24) on établit l'égalité suivante:

$$(4.26) \quad \sum_{k=1}^{r_i-j-1} T_{1, s}^{(i, j, k)} - \sum_{k=0}^{r_i-j-2} S^{(i, j, k)} = \sum_{k=1}^{r_i-j-1} p_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i, j, n-n_i+k+1)} (x_i - x_s)$$

Vu que

$$(4.27) \quad \sum_{k=1}^{r_i-j-1} (T_{i,t}^{(i,j,k)} - T_{i,s}^{(i,j,k)}) =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{r_i-j-1} T_{i,t}^{(i,j,k)} + \sum_{k=0}^{r_i-j-2} S^{(i,j,k)} \right] - \left[\sum_{k=1}^{r_i-j-1} T_{i,s}^{(i,j,k)} + \sum_{k=0}^{r_i-j-2} S^{(i,j,k)} \right]$$

et en tenant compte de (4.26), il résulte que:

$$(4.28) \quad \sum_{k=1}^{r_i-j-1} (T_{i,t}^{(i,j,k)} - T_{i,s}^{(i,j,k)}) = \sum_{k=1}^{r_i-j-1} p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i,j, n-r_i+k+1)} (x_s - x_t)$$

De (4.14), (4.17) et (4.28) nous déduisons la relation suivante:

$$(4.29) \quad T_1 = \sum_{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{t, s\}} \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \sum_{s(A_i)=k} p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i,j, n-r_i+k+1)} (x_s - x_t)$$

Transformons à présent l'expression de $T_{2,t}$ donnée par (4.15).

Si nous remplaçons en (4.18) et (4.19) la variable i par t et l'ancienne variable t par s , nous pouvons écrire que:

$$(4.30) \quad \left[\mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+k)} \right]^{(x_s-1)} = \mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+k+1)} (x_t - x_s)$$

et

$$(4.31) \quad \mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+k+1)} = \left[\mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+k+2)} \right]^{(x_s+1)} (x_t - x_s) =$$

$$= \mathcal{D}_{R_t, B_t}^{(t,j, n-r_t+k+2)} (x_t - x_s)$$

où $B_t = (\beta_1, \dots, \beta_{t-1}, \beta_{t+1}, \dots, \beta_m)$ et $\beta_\ell = \alpha_\ell$ pour $\ell \in \{1, \dots, m\} \setminus \{t, s\}$;
 $\beta_s = \alpha_s + 1$.

Donc on a l'égalité suivante:

$$T_{2,t} = \sum_{j=0}^{r_t-2} \sum_{k=0}^{r_t-j-2} \frac{(-1)^{k+1}}{j!} \sum_{s(B_t)=k} \left[p_{R_t, B_t}^{(t,j,k)} \right]^{(\alpha_s-1)} \mathcal{D}_{R_t, B_t}^{(t,j, n-r_t+k+2)} (x_s - x_t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r_t-1} \sum_{k=0}^{r_t-j-1} \frac{(-1)^k}{j!} \sum_{s(A_t)=k} \left[p_{R_t, A_t}^{(t,j,k)} \right]^{(\alpha_s-1)} \mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+k+1)} (x_s - x_t)$$

En employant un procédé analogue à celui qui a conduit à (4.23) et en tenant compte de l'hypothèse ii) il résulte que:

$$(4.31') \quad T_{2,t} = \sum_{j=0}^{r_t-2} \left\{ \sum_{k=1}^{r_t-j-1} \frac{(-1)^k}{j!} \sum_{s(A_t)=k} \left[p_{R_t, A_t}^{(t,j,k)} \right]^{(\alpha_s-1)} + \right.$$

$$+ \left[p_{R_t, A_t}^{(t,j,k)} \right]^{(\alpha_s-1)} \mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+k+1)} (x_s - x_t) + \frac{1}{j!} p_{R_t, A_t}^{(t,j,0)} \mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+1)} (x_s - x_t) \left. \right\} +$$

$$+ \frac{1}{(r_t-1)!} p_{R_t, A_t}^{(t, r_t-1, 0)} \mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t, r_t-1, n-r_t+1)} (x_s - x_t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r_t-1} \sum_{k=0}^{r_t-j-2} \sum_{s(A_t)=k} \frac{(-1)^k}{j!} p_{R_t, A_t}^{(t,j,k)} \mathcal{D}_{R_t, A_t}^{(t,j, n-r_t+k+1)} (x_s - x_t)$$

