

Flows, AMD Vol. 34, 1979, 91-104.

5. Christies, I., Griffiths, D.F., Mitchell, A.R., Zienkiewicz, O.C.,

Finite Element Methods for Second Order
Differential Equations with Significant
First Derivatives,

International Journal for Numerical Methods
in Engineering, Vol. 10, 1976, 1389-1396.

6. Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S., Zienkiewicz, O.C., An "Upwind"

Finite Element Scheme for Two-Dimensional
Convective Transport Equation,

International Journal for Numerical Methods
in Engineering, Vol. 11, 1977, 131-143.

7. Mitchell, A.R., Wait, R., The Finite Element Method in Partial

Differential Equations, (russian)

Izd. "Mir" Moskva, 1981.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics

Research Seminars

Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods

Preprint Nr. 1, 1985, pp. 21 - 70.

INTERPOLATION DANS LES ESPACES ABSTRAITS. MÉTHODES
ITÉRATIVES POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRA-
TIONNELLES OBTENUES PAR L'INTERPOLATION INVERSE. III

Adrian Diaconu

Ce travail clôt la série commencée par [1], [3], en ce qui concerne l'extension de la notion de polynôme d'interpolation au cas d'une application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$; où X et Y sont des espaces linéaires et l'utilisation du polynôme abstrait d'interpolation pour obtenir des méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires.

Dans le travail [1] nous avons indiqué une méthode pour étendre le polynôme d'interpolation dans le cas des noeuds simples, en partant de l'expression de Lagrange du polynôme d'interpolation. Remarquons que par l'extension obtenue on conserve la plupart des propriétés connues dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle. En outre la méthode utilisée nous fournit la possibilité de traiter le cas des noeuds multiples, en obtenant de cette manière l'extension du polynôme d'interpolation de Hermite. Ce dernier cas fait l'objet du travail [3].

Ce travail est réservé à l'application des résultats de [1], [3] qui permet d'obtenir des méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles, pour étudier la convergence et aussi l'ordre de convergence des ces méthodes.

Les paragraphes du travail traitent des sujets suivants. Dans le premier paragraphe nous présenterons succinctement les principaux résultats obtenus en [1] et [3]; résultats nécessaires par la suite. Compte tenu du fait que dans la construction des méthodes itératives intervient la fonction inverse et ses dérivées de divers ordres, dans le deuxième paragraphe on indiquera la manière d'obtenir la dérivée d'ordre n de l'application inverse d'une application non-linéaire, résultat obtenu en [2]. Dans le troisième paragraphe on indiquera la méthode de la construction de la méthode itérative générale, méthode qui emploie l'interpolation inverse. Dans le quatrième paragraphe on établit le théorème de convergence de la méthode générale et on étudie quelques cas particuliers. Dans le cinquième paragraphe nous étudierons les méthodes itératives de type Tschébycheff, c'est-à-dire les méthodes qui s'obtiennent par l'interpolation inverse en utilisant un seul noeud d'interpolation. Dans le sixième paragraphe on étudie une certaine classe des opérateurs itératifs.

§ 1. Polynômes abstraits d'interpolation. Considérons l'application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$, où $(X, +, \cdot)$ et $(Y, +, \cdot)$ sont des espaces linéaires.

La méthode utilisée pour la construction du polynôme abstrait d'interpolation de type Lagrange et aussi de celui de type Hermite est basée sur l'application bilinéaire $B: Y \times Y \rightarrow Y$, qui vérifie les conditions suivantes:

$$(1.1) \quad \begin{cases} B(u, v) = B(v, u) & \text{pour chaque } u, v \in Y \\ B(B(u, v), w) = B(u, B(v, w)) & \text{pour chaque } u, v, w \in Y, \end{cases}$$

c'est-à-dire B détermine sur Y une structure de demi-groupe commutative.

En outre considérons remplies les conditions suivantes:

A_1) Le demi-groupe (Y, B) admet un élément neutre u_0 . Il existe

$Y_0 \subseteq Y$ tel que (Y_0, B) forme un groupe et $u_0 \in Y_0$.

A_2) Il existe $X_0 \subseteq X$ et l'application bijective $\varphi_0: X_0 \rightarrow Y_0$;

A_3) Il existe une application linéaire $\varphi: X \rightarrow Y$ avec la propriété $\varphi|_{X_0} = \varphi_0$;

A l'aide des applications φ et B on construit la suite des applications $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $A_n: X^n \rightarrow Y$ telles que :

$$(1.2) \quad \begin{cases} A_1(u) = \varphi(u) & \text{pour chaque } u \in X \\ A_n(u_1, \dots, u_n) = B(A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), \varphi(u_n)), \end{cases}$$

pour chaque $u_i \in X$; $i = \overline{1, n}$.

Dans la suite nous désignerons par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et continues définies sur l'espace linéaire et normé X et à valeurs dans l'espace similaire Y . En outre nous désignerons par $\mathcal{L}_n(X, Y) = \mathcal{L}(X, \mathcal{L}_{n-1}(X, Y))$ avec $\mathcal{L}_0(X, Y) = Y$, l'ensemble des applications n -linéaires définies sur X^n à valeurs en Y .

On remarque facilement que le n -ième terme de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (1.2) est une application n -linéaire.

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a été construite à l'aide de l'application linéaire φ et de l'application bilinéaire B . A l'aide de cette suite nous pouvons définir la notion de $(\varphi-B)$ monôme et la notion de $(\varphi-B)$ polynôme.

Définition 1.1. On appelle $(\varphi-B)$ monôme du n -ième degré, $n \geq 1$, une application $M_n: X \rightarrow Y$ définie par l'égalité :

$$(1.3) \quad M_n(x) = A_n(x, x, \dots, x),$$

où $A_n: X^n \rightarrow Y$ est l'application n -linéaire introduite par (1.2).

On appelle $(\varphi-B)$ polynôme du n -ième degré, une application $P: X \rightarrow Y$ définie par

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n B(a_k, M_k(x))$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$ et $M_k : X \rightarrow Y$ est le $(\varphi-B)$ monôme du k -ième degré, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Considérons maintenant l'application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$; X et Y étant des espaces linéaires et normés. Le problème général d'interpolation s'énonce de la manière suivante:

(I) Etant donnés les éléments $x_1, \dots, x_m \in X$, les nombres $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ et les applications $f^{(j)}(x_i) \in L_j(X, Y)$ pour chaque $j = \overline{0, r_i - 1}$ et $i = \overline{1, m}$, on demande de déterminer un $(\varphi-B)$ polynôme $P: X \rightarrow Y$ de degré minimal tel que : $P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$ pour chaque $j = \overline{0, r_i - 1}$ et $i = \overline{1, m}$.

Pour donner une solution à ce problème considérons l'application de $L(X, Y)$ désignée par

$$\omega \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m \end{matrix} \right)$$

et définie par la relation suivante:

$$(1.5) \quad \omega \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m \end{matrix}; x \right) h = A_{p_1 + \dots + p_m + 1}((x-x_1)^{p_1}, \dots, (x-x_m)^{p_m}, h).$$

Si nous supposons que $x - x_i \in X_0$ et que les conditions $A_1) - A_3)$ sont remplies, nous déduisons que l'application définie par (1.5) représente une bijection de X_0 en Y_0 . L'inverse de cette bijection définie sur Y_0 peut se prolonger par linéarité et par continuité à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$. Donc on peut considérer l'application $g: X \rightarrow L(\overline{\text{sp}(Y_0)}, X)$ définie par :

$$(1.6) \quad g(x) = \omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ p_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ p_m \end{matrix}; x \right)$$

où par ω^{-1} nous avons désigné l'extension à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$ de l'inverse de l'application définie par (1.5).

Considérons maintenant les éléments $x_1, \dots, x_m \in X$ et $r_1, \dots$

$\dots, r_m \in \mathbb{N}$ mentionnés dans l'énoncé du problème (I). En tenant compte des notations et des affirmations faites ci-dessus, nous pouvons considérer les applications $\Omega_{1,m,i} \in L(X, Y)$ définies par la relation suivante:

$$(1.7) \quad \Omega_{1,m,i} = \omega \left(\begin{matrix} x_1 \\ k_1 + \alpha_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_{i-1} \\ k_{i-1} + \alpha_{i-1} \end{matrix}, \begin{matrix} x_{i+1} \\ k_{i+1} + \alpha_{i+1} \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ k_m + \alpha_m \end{matrix}; x_i \right)$$

où $i \in \{1, \dots, m\}$. Dans (1.7) $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$ sont des nombres naturels arbitraires. Nous désignons en suite par $\Omega_{1,m,i}^{-1}$ l'extension à $\overline{\text{sp}(Y_0)}$ de l'inverse de l'application définie par (1.7).

A titre de solution du problème général d'interpolation (I) on a le théorème suivant :

THEOREME 1.1. Si $x_1 - x_j \in X_0$ pour chaque $i, j = \overline{1, m}$; $i \neq j$, $f^{(j)}(x_i) \in L_j(X, \overline{\text{sp}(Y_0)})$ pour chaque $j = \overline{1, r_i - 1}$; $i = \overline{1, m}$ et si les conditions $A_1) - A_3)$ sont remplies, alors il existe un $(\varphi-B)$ polynôme de degré $n = r_1 + \dots + r_m - 1$ qui remplit les conditions du problème (I). L'expression de ce $(\varphi-B)$ polynôme est:

$$(1.8) \quad H_n \left(\begin{matrix} x_1 \\ k_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ k_m \end{matrix}; f \right)(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{k_i-j-1} \frac{(-1)^k}{j!} E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i, j, k)}(x)$$

où

$$(1.9) \quad E_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m}^{(i, j, k)}(x) = \binom{k_1 + \alpha_1 - 1}{\alpha_1} \dots \binom{k_{i-1} + \alpha_{i-1} - 1}{\alpha_{i-1}} \binom{k_{i+1} + \alpha_{i+1} - 1}{\alpha_{i+1}} \dots \binom{k_m + \alpha_m - 1}{\alpha_m}$$

$A_{n-k_i+k-2}((x-x_1)^{k_1}, \dots, (x-x_{i-1})^{k_{i-1}}, (x-x_i)^k, (x-x_{i+1})^{k_{i+1}}, \dots, (x-x_m)^{k_m}) \Omega_{1,m,i}^{-1} f(x_i) (x-x_i)^j$
Par analogie avec le cas de l'interpolation des fonctions réelle

le $(\varphi-B)$ polynôme défini par (1.8) - (1.9) s'appellera $(\varphi-B)$ polynôme d'interpolation de type Hermite.

Si nous supposons $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$, nous nous plaçons dans le cas de l'interpolation à noeuds simples. En ce cas on a:

$$(1.10) \quad \Omega_{1,m,i} h = A_m(x_1-x_1, \dots, x_1-x_{i-1}, x_1-x_{i+1}, \dots, x_1-x_m, h);$$

$h \in X$ et on constate facilement que:

$$(1.11) \quad H_{m-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ 1 \end{matrix}; f \right)(x) = \sum_{i=1}^m A_m(x-x_1, \dots, x-x_{i-1}, x-x_{i+1}, \dots, x-x_m, \Omega_{1,m,i}^{-1} f(x_i))$$

Cette dernière expression s'appellera $(\varphi-B)$ polynôme d'interpolation de type Lagrange.

En outre, dans le cas $m = 1$, donc dans le cas d'un seul noeud d'interpolation, on constate le fait que pour obtenir un $(\varphi-B)$ polynôme du n -ième degré il est nécessaire de choisir d'ordre de multiplicité de x_0 égal à $n+1$. En ce cas l'application $\Omega_{1,m,i}$ devient l'application identique. En outre $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m\} = \emptyset$ et alors l'égalité $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k$, implique $k = 0$ auquel cas, nous deduisons de (1.8) - (1.9) l'égalité suivante:

$$(1.12) \quad H_n \left(\begin{matrix} x_0 \\ n+1 \end{matrix}; f \right)(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x-x_0)^j$$

Par analogie avec le cas des fonctions réelles l'expression donnée par (1.12) s'appellera $(\varphi-B)$ polynôme de type Taylor.

Nous introduisons maintenant les différences divisées abstraites aux noeuds multiples. Pour abréger l'écriture nous désignerons par R_i et A_i les systèmes de nombres entières et non-négatifs $(r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_m)$, respectivement $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)$ et par $s(A_i)$ la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m$.