On établit d'une manière analogue la relation

$$(4.32) \quad T_{2,s} = \sum_{j=0}^{r_s-1} \sum_{k=0}^{r_s-j-1} \sum_{s(A_s)=k} \frac{(-1)^k}{j!} p_{R_s, A_s}^{(s,j,k)} \mathcal{D}_{R_s, A_s}^{(s,j, n-r_s+k+1)} (x_t - x_s)$$

De (4.29), (4.30) et (4.32) il résulte que:

$$\left[\begin{matrix} x_1 & x_{t-1} & x_t & x_{t+1} & \dots & x_m \\ n_1 & \dots & n_{t-1} & n_{t+1} & \dots & n_m \end{matrix} ; f \right] - \left[\begin{matrix} x_1 & x_{s-1} & x_s & x_{s+1} & \dots & x_m \\ n_1 & \dots & n_{s-1} & n_{s+1} & \dots & n_m \end{matrix} ; f \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \sum_{s(A_i)=k} p_{R_i, A_i}^{(i,j,k)} \mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i,j, n-r_i+k+1)} (x_s - x_t) =$$

$$= \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ n_1 & \dots & n_m \end{matrix} ; f \right] (x_s - x_t)$$

Le théorème est donc démontré.

REMARQUE. Au cas où les constantes $p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)}$ sont choisies par les relations (4.11) ou (4.12), les applications (4.9) respectives vérifient la relation de récurrence (4.13).

En effet, supposons d'abord que les constantes $p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)}$ sont choisies selon (4.11). Si $A_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m) = 0$, alors $\alpha_e = 0$ pour chaque $e \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$, donc $\binom{r_e + \alpha_e - 1}{\alpha_e} = \binom{r_e - 1}{0} = 1$ pour les mêmes valeurs de la variable l et par suite $p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)} = \frac{(-1)^k}{j!}$. Cette expression ne dépend évidemment pas de $R_i = (r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_m)$ et l'hypothèse i) est remplie. En outre

$$\begin{aligned} & \left[p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)} \right]^{(r_e - 1)} + \left[p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)} \right]^{(\alpha_e - 1)} = \\ &= \frac{(-1)^k}{j!} \left[\prod_{v \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, e\}} \binom{r_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} \right] \cdot \left[\binom{r_e + \alpha_e - 2}{\alpha_e} + \binom{r_e + \alpha_e - 2}{\alpha_e - 1} \right] = \\ &= \frac{(-1)^k}{j!} \left[\prod_{v \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, e\}} \binom{r_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} \right] \binom{r_e + \alpha_e - 1}{\alpha_e} = \\ &= \frac{(-1)^k}{j!} \prod_{v \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}} \binom{r_v + \alpha_v - 1}{\alpha_v} = p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)} \end{aligned}$$

donc l'hypothèse ii) est aussi remplie.

Il résulte de manière absolument analogue que les hypothèses i) et ii) du théorème 4.4. sont remplies également. au cas où les constantes $p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)}$ sont choisies selon (4.12)

Dans ce qui suit, un rôle important revient à la différence divisée obtenue à l'aide des constantes $p_{R_i, A_i}^{(l, j, k)}$ choisies selon la relation (4.12).