Considérons d'abord l'application $\omega \left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; x \right) \in \mathcal{L}(X, Y)$

donnée par (1.5), à l'aide de laquelle nous introduisons l'application

$$D_{k,j} \left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; x, y; f \right) \in \mathcal{L}_{k+j}(X, Y)$$

définie par l'égalité suivante:

$$(1.13) \quad D_{k,j} \left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; x, y; f \right) h_1 \dots h_{k+j} = A_{k+j} \left(\begin{matrix} h_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} h_{k+j} \\ r_{k+j} \end{matrix}, \omega^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; x \right) f^{(j)}(y) h_{k+1} \dots h_{k+j} \right)$$

où $f^{(j)}(y) \in \mathcal{L}_j(X, Y)$. Ces applications s'appelleront différences divisées élémentaires. Nous employons la notation abrégée $\mathcal{D}_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}$ pour la différence divisée élémentaire suivante:

$$D_{k,j} \left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 + \alpha_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_{i-1} \\ r_{i-1} + \alpha_{i-1} \end{matrix}, \begin{matrix} x_i \\ r_i + \alpha_i \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m + \alpha_m \end{matrix}; x_i, x_i; f \right)$$

En outre nous désignons par $P_{R_i, A_i}^{(i,j,k)}$ l'expression:

$$\frac{(-1)^k}{j!} \binom{r_1 + \alpha_1 - 1}{\alpha_1} \dots \binom{r_{i-1} + \alpha_{i-1} - 1}{\alpha_{i-1}} \binom{r_i + \alpha_i - 1}{\alpha_i} \dots \binom{r_m + \alpha_m - 1}{\alpha_m}$$

Définition 1.2. On appelle différence divisée abstraite de la fonction $f: X \rightarrow Y$ sur les noeuds $x_1, \dots, x_m$ aux ordres de multiplicité $r_1, \dots, r_m$, une application

$$\left[\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; f \right] \in \mathcal{L}_n(X, Y)$$

définie par l'égalité suivante:

$$(1.14) \quad \left[\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; f \right] h_1 \dots h_n =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{h_i-1} \sum_{\lambda(A_i)=h_i-j-1} P_{R_i, A_i}^{(i, j, h_i-j-1)} Q_{R_i, A_i}^{(i, j, h_i-j)} (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n)$$

où $(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n) = (h_1, \dots, h_{T_{1,j}}, h_{Q_1}, \dots, h_n, h_{T_{1,j}+1}, \dots, h_{T_{1,j}+j})$ et $T_{1,j} = r_1 + \dots + r_{i-1} + r_i - j - 1$; $Q_1 = r_1 + \dots + r_i$ (pour $i=m$ on a évidemment $h_{Q_m} = n+1$, donc en ce cas les arguments $h_{Q_m}, \dots, h_n$ n'interviennent pas).

On a le théorème suivant :

THEOREME 1.3. Si $Y = \text{sp}(Y_0)$ et les conditions $A_1) - A_3)$ sont remplies, alors les affirmations suivantes sont vraies:

j) les différences divisées (1.14) vérifient la relation de récurrence:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} & \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ h_1 & \dots & h_m \end{matrix} ; f \right] (x_s - x_t) = \\ & = \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_{t-1} & x_t & x_{t+1} & \dots & x_m \\ h_1 & \dots & h_{t-1} & h_t & h_{t+1} & \dots & h_m \end{matrix} ; f \right] - \\ & - \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_{s-1} & x_s & x_{s+1} & \dots & x_m \\ h_1 & \dots & h_{s-1} & h_s & h_{s+1} & \dots & h_m \end{matrix} ; f \right] \end{aligned}$$

où $t, s \in \{1, \dots, m\}$ sont distincts.

jj) les $(\varphi-B)$ polynômes abstraits d'interpolation de type Hermite vérifient la relation de récurrence suivante:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) &= H_{n-1}(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m; f)(x) + \\ &+ \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ h_1 & \dots & h_m \end{matrix} ; f \right] (x-x_1)^{h_1} \dots (x-x_{m-1})^{h_{m-1}} (x-x_m)^{h_m-1} \end{aligned}$$

jjj) le $(\varphi-B)$ polynôme abstrait d'interpolation de type Hermite peut s'écrire sous la forme de Newton:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) &= \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{h_i-1} \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_i & x_{i+1} \\ h_1 & \dots & h_i & h_{i+1} \end{matrix} ; f \right] (x-x_1)^{h_1} \dots (x-x_i)^{h_i} (x-x_{i+1})^{h_{i+1}-j} \end{aligned}$$

iv) on a l'égalité suivante qui s'appelle formule d'interpolation de type Hermite:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} f(x) &= H_n(x_1, \dots, x_m; f)(x) + \\ &+ \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m & x \\ h_1 & \dots & h_m & 1 \end{matrix} ; f \right] (x-x_1)^{h_1} \dots (x-x_m)^{h_m} \end{aligned}$$

(Dans les égalités j) - iv) on a $r_1 + \dots + r_m = n+1$; $n \in \mathbb{N}$; $x_i - x_j \in X_0$; $i, j = \overline{1, m}$).

La démonstration de ce théorème est donnée en [3].

Dans le cas particulier $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$ la définition de la différence divisée 1.2 nous donne:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} [x_1, \dots, x_m; f] h_1 \dots h_{m-1} &= \\ &= \sum_{i=1}^m A_m(h_1, \dots, h_{m-1}, [\omega'_m(x_i)]^{-1} f(x_i)) \end{aligned}$$

où par $\omega'_m(x_i)$ nous avons désigné l'application linéaire définie sur X aux valeurs en Y , par l'égalité

$$(1.20) \quad \omega'_m(x_i)h = A_m(x_i - x_1, \dots, x_i - x_{i-1}, x_i - x_{i+1}, \dots, x_i - x_m, h)$$

pour chaque $h \in X$ et $i \in \{1, \dots, m\}$.

En (1.19) nous employons la notation simplifiée $[x_1, \dots, x_m; f]$ pour

$$\left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ 1 & \dots & 1 \end{matrix} ; f \right]$$

Dans ce cas les égalités (1.15) deviennent

$$(1.21) \quad [x_1, \dots, x_m; f](x_s - x_t) = \\ = [x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_m; f] - [x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_m; f]$$

et la forme de type Newton du $(\varphi - B)$ polynôme d'interpolation qui résulte de (1.17) est:

$$(1.22) \quad L_{m-1}(x_1, \dots, x_m; f)(x) = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} [x_1, \dots, x_{i+1}; f](x - x_1) \dots (x - x_i)$$

§ 2. La dérivée d'ordre n de l'application inverse d'une application linéaire.

Dans le travail [2] nous avons donné une description de l'expression de la dérivée d'ordre n de l'application non-linéaire bijective $f: X \rightarrow Y$. Le résultat obtenu représente une extension du résultat de TUROWICZ [8], [9] relatif à la dérivée d'ordre n de la fonction inverse d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Pour énoncer ce résultat il est nécessaire d'introduire quelques notions.

Définition 2.1. Considérons les applications $A_i \in \mathcal{L}_{n_i}(X, Y)$; $i = \overline{1, k}$. On appelle couplage des applications multilinéaires $A_1, \dots, A_k$, l'application $A = [A_1, \dots, A_k]: X^n \rightarrow X^k$ définie par $A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_k)$ où $y_j = A_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_j}})$; $\ell = \overline{1, k}$ et $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_j}}\}_{j=\overline{1, k}}$ sont des ensembles disjoints, leur réunion étant l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Par dimension d'un couplage, nous entendrons le nombre des applications qui composent le couplage. Si $A = [A_1, \dots, A_k]$ nous

écrivons $\dim A = k$. En outre nous dirons que le rang de l'application A est n et nous écrivons $\text{rg}(A) = n$, si $A \in \mathcal{L}_n(X, Y)$.

Il en résulte qu'on peut composer deux couplages A et B , la composition étant celle de deux applications, au cas où $\dim A = \text{rg}(B_1) + \text{rg}(B_2) + \dots + \text{rg}(B_p)$ où $B = [B_1, \dots, B_p]$. L'application $C = B \circ A: X^n \rightarrow X^p$ s'appelle couplage composé de A et B .

Définition 2.2. L'application $T: X^n \rightarrow Y$ s'appelle enchaînement de couplages s'il existe $q \in \mathbb{N}$ et les couplages $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_q$ à $\dim \bar{A}_1 = 1$ et $\text{rg}(\bar{A}_1^1) + \dots + \text{rg}(\bar{A}_q^k) = n$ (au cas où $\bar{A}_q = [\bar{A}_q^1, \dots, \bar{A}_q^k]$), tels que $T = \bar{A}_1 \circ \bar{A}_2 \circ \dots \circ \bar{A}_q$.

La réunion des applications qui composent les couplages d'un enchaînement s'appellera l'ensemble des applications de l'enchaînement.

Définition 2.3. Considérons l'ensemble des applications multilinéaires $\{A_1, \dots, A_m\}$. On appelle $(i_1, \dots, i_m)$ enchaînement de couplages produit par $A_1, \dots, A_m$, un enchaînement pour lequel l'ensemble de ses applications contient l'application identique, l'application A_1 par i_1 fois, l'application A_2 par i_2 fois, etc.

En [2] nous avons démontré que le nombre des $(i_1, \dots, i_m)$ enchaînement de couplages produits par $\{A_1, \dots, A_m\}$ est égal à :

$$(2.1) \quad \frac{(i_1 a_1 + \dots + i_m a_m)!}{(a_1!)^{i_1} \dots (a_m!)^{i_m} i_1! \dots i_m!}$$

où $a_i = \text{rg}(A_i)$; $i = \overline{1, m}$.

En particulier l'ensemble générateur peut être choisi comme suit

$$(2.2) \quad \{[f'(x)]^{-1} f''(x), [f'(x)]^{-1} f'''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x)\}$$

et en ce cas nous désignerons par $\mathcal{J}_n^{[i_2, \dots, i_n]}(f; x)$ l'ensemble des $(i_2, \dots, i_n)$ enchaînement de couplages produits par (2.2).

Du fait que :

$$(2.3) \quad \operatorname{rg} ([f'(x)]^{-1} f^{(k)}(x)) = k ; \quad k = \overline{2, n},$$

il résulte en tenant compte de (2.1) que le nombre des éléments de $\mathcal{Y}_n^{[i_2, \dots, i_n]}(f; x)$ est :

$$(2.4) \quad \frac{(2i_2 + \dots + ni_n)!}{i_2! \dots i_n! (2!)^{i_2} \dots (n!)^{i_n}}$$

Tous les enchaînement de $\mathcal{Y}_n^{[i_2, \dots, i_n]}(f; X)$ sont considérés étant définis sur X^n aux valeurs en Y .

En [2] nous avons établi le théorème suivant :

THEOREME 2.4. Si l'application bijective $f : X \rightarrow Y$ admet des dérivées Fréchet symétriques au point $x \in X$ jusqu'à l'ordre n inclusivement, alors l'application $f^{-1} : Y \rightarrow X$ admet des dérivées Fréchet d'ordre n au point $y = f(x)$ et pour chaque $t_1, \dots, t_n \in \in Y$ on a :

$$(2.5) \quad (f^{-1}(y))^{(n)} t_1 t_2 \dots t_n = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{Y}_{n,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{n,k}^{[i_2, \dots, i_n]}(f, x)} (-1)^{n+k-1} F([f'(x)]^{i_2} t_1, \dots, [f^{(n)}(x)]^{i_n} t_n)$$

où $\mathcal{Y}_{n,k}$ représente l'ensemble des solutions du système :

$$(2.6) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + 3i_4 + \dots + (n-1)i_n = n-1 \\ i_2 + i_3 + i_4 + \dots + i_n = n-k-1 \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème a été donnée en [2].

On remarque facilement que le cas particulier $X = Y = R$ nous retrouvons le résultat de TUROWICZ [8] :

$$(2.7) \quad (f^{-1}(y))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{Y}_{n,k}} \frac{(2n-k-2)!}{i_2! \dots i_n! (f'(x))^{2n-k-2}} \left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{i_n}$$

En outre la relation (2.5) nous permet de donner une évaluation de la norme de l'application $f^{-1}(y)$. Cette délimitation est donnée par l'inégalité suivante:

$$(2.8) \quad \| [f^{-1}(y)]^{(n)} \| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{Y}_{n,k}} \frac{(2n-k-2)!}{i_2! \dots i_n!} \| [f'(x)]^{-1} \|^{2n-k-1} \left(\frac{\|f''(x)\|}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{\|f^{(n)}(x)\|}{n!}\right)^{i_n}$$

§ 3. Méthode de la construction de la méthode itérative générale

Dans ce paragraphe nous appliquerons la théorie d'interpolation pour obtenir des méthodes itératives qui seront utilisées pour approximer les solutions des équations.