Comme toute application n-linéaire, cette différence se calculera

sur l'élément $(h_1, \dots, h_n) \in X^n$. Nous ferons remarquer que les éléments $h_i \in X$; $i = \overline{1, n}$ n'interviennent pas dans la démonstration de la relation (4.13); par suite leur ordre en leur qualité d'arguments des différences divisées élémentaires $\mathcal{Q}_{R_i, A_i}^{(l, j, k)} \in \mathcal{L}_{n-r_i+k+j}$ est arbitraire et peut être différent de l'ordre naturel des indices. Il est donc possible de définir la différence divisée ci-dessous comme suit:

$$(4.32) \quad \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right]_1^0 h_1 \dots h_n =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{\delta(A_i)=r_i-j-1} P_{R_i, A_i}^{(l, j, r_i-j-1)} \mathcal{Q}_{R_i, A_i}^{(l, j, r_i-j-1)} (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n)$$

où $(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n) = (h_1, \dots, h_{T_{i,j}}, h_{Q_i}, \dots, h_n, h_{T_{i,j}+1}, \dots, h_{T_{i,j}+j})$

et $T_{i,j} = r_1 + \dots + r_{i-1} + r_i - j - 1$; $Q_i = r_1 + \dots + r_i$

Pour $i = m$ on a évidemment $h_{Q_m} = n+1$, donc en ce cas les arguments $h_{Q_m}, \dots, h_n$ n'interviennent pas.

Nous établirons maintenant le théorème suivant:

THÉOREME 4.5. Si $Y = \text{sp}(Y_0)$ et les conditions $A_1) - A_3)$ sont remplies, alors les polynômes abstraits d'interpolation de type Hermite vérifient la relation de récurrence suivante:

$$(4.33) \quad H_n \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right) (x) = H_{n-1} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_{m-1} & x_m \\ r_1 & \dots & r_{m-1} & r_{m-1} \end{matrix} ; f \right) (x) + \\ + \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ r_1 & \dots & r_m \end{matrix} ; f \right]_1^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{m-1})^{r_{m-1}} (x-x_m)^{r_m-1}$$

pour chaque $r_1 + \dots + r_m = n+1$; $n \in \mathbb{N}$; $x_i - x_j \in X_0$; $i, j = \overline{1, m}$; $i \neq j$.

Démonstration. En utilisant les différences divisées élémentaires l'expression du (4 - B) polynôme d'interpolation de type Hermite peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(4.34) \quad H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)} \cdot (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m} (x-x_i)^j$$

De (4.32) il résulte que:

$$(4.35) \quad [x_1, \dots, x_m; f]_1^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{m-1})^{r_{m-1}} (x-x_m)^{r_m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{\delta(A_i)=r_i-j-1} P_{R_i, A_i}^{(i, j, r_i-j-1)} Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-j)} \cdot (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m-1} (x-x_i)^j + \sum_{j=0}^{r_m-1} \sum_{\delta(A_m)=r_m-j-1} P_{R_m, A_m}^{(m, j, r_m-j-1)} Q_{R_m, A_m}^{(m, j, n-j)} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{m-1})^{r_{m-1}} (x-x_m)^{r_m-j}$$

Supposons $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $j \in \{0, \dots, r_i-1\}$.

Vu que $x-x_m = x-x_i + x_i-x_m$ et que les applications sont linéaires et symétriques par rapport aux premiers arguments on a:

$$(4.36) \quad Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m} (x-x_i)^j = Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_i)^{k+1} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m-1} \cdot (x-x_i)^j + Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)} (x-x_m)(x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m-1} (x-x_i)^j$$

Mais à cause du lemme 4.1. on a:

$$(4.37) \quad Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)} (x-x_m) = \left[Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k)} \right]^{(x_m, -1)}$$

Du fait que $\binom{r_m+\alpha_m-1}{\alpha_m} = \binom{r_m+\alpha_m-2}{\alpha_m} + \binom{r_m+\alpha_m-2}{\alpha_m-1}$ il résulte que:

$$(4.38) \quad P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} = \left[P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \right]^{(r_m-1)} + \left[P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \right]^{(\alpha_m-1)}.$$