Considérons deux espaces linéaires normées X et Y et une application $f : X \rightarrow Y$. Considérons aussi un ensemble $\mathcal{D} \subset X$ tel que l'application $f_1 : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ soit bijective ; par f_1 nous avons désigné la restriction de f à $\mathcal{D}$. Supposons aussi que θ (l'élément nul de Y) appartient à $f(\mathcal{D})$. Désignons par $f^{-1} : f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$ l'inverse de l'application f .

Supposons aussi que l'équation $f(x) = \theta$ admet la racine $\bar{x} \in \mathcal{D}$. Du fait que pour chaque $x \in \mathcal{D}$ on a l'égalité $f^{-1}(f(x)) = x$, il résulte que la racine $\bar{x}$ peut être exprimée par $\bar{x} = f^{-1}(\theta)$.

Considérons les points $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{D}$, distincts et désignons par y_i les points $y_i = f(x_i)$; $i = \overline{1, m}$. Du fait que f est bijective il résulte que les points $y_1, \dots, y_m$ sont distincts eux aussi.

Nous envisagerons le $(\varphi-B)$ polynôme d'interpolation de l'application f^{-1} relatif aux noeuds $y_1, \dots, y_m$, aux ordres de multiplicité égaux à $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ respectivement. Alors il résulte du théorème 1.3. que pour chaque $y \in f(\mathcal{D})$ on a l'égalité suivante:

$$(3.1) \quad f^{-1}(y) = H_n \left(\frac{y_1}{h_1}, \dots, \frac{y_m}{h_m}; f^{-1} \right)(y) + \\ + \left[\frac{y_1}{h_1}, \dots, \frac{y_m}{h_m}, \frac{y}{1}; f^{-1} \right] (y - y_1)^{h_1} (y - y_2)^{h_2} \dots (y - y_m)^{h_m}$$

Si nous supposons maintenant que $y = 0$ nous déduisons de (3.1) la relation suivante:

$$(3.2) \quad \bar{x} = H_n \left(\frac{f(x_1)}{h_1}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m}; f^{-1} \right)(\theta) + \\ + (-1)^{h_1 + \dots + h_m} \left[\frac{f(x_1)}{h_1}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m}, \theta; f^{-1} \right] f(x_1)^{h_1} \dots f(x_m)^{h_m}$$

Nous approximerons ainsi la racine $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ par l'élément $\tilde{x}$ donné par l'égalité suivante:

$$(3.3) \quad \tilde{x} = H_n \left(\frac{f(x_1)}{h_1}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m}; f^{-1} \right)(\theta) = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{h_i-1} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{h_i-j-1} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m = k} (-1)^{m+j-h_i+1} \cdot \\ \cdot \binom{h_1 + \alpha_1 - 1}{\alpha_1} \dots \binom{h_{i-1} + \alpha_{i-1} - 1}{\alpha_{i-1}} \binom{h_{i+1} + \alpha_{i+1} - 1}{\alpha_{i+1}} \dots \binom{h_m + \alpha_m - 1}{\alpha_m} \cdot \\ \cdot A_{n-h_i+k+2} \left(f(x_1), \dots, f(x_{i-1}), f(x_i)^k, f(x_{i+1}), \dots, f(x_m), \bar{\Omega}_{1,m,i}^{-1} D_{ij} \right)$$

où $\bar{\Omega}_{1,m,i} : Y \rightarrow X$ est l'application définie par l'égalité suivante:

$$(3.4) \quad \bar{\Omega}_{1,m,i} t = \omega \left(\frac{f(x_1)}{h_1 + \alpha_1}, \dots, \frac{f(x_{i-1})}{h_{i-1} + \alpha_{i-1}}, \frac{f(x_{i+1})}{h_{i+1} + \alpha_{i+1}}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m + \alpha_m}; x_i \right) t = \\ = A_{n-h_i+k+2} \left((f(x_i) - f(x_1))^{h_1 + \alpha_1}, \dots, (f(x_i) - f(x_{i-1}))^{h_{i-1} + \alpha_{i-1}}, \right. \\ \left. (f(x_i) - f(x_{i+1}))^{h_{i+1} + \alpha_{i+1}}, \dots, (f(x_i) - f(x_m))^{h_m + \alpha_m}, t \right)$$

et

$$(3.5) \quad D_{i,j} = (f^{-1}(y_i))^{(j)} \underbrace{f(x_1) \dots f(x_m)}_{=1} = \\ = \sum_{s=0}^{j-2} \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathcal{D}_{i,j} \\ F \in \sum_{j=0}^{j-2} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathcal{D}_{i,j}} (-1)^{j+i-1} F([f(x_1)]^{-1} f(x_1))^j}} \\ \text{où } \mathcal{D}_{i,j} \text{ est l'ensemble des solutions du système :}$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + \dots + (j-1)i_j = j-1 \\ i_2 + i_3 + \dots + i_j = j-1 \end{cases}$$

et $\mathcal{D}_s^{[i_2, \dots, i_j]}(f, x_1)$ est l'ensemble introduit au paragraphe précédent.

Nous supposons par la suite que:

$$(3.7) \quad \left\| \left[\frac{f(x_1)}{h_1}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m}, \theta; f^{-1} \right] \right\| \leq K$$

pour chaque $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{D} \subset X$.

De (3.1) et (3.7) on déduit que :

$$(3.8) \quad \|\bar{x} - \tilde{x}\| \leq K \|f(x_1)\|^{r_1} \dots \|f(x_m)\|^{r_m}.$$

Si $x_1, \dots, x_m$ sont suffisamment proches de $\bar{x}$, alors les nombres $\|f(x_1)\|, \|f(x_2)\|, \dots, \|f(x_m)\|$ ont des valeurs petites, et la produit qui figure au deuxième membre de l'inégalité (3.8) sera suffisamment petit pour justifier le choix de $\tilde{x}$ comme une approximation de $\bar{x}$.