Si nous écrivons

$$(4.39) \quad S_{i,j} = \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} \cdot (x-x_i)^k (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m} (x-x_i)^j$$

et tenons compte des relations (4.36)-(4.38), nous pouvons déduire que:

$$(4.40) \quad S_{i,j} = \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k+1)} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} \cdot (x-x_i)^{k+1} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m-1} (x-x_i)^j + \frac{1}{j!} \left[Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k)} \right]_{k=0}^{(x_m, -1)} + \sum_{k=1}^{r_i-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} \left[P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \right]^{(r_m-1)} \cdot \left[Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k)} \right]^{(x_m, -1)} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_i)^k (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m-1} (x-x_i)^j + T_{i,j}$$

où par $T_{i,j}$ nous avons désigné l'expression suivante:

$$(4.41) \quad \sum_{k=1}^{r_i-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} \left[P_{R_i, A_i}^{(i, j, k)} \right]^{(\alpha_m-1)} \left[Q_{R_i, A_i}^{(i, j, n-r_i+k)} \right]^{(x_m, -1)} \cdot (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_i)^k (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_m)^{r_m-1} (x-x_i)^j$$

Dans $T_{i,j}$ nous effectuons le changement d'indices suivant:

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1}, \beta_m = \alpha_{m-1}$$

Alors on a:

$$\left[\mathcal{Q}_{R_i, A_i}^{(i,j, n-t_i+k)} \right]^{(x_m, -1)} = \mathcal{Q}_{R_i, B_i}^{(i,j, n-t_i+k)},$$

$$P_{R_i, A_i}^{(i,j, k)} = -P_{R_i, B_i}^{(i,j, k-1)} \quad \text{et} \quad \beta(B_i) = \beta(A_i) - 1 = k-1$$

Si nous effectuons maintenant une translation de l'indice k dans l'expression de $T_{i,j}$ nous obtenons:

$$(4.42) \quad T_{i,j} = - \sum_{k=0}^{r_{i,j}-2} \sum_{\beta(B_i)=k} P_{R_i, B_i}^{(i,j, k)} \mathcal{Q}_{R_i, B_i}^{(i,j, n-t_i+k+1)} \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{i-1})^{t_{i-1}} (x-x_i)^{k+1} (x-x_{i+1})^{t_{i+1}} \dots (x-x_m)^{t_m-1} (x-x_i)^{\beta}$$

Nous avons aussi

$$(4.43) \quad \left[P_{R_i, A_i}^{(i,j, k)} \right]_{K=0}^{(t_m-1)} = \frac{1}{j!}$$

De (4.40), (4.41), (4.42) et (4.43) on déduit que:

$$(4.44) \quad S_{i,j} = \sum_{k=0}^{r_{i,j}-1} \sum_{\beta(A_i)=k} \left[P_{R_i, A_i}^{(i,j, k)} \right]^{(t_m-1)} \left[\mathcal{Q}_{R_i, A_i}^{(i,j, n-t_i+k)} \right]^{(x_m, -1)} \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{i-1})^{t_{i-1}} (x-x_i)^k (x-x_{i+1})^{t_{i+1}} \dots (x-x_m)^{t_m-1} (x-x_i)^{\beta} + \sum_{\beta(A_i)=r_{i,j}-1} P_{R_i, A_i}^{(i,j, r_{i,j}-1)} \mathcal{Q}_{R_i, A_i}^{(i,j, n-t_i+r_{i,j})} (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{i-1})^{t_{i-1}} (x-x_i)^{r_{i,j}-1} (x-x_{i+1})^{t_{i+1}} \dots (x-x_m)^{t_m-1} (x-x_i)^{\beta}$$

La relation (4.44) est vérifiée pour chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $j \in \{1, \dots, r_1-1\}$.

Supposons maintenant $i = m$. On a évidemment:

$$(4.45) \quad S_{m,j} = S_{m,j}^{(1)} + S_{m,j}^{(2)}$$

où

$$(4.46) \quad S_{m,j}^{(1)} = \sum_{k=0}^{r_{m,j}-2} P_{R_m, A_m}^{(m,j, k)} \mathcal{Q}_{R_m, A_m}^{(m,j, n-t_m+k+1)} (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{m-1})^{t_{m-1}} (x-x_m)^{k+1}$$

et

$$(4.47) \quad S_{m,j}^{(2)} = P_{R_m, A_m}^{(m,j, r_{m,j}-1)} \mathcal{Q}_{R_m, A_m}^{(m,j, n-t_m)} (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{m-1})^{t_{m-1}} (x-x_m)^{r_{m,j}-1}$$

Si nous calculons la somme $\sum_{j=0}^{r_m-1} S_{m,j}$ on remarque que pour $j = r_m-1$ il résulte $k \in \{0, \dots, r_m-j-2\} = \emptyset$. En outre, les égalités suivantes sont évidemment vérifiées:

$$(4.48) \quad \left[P_{R_m, A_m}^{(m,j, k)} \right]^{(t_m-1)} = P_{R_m, A_m}^{(m,j, k)} = \binom{t_1+\alpha_1-1}{\alpha_1} \dots \binom{t_{m-1}+\alpha_{m-1}-1}{\alpha_{m-1}}$$

De même

$$(4.49) \quad \left[\mathcal{Q}_{R_m, A_m}^{(m,j, n-t_m+k)} \right]^{(x_m, -1)} = \mathcal{Q}_{R_i, A_i}^{(m,j, n-t_m+k+1)}$$

pour chaque $k \in \{0, \dots, r_m-j-2\}$ et $j \in \{0, \dots, r_m-2\}$.

L'égalité (4.49) résulte du fait qu'on a pour chaque $x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ la relation suivante:

$$\left[\omega^{-1} \left(\frac{x_1}{t_1+\alpha_1}, \dots, \frac{x_{m-1}}{t_{m-1}+\alpha_{m-1}}; x \right) \right]^{(x_m, -1)} = \omega^{-1} \left(\frac{x_1}{t_1+\alpha_1}, \dots, \frac{x_{m-1}}{t_{m-1}+\alpha_{m-1}}; x \right);$$

égalité vérifiée également pour $x = x_m$.

De (4.45)-(4.49) et des remarques faites ci-dessus on déduit que:

$$\begin{aligned}
 (4.50) \quad & \sum_{j=0}^{t_m-1} S_{m,j} = \\
 & = \sum_{j=0}^{(t_m-1)-1} \sum_{k=0}^{(t_m-1)-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} [P_{R_m, A_m}^{(m,j,k)}]^{(t_m-1)} [Q_{R_m, A_m}^{(m,j,n-t_m+k)}]^{(x_{m-1})} \\
 & \quad \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{m-1})^{t_{m-1}} (x-x_m)^{k+j} + \\
 & + \sum_{j=0}^{t_m-1} \sum_{\delta(A_i)=t_m-j-1} P_{R_m, A_m}^{(m,j,t_m-j-1)} Q_{R_m, A_m}^{(m,j,n-j)} (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{m-1})^{t_{m-1}} (x-x_m)^{t_m-1}
 \end{aligned}$$

De (4.34), (4.39), (4.44) et (4.50) on déduit que:

$$\begin{aligned}
 (4.51) \quad & H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) = \\
 & = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{t_i-1} \sum_{k=0}^{t_i-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} [P_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}]^{(t_m-1)} [Q_{R_i, A_i}^{(i,j,n-t_i+k)}]^{(x_{m-1})} \\
 & \quad \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{i-1})^{t_{i-1}} (x-x_i)^k (x-x_{i+1})^{t_{i+1}} \dots (x-x_m)^{t_m-1} (x-x_i)^j + \\
 & + \sum_{j=0}^{(t_m-1)-1} \sum_{k=0}^{(t_m-1)-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} [P_{R_m, A_m}^{(m,j,k)}]^{(t_m-1)} [Q_{R_m, A_m}^{(m,j,n-t_m+k)}]^{(x_{m-1})} \\
 & \quad \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{m-1})^{t_{m-1}} (x-x_m)^{k+j} + \\
 & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{t_i-1} \sum_{\delta(A_i)=t_i-j-1} P_{R_i, A_i}^{(i,j,t_i-j-1)} Q_{R_i, A_i}^{(i,j,n-j)} \\
 & \quad \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{i-1})^{t_{i-1}} (x-x_i)^{t_i-j} (x-x_{i+1})^{t_{i+1}} \dots (x-x_m)^{t_m} (x-x_i)^j + \\
 & + \sum_{j=0}^{t_m-1} \sum_{\delta(A_i)=t_m-j-1} P_{R_m, A_m}^{(m,j,t_m-j-1)} Q_{R_m, A_m}^{(m,j,n-j)} (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{m-1})^{t_{m-1}} (x-x_m)^{t_m-1}
 \end{aligned}$$