Nous construisons maintenant une méthode itérative générale pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ à l'aide du $(\varphi - B)$ polynôme d'interpolation de Hermite.

Dans ce but considérons comme valeurs initiales les points $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathcal{A}$. En partant des ces valeurs nous construisons la suite $(x_s)_{s \in \mathbb{N}}$ par la relation :

$$(3.9) \quad x_{m+p+1} = H_n \left(\frac{f(x_{p+1})}{h_1}, \dots, \frac{f(x_{p+m})}{h_m}; f^{-1}(\theta) \right)$$

et $p = 0, 1, \dots$.

Dans le paragraphe suivant nous étudierons la convergence de la méthode (3.9) et nous envisagerons aussi quelques cas particuliers.

§ 4. Théorème général de convergence. Quelques cas particuliers.

Relativement à la convergence de la suite $(x_s)_{s \in \mathbb{N}}$ fournie par (3.9) on a le théorème suivant:

THEOREME 4.1. Si l'équation $f(x) = \theta$ admet la solution $\bar{x} \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ étant un ensemble convexe) et les points initiaux $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{D}$ de la méthode itérative (3.9) sont choisis tels que :

$$(4.1) \quad \|\bar{x} - x_i\| < \frac{1}{\sqrt[n]{K\beta^{n+1}}} \quad ; \quad i = \overline{1, m}$$

où K est la constante donnée par (3.7) et $\beta = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f'(x)\|$, alors la suite fournie par (3.9) converge vers $\bar{x}$ et :

$$(4.2) \quad \|\bar{x} - x_s\| \leq \frac{1}{\sqrt[n]{K\beta^{n+1}}} d^{\alpha^{s-1}} \quad ; \quad s \in \mathbb{N}$$

où α est la racine positive unique de l'équation:

$$(4.3) \quad t^m - r_m t^{m-1} - r_{m-1} t^{m-2} - \dots - r_2 t - r_1 = 0$$

et

$$(4.4) \quad d = \max_{i=\overline{0, m-1}} \left\{ \left(\sqrt[n]{K\beta^{n+1}} \|\bar{x} - x_{i+1}\| \right)^{\frac{1}{\alpha^i}} \right\}$$

Démonstration. De la relation (3.8) nous déduisons que les ter-

mes de la suite $(x_s)_{s \in \mathbb{N}}$ vérifient l'inégalité suivante :

$$(4.5) \quad \|\bar{x} - x_{m+p+1}\| \leq K \|f(x_{p+1})\|^{h_1} \|f(x_{p+2})\|^{h_2} \dots \|f(x_{p+m})\|^{h_m}$$

pour chaque $p = 1, 2, \dots$.

Du fait que la fonction f admet une dérivée de type Fréchet d'ordre ≥ 1 et en tenant compte que la formule des accroissements finis s'établit aussi au cas des fonctions qui établissent une correspondance entre des espaces linéaires normés (voir par exemple [7] pp. 20) il résulte que:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \|f(x_{p+i})\| &= \|\theta - f(x_{p+i})\| = \|f(\bar{x}) - f(x_{p+i})\| \leq \\ &\leq \sup_{\theta \in [0, 1]} \|f'(\bar{x} + \theta(x_{p+i} - \bar{x}))\| \cdot \|\bar{x} - x_{p+i}\| \leq \beta \|\bar{x} - x_{p+i}\| \end{aligned}$$

pour chaque $i = 1, 2, \dots$.

De (4.5) et (4.6) on déduit que :

$$(4.7) \quad \|\bar{x} - x_{m+p+1}\| \leq K\beta^{n+1} \|\bar{x} - x_{p+1}\|^{h_1} \dots \|\bar{x} - x_{p+m}\|^{h_m}$$

où nous envisagé l'égalité $r_1 + \dots + r_m = n + 1$.

En multipliant les termes de l'inégalité (4.7) par $\sqrt[n]{K\beta^{n+1}}$ on déduit :

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \sqrt[n]{K\beta^{n+1}} \|\bar{x} - x_{m+p+1}\| &\leq (K\beta^{n+1})^{\frac{n+1}{n}} \prod_{i=1}^m \|\bar{x} - x_{p+i}\|^{h_i} = \\ &= \left(\sqrt[n]{K\beta^{n+1}} \right)^{h_1 + \dots + h_m} \prod_{i=1}^m \|\bar{x} - x_{p+i}\|^{h_i} = \prod_{i=1}^m \left(\sqrt[n]{K\beta^{n+1}} \|\bar{x} - x_{p+i}\| \right)^{h_i} \end{aligned}$$

Nous désignerons maintenant par ρ_k ; $k = 1, 2, \dots$, l'expression $\sqrt[n]{K\beta^{n+1}} \|\bar{x} - x_k\|$; $k = 1, 2, \dots$. De l'inégalité (4.8) il résulte que:

$$(4.9) \quad \rho_{m+p+1} \leq \rho_{p+1}^{h_1} \rho_{p+2}^{h_2} \dots \rho_{p+m}^{h_m}$$

A cause des hypothèses (4.1) et (4.4) nous déduisons

$$(4.10) \quad \rho_k \leq d^{\alpha^{k-1}} \quad ; \quad k=1,2,\dots,m$$

Nous démontrerons que l'inégalité (4.10) est vérifiée pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Pour ce faire nous employons que l'inégalité (4.10) est vraie pour $k \leq p+m$ il résulte de (4.9) la relation :

$$(4.11) \quad \rho_{m+p+1} \leq d^{h_1 \alpha^p + \alpha^{p+1} + \dots + h_m \alpha^{p+m-1}} = d^{\alpha^p (h_1 + h_2 \alpha + \dots + h_m \alpha^{m-1})}$$

Du fait que α est la racine de l'équation (4.3) nous déduisons que :

$$r_1 + r_2 \alpha + \dots + r_m \alpha^{m-1} = \alpha^m,$$

et de (4.11) il résulte :

$$(4.12) \quad \rho_{m+p+1} \leq d^{\alpha^p \cdot \alpha^m} = d^{\alpha^{p+m}}$$

donc l'inégalité (4.10) est vérifiée aussi pour $k = m+p+1$ et compte tenu du principe de l'induction complète il résulte que l'inégalité (4.10) est vérifiée pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Mais l'inégalité (4.10) est équivalente à l'inégalité (4.2) d'où du fait que $d < 1$ il résulte que la suite fournie par (3.9) est convergente vers $\bar{x}$. Le théorème est donc démontré.

Remarque 4.2. La vitesse de convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fournie par (3.9) dépend de la valeur de la racine positive de l'équation (4.3). Cette racine existe en effet et elle est unique.

En effet si nous effectuons la transformation $t = 1/u$ dans l'équation (4.3) transformation qui ne modifie pas la nature et le signe des racines de cette équation et si nous désignons par $\varphi(u) = r_1 u^m + r_2 u^{m-1} + \dots + r_m u - 1$, l'équation transformée prend la forme $\varphi(u) = 0$.

Mais $\varphi'(u) = m r_1 u^{m-1} + (m-1) r_2 u^{m-2} + \dots + r_m$ et on remarque que pour $u > 0$ on a $\varphi'(u) > 0$, d'où l'on déduit que la fonction φ est strictement croissante et donc l'équation $\varphi(u) = 0$ a au plus une racine positive. Cette racine existe en effet par ce que $\varphi(0) = -1$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = +\infty$. Donc l'équation $\varphi(u) = 0$ admet une racine unique, affirmation qui reste valable aussi pour l'équation (4.3).

On constate facilement que cette racine est elle-même supérieure à 1.

Un évaluation plus exacte de cette racine a été donnée par I. PAVALOIU en [7]. On démontre ainsi que :

$$(4.13) \quad \alpha \geq \left(\sum_{i=1}^m h_i \right)^{\beta} \quad \text{où} \quad \beta = \left(\sum_{i=1}^m h_i \right) / \left(\sum_{i=1}^m i h_i \right)$$

Si nous analysons l'équation (4.3) on constate que dans le cas $m = 1$ cette équation étant $t - r_1 = 0$, il résulte $\alpha = r_1$.

Considérons maintenant le cas particulier $r_1 = r_2 = \dots = r_m = r$. L'équation (4.3) devient

$$(4.14) \quad t^m - r(t^{m-1} + t^{m-2} + \dots + t + 1) = 0.$$

En multipliant les termes de l'équation (4.14) par $t-1$ on obtient l'équation :

$$(4.15) \quad t^{m+1} - (r+1)t^m + r = 0,$$

aux racines positives 1 et α . Si nous écrivons $\psi(t) = t^{m+1} - (r+1)t^m + r$ on constate que $\psi'(t) = (m+1)t^m - (r+1)mt^{m-1}$. Le polynôme ψ' admet les racines 0 et $\beta = (r+1)m/(m+1)$. Donc

$$\psi(\beta) = -(r+1)^m / (m(1+1/m)^{m+1}) + r$$

Du fait que $\lim_{m \rightarrow \infty} (r+1)^m/m = +\infty$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} (1+1/m)^{m+1} = e$ il résulte que $\psi(\beta) > 0$ pour des valeurs de m suffisamment grandes. En outre $\psi(r+1) = r > 0$.

Donc en ce cas :

$$(4.16) \quad \alpha \in \left(\frac{(h+1)h}{m+1}, h+1 \right)$$

pour des valeurs de m suffisamment grandes. La relation (4.16) exprime le fait que le nombre α ne peut pas dépasser le nombre $r+1$. Par ce fait l'emploi d'un grand nombre de noeuds devient inutile.

Remarque 4.5. Dans les hypothèses et aussi les conclusions du théorème 4.1 figure essentiellement la constante K définie par l'inégalité (3.7).

En ce qui va suivre nous donnerons une évaluation de cette constante.

Si nous employons (1.14) il résulte :

$$(4.17) \quad \left[\frac{f(x_1)}{h_1}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m}, \theta; f^{-1} \right] t_1 t_2 \dots t_{m+1} = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{h_i-1} \sum_{N(A_j)+\delta = h_i-j-1} P_{R_i, A_i}^{(i, j, h_i-j-1)} \bar{Q}_{R_i, A_i}^{(i, j, h_i-j-1)} (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{m+1}) + \\ + A_{n+2} (t_1, \dots, t_{m+1}, \Omega_{1, m+1, m+1}^{-1} f^{-1}(\theta))$$

pour chaque $t_1, \dots, t_{n+1} \in Y$. En (4.17) nous avons écrit

$$(4.18) \quad P_{R_i, A_i}^{(i, j, h_i-j-1)} = \frac{(-1)^{h_i-j-1}}{j!} \binom{h_1+\alpha_1-1}{\alpha_1} \dots \binom{h_{i-1}+\alpha_{i-1}-1}{\alpha_{i-1}} \binom{h_{i+1}+\alpha_{i+1}-1}{\alpha_{i+1}} \dots \binom{h_m+\alpha_m-1}{\alpha_m}$$

et

$$(4.19) \quad \bar{Q}_{R_i, A_i}^{(i, j, h_i-j-1)} (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{m+1}) = \\ = A_{n-j+2} (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{n-j+1}, \Omega_{1, m+1, i}^{-1} [f^{-1}(f(x_i))]^j \bar{t}_{n-j+2} \dots \bar{t}_{m+1})$$

où

$$(4.20) \quad \Omega_{1, m+1, i}^{-1} h =$$

$$= \omega \left(\frac{f(x_1)}{h_1+\alpha_1}, \dots, \frac{f(x_{i-1})}{h_{i-1}+\alpha_{i-1}}, \frac{f(x_{i+1})}{h_{i+1}+\alpha_{i+1}}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m+\alpha_m}, \theta; f(x_i) \right) h = \\ = A_{n-h_i+h+2} ((f(x_1)-f(x_i))^{h_1+\alpha_1}, \dots, (f(x_i)-f(x_{i-1}))^{h_{i-1}+\alpha_{i-1}}, \\ (f(x_i)-f(x_{i+1}))^{h_{i+1}+\alpha_{i+1}}, \dots, (f(x_i)-f(x_m))^{h_m+\alpha_m}, (f(x_i))^{1+\delta}, h)$$

pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ et

$$(4.21) \quad \Omega_{1, m+1, m+1}^{-1} h = \\ = \omega \left(\frac{f(x_1)}{h_1}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m}; \theta \right) h = (-1)^{m+1} A_{m+1} (f(x_1)^{h_1}, \dots, f(x_m)^{h_m}, h)$$

Dans (4.17) et (4.19) l'ensemble $\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{n+1}\}$ a la signification précisée par (1.14).