Mais on déduit de (4.34)

$$\begin{aligned}
 (4.52) \quad & H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) = \\
 & = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{t_i-1} \sum_{k=0}^{t_i-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} [P_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}]^{(t_m-1)} [Q_{R_i, A_i}^{(i,j,n-t_i+k)}]^{(x_{m-1})} \\
 & \quad \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{i-1})^{t_{i-1}} (x-x_i)^k (x-x_{i+1})^{t_{i+1}} \dots (x-x_m)^{t_m-1} (x-x_i)^j + \\
 & + \sum_{j=0}^{(t_m-1)-1} \sum_{k=0}^{(t_m-1)-j-1} \sum_{\delta(A_i)=k} [P_{R_m, A_m}^{(m,j,k)}]^{(t_m-1)} [Q_{R_m, A_m}^{(m,j,n-t_m+k)}]^{(x_{m-1})} \\
 & \quad \cdot (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{m-1})^{t_{m-1}} (x-x_m)^{k+j}
 \end{aligned}$$

De (4.34), (4.35) et (4.52) il résulte la relation (4.33). Le théorème est donc démontré.

REMARQUE. Si nous tenons compte du fait que les applications $Q_{R_i, A_i}^{(i,j,n-t_i+k+1)}$ sont symétriques par rapport aux premiers $n-r_1+k$ arguments nous déduisons que nous pouvons raisonner relativement à chaque noeud $x_1, \dots, x_{m-1}$ d'une manière analogue à celle employée au cas du noeud x_m . Alors on a l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}
 (4.53) \quad & H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) = H_{n-1}(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_m; f)(x) \\
 & + [x_1, \dots, x_m; f]_1^0 (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_{p-1})^{t_{p-1}} (x-x_p)^{t_p-1} (x-x_{p+1})^{t_{p+1}} \dots (x-x_m)^{t_m}
 \end{aligned}$$

pour chaque $p \in \{1, \dots, m\}$.

COROLLAIRE 4.6. Si les conditions du théorème 4.5. sont remplies, le $(\varphi - B)$ polynôme abstrait d'interpolation de type Hermite peut s'écrire sous la forme de Newton:

$$\begin{aligned}
 (4.54) \quad & H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) = \\
 & = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{t_i+1} [x_1, \dots, x_i, x_{i+1}; f]_2^0 (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_i)^{t_i} (x-x_{i+1})^j
 \end{aligned}$$

pour chaque $r_1 + \dots + r_m = n+1$; $n \in \mathbb{N}$; $x_1, \dots, x_m \in X_0$; $i, j = \overline{1, m}$; $i \neq j$.

La relation (4.54) résulte évidemment de l'égalité (4.34) écrite pour $m = i+1$, $r_m = j+1$, $n = s = r_1 + \dots + r_{i+1} + j$, où $j = \overline{1, r_{i+1}}$; $i = \overline{0, m-1}$. En ajoutant terme à terme les égalités obtenues en faisant prendre à j les valeurs $1, 2, \dots, r_{i+1}$ et ensuite à i les valeurs $1, 2, \dots, m-1$, il résulte l'égalité (4.54).

Nous établirons pour terminer le théorème suivant:

THÉOREME 4.7. Si les conditions du théorème 4.5. sont remplies, alors on a l'égalité suivante qui s'appelle formule d'interpolation de type Hermite:

$$(4.55) \quad f(x) = H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) + \left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_m, x \\ t_1, \dots, t_m, 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_m)^{t_m}$$

pour chaque $x \in X$; $r_1 + \dots + r_m = n+1$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1 \in X$; $i = \overline{1, m}$.

Démonstration. Nous emploierons la méthode de l'induction mathématique.

Pour $m = 1$ l'égalité (4.55) devient:

$$(4.56) \quad f(x) = H_{r_1-1}(x_1; f)(x) + \left[\begin{matrix} x_1, x \\ t_1, 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{t_1}$$

La relation (3.51) montre que :

$$\text{Mais } H_{r_1-1}(x_1; f)(x) = \sum_{j=0}^{r_1-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_1) (x-x_1)^j$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} x_1, x \\ 1, 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1) &= \left[\begin{matrix} x_1, x \\ 1, 1 \end{matrix} ; f \right] (x-x_1) = f(x) - f(x_1) = \\ &= f(x) - H_0(x_1; f)(x) \end{aligned}$$

et ainsi nous pouvons déduire que la relation (4.56) est vérifiée pour $r_1 = 1$.

Supposons maintenant que cette relation est vérifiée pour $r_1 = 1$. En tenant compte de (4.13) il en résulte

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} x_1, x \\ l+1, 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{l+1} &= \left\{ \left[\begin{matrix} x_1, x \\ l+1, 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1) \right\} (x-x_1)^l = \\ &= \left[\begin{matrix} x_1, x \\ l, 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^l - \left[\begin{matrix} x_1 \\ l+1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1) = f(x) - H_{l+1}(x_1; f)(x) - \\ &- \frac{1}{l!} f^{(l)}(x_1) (x-x_1)^l = f(x) - H_l(x_1; f)(x) \end{aligned}$$

donc la relation (4.56) est vérifiée aussi pour $r_1 = l+1$ et à cause du principe de l'induction mathématique cette relation a lieu pour chaque $r_1 \in \mathbb{N}$. Cette relation représente en réalité l'égalité (4.55) pour $m = 1$.

Supposons que la relation (4.55) est vérifiée pour $m = p$. En ce cas, nous démontrerons que:

$$(4.57) \quad f(x) = H_{m+q}(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}; f)(x) + \left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, x \\ t_1, \dots, t_p, q, 1 \end{matrix} ; f \right]_3^0 (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_p)^{t_p} (x-x_{p+1})^q$$

pour chaque $q \in \mathbb{N}$; $n = r_1 + \dots + r_{p+q} - 1$.

De la définition des différences divisées (4.33) et de (4.1) il résulte l'égalité suivante:

$$(4.58) \quad \left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, x \\ t_1, \dots, t_p, q, 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{t_1} \dots (x-x_p)^{t_p} (x-x_{p+1})^q$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\Delta(A_i)=r_i-j-1} P_{R_i, A_i}^{(i,j), r_i-j-1} A_{n-j+3}((x-x_1)^{r_1}, \dots, (x-x_{i-1})^{r_{i-1}}, (x-x_i)^r, (x-x_{i+1})^{r_{i+1}}, \dots, (x-x_p)^{r_p}, (x-x_{p+1}), \sum_{i,p+2,i}^{-1} f^{(j)}(x_i)(x-x_i)^j) + A_{n+3}((x-x_1)^{r_1}, \dots, (x-x_p)^{r_p}, (x-x_{p+1}), \sum_{i,p+2,p+1}^{-1} f(x_{p+1}) + \sum_{i,p+2,p+1}^{-1} f(x))$$

A cause de la symétrie des applications multilinéaires A_{n-j+3} et A_{n+3} , il en résulte la relation suivante:

$$(4.59) \quad \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & x \\ r_1 & \dots & r_p & 1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} (x-x_{p+1}) = \left\{ \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & x \\ r_1 & \dots & r_p & 1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_{p+1}) \right\} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p}$$