Nous avons aussi désigné par A_1 le système $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)$ et par $s(A_1)$ la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m$.

Nous écrirons dans ce qui va suivre

$$\lambda_{i,j}^{(A_i, \theta)} = \parallel \Omega_{1, m+1, i}^{-1} \parallel$$

pour chaque $j = \overline{0, r_i-1}$; $i = \overline{1, m}$ et

$$\bar{\lambda} = \parallel \Omega_{1, m+1, m+1}^{-1} \parallel$$

Si nous envisageons la définition de la norme d'une application multilinéaire nous déduisons l'inégalité suivante :

$$(4.22) \quad \parallel \left[\frac{f(x_1)}{h_1}, \dots, \frac{f(x_m)}{h_m}, \theta; f^{-1} \right] \parallel \leq \\ \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{h_i-1} \sum_{N(A_j)+\delta = h_i-j-1} |P_{R_i, A_i}^{(i, j, h_i-j-1)}|$$

$$\|A_{n-j+2}\| \lambda_{i,j}^{(A_i, \delta)} \| (f^{-1})^{(j)}(f(x_i)) \| + \|A_{n+2}\| \bar{x} \cdot \|\bar{x}\|$$

Nous avons posé $\bar{x} = f^{-1}(0)$. En (4.17) et (4.22) la troisième somme du membre droit se réfère aux valeurs de $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$, δ pour lesquelles $s(A_i) + \delta = r_i - j - 1$. Cette égalité donne $\delta = r_i - s(A_i) - j - 1$ et du fait que l'on a $\delta \geq 0$ il résulte qu'on peut considérer que la somme mentionnée s'effectue pour $0 \leq s(A_i) \leq r_i - j - 1$. On introduit la valeur obtenue de δ dans l'expression de $\Omega_{1,m+1,i}$ et de $\lambda_{i,j}^{(A_i, \delta)}$.

De la définition des applications $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exprimée par (1.2) nous déduisons que

$$\|A_n\| \leq \|B\|^{n-1} \|\varphi\|^n.$$

De l'inégalité (2.8) il résulte :

$$(4.23) \quad \left\| [f^{-1}(f(x_i))]^{(j)} \right\| \leq \sum_{l=0}^{j-2} \sum_{(i_2, \dots, i_j) \in \mathcal{Q}_{j,l}} \frac{(2j-l-2)!}{i_2! \dots i_j!} M^{2j-l-1} \left(\frac{m_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{i_j}$$

où $M = \sup_{x \in \mathcal{D}} \| [f'(x)]^{-1} \|$ et $m_k = \sup_{x \in \mathcal{D}} \| f^{(k)}(x) \|$ pour chaque

$k = \overline{2, j}$.

Ainsi de (4.22) il résulte:

$$(4.24) \quad K \leq K_1 + \|B\|^{n+1} \|\varphi\|^{n+2} \bar{x} \cdot \|\bar{x}\|$$

où

$$(4.25) \quad K_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{Q_{i,j}^{(1)} Q_j^{(2)} \|B\|^{n-j+1} \|\varphi\|^{n-j+2}}{(r_i - j - 1)!}$$

et

$$(4.26) \quad Q_{i,j}^{(1)} = \sum_{0 \leq s(A_i) \leq r_i - j - 1} \lambda_{i,j}^{(A_i, r_i - s(A_i) - j - 1)}$$

$$\binom{r_1 + \alpha_1 - 1}{\alpha_1} \dots \binom{r_{i-1} + \alpha_{i-1} - 1}{\alpha_{i-1}} \binom{r_{i+1} + \alpha_{i+1} - 1}{\alpha_{i+1}} \dots \binom{r_m + \alpha_m - 1}{\alpha_m}$$

pendant que

$$(4.27) \quad Q_j^{(2)} = \sum_{l=0}^{j-2} \sum_{(i_2, \dots, i_j) \in \mathcal{Q}_{j,l}} \frac{(2j-l-2)!}{i_2! \dots i_j!} M^{2j-l-1} \left(\frac{m_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{i_j}$$

En (4.27) $\mathcal{Q}_{j,l}$ représente l'ensemble des solutions du système

$$(4.28) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + 3i_4 + \dots + (j-1)i_j = j-1 \\ i_2 + i_3 + i_4 + \dots + i_j = j-l-1 \end{cases}$$

Remarque 4.4. Il est gênant que dans la relation (4.22) le second membre contienne $\|\bar{x}\|$. En ce qui va suivre nous donnons une évaluation de K qui évite la défaut mentionné.

Soit $\alpha = \|B\|^{n+1} \|\varphi\|^{n+2}$. Des hypothèses du théorème (4.1) on peut déduire que :

$$(4.29) \quad \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x} - x_1\| + \|x_1\| \leq \|x_1\| + \frac{1}{\sqrt[n]{K \beta^{n+1}}}$$

Nous déduisons ainsi de (4.24) et (4.29) que :

$$(4.30) \quad K \leq K_1 + \alpha \left(\|x_1\| + \frac{1}{\sqrt[n]{K \beta^{n+1}}} \right)$$

Supposons $K \geq K_1 + \alpha \|x_1\|$. De (4.30) il résulte

$$(4.31) \quad K (K - K_1 - \alpha \|x_1\|)^n \beta^{n+1} - \alpha^n \leq 0$$

Ecrivons $a = K_1 + \alpha \|x_1\|$, $b = \beta^{n+1}$, $c = \alpha^n$ et considérons la fonction $\varphi: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(t) = b t (t - a)^n - c$. L'inégalité (4.31) exprime le fait que une solution de l'inégalité

$\varphi(x) \leq 0$ est K.

Du fait que $\varphi'(t) = b(t-a)^{n-1}[(n+1)t-a]$ et

$$\varphi''(t) = nb(t-a)^{n-2}[(n+1)t-2a]$$

on constate que $\varphi'(t) > 0$ et $\varphi''(t) > 0$ pour chaque $t \in]a, +\infty[$, d'où il résulte que φ est une fonction strictement croissante et strictement convexe. Donc pour chaque point initial de $]0, +\infty[$ la première itération de la méthode de Newton appliquée à la fonction φ , sera supérieure à la racine de φ ; cette racine existe en effet par ce que $\varphi(0) = -c < 