En employant la relation (4.13), au cas du premier membre de l'égalité (4.59) on obtient l'expression:

$$(4.60) \quad \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x & f \\ r_1 & \dots & r_p & 1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} - \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & f \\ r_1 & \dots & r_p & 1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p}$$

Si nous tenons compte de l'hypothèse vérifiée pour $m = p$ et de la relation (4.33), nous pouvons déduire les égalités suivantes:

$$(4.61) \quad \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & x \\ r_1 & \dots & r_p & 1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} (x-x_{p+1}) = f(x) - H_n \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p \\ r_1 & \dots & r_p \end{matrix} ; f \right)(x) - \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} \\ r_1 & \dots & r_p & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} =$$

$$= f(x) - H_{n+1} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} \\ r_1 & \dots & r_p & 1 \end{matrix} ; f \right)(x)$$

Donc la relation (4.57) est vérifiée pour $q = 1$.

Supposons maintenant que la relation (4.57) est vérifiée pour $q = s$. Si nous employons un raisonnement similaire à celui utilisé pour établir les égalités (4.59)-(4.61) nous obtenons les relations suivantes:

$$(4.62) \quad \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & x \\ r_1 & \dots & r_p & s+1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} (x-x_{p+1})^{s+1} = \left\{ \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & x \\ r_1 & \dots & r_p & s+1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_{p+1}) \right\} (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} (x-x_{p+1})^s = \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & x \\ r_1 & \dots & r_p & s & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} (x-x_{p+1})^s = f(x) - H_{n+s} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} \\ r_1 & \dots & r_p & s \end{matrix} ; f \right)(x) - \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} \\ r_1 & \dots & r_p & s+1 \end{matrix} ; f \right]_3^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} (x-x_{p+1})^s = f(x) - H_{n+s+1} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} \\ r_1 & \dots & r_p & s+1 \end{matrix} ; f \right)(x)$$

On déduit de (4.62)

$$(4.63) \quad f(x) = H_{n+s+1} \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p \\ r_1 & \dots & r_p \end{matrix} ; f \right)(x) + \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & x \\ r_1 & \dots & r_p & s+1 & 1 \end{matrix} ; f \right]_2^0 (x-x_1)^{r_1} \dots (x-x_p)^{r_p} (x-x_{p+1})^{s+1}$$

et cette égalité nous montre que la relation (4.57) est vérifiée pour $q = s+1$. En vertu du principe de l'induction mathématique, nous déduisons donc que la relation (4.57) est vérifiée pour chaque q et en particulier aussi pour $q = r_{p+1}$. La relation (4.57) pour $q = r_{p+1}$ exprime le fait que la relation (4.55) est vérifiée pour

$m = p+1$. En appliquant à nouveau le principe de l'induction mathématique il résulte que la relation (4.55) est vérifiée pour chaque $m \in \mathbb{N}$. Le théorème est donc démontré.

Tous les résultats obtenus dans ces premières deux parties de ce travail seront employés dans la troisième et dernière partie, pour obtenir des méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires et à l'étude de la convergence des ces méthodes itératives.

B I B L I O G R A P H I E

1. DIACONU A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives obtenues par l'interpolation inverse (I) ; Preprint Nr.4-1981; "Babeş-Bolyai" Univ., Fac. of Math., Research Sem.
2. DIACONU A., Sur quelques propriétés des dérivées de type Fréchet d'ordre supérieur ; Preprint Nr.1-1983; "Babeş-Bolyai" Univ. Fac. of Math., Research Sem.
3. DIACONU A., Metode iterative pentru rezolvarea ecuațiilor ; Teză de doctorat, Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică, 1983.
4. POPOVICIU T., Introduction à la théorie des différences divisées ; Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, 42, 1(1940), 65-78.
5. STANCU D.D., Asupra formulei de interpolare a lui Hermite și a unor aplicații ale acesteia, Studii și cercetări de matematică, (Cluj), 8, 3-4 (1957), 339-355.
6. KNOAP H.B., On Hermite Interpolation in Normed Vector Spaces; Journal of Approximation Theory 11., 327-337(1974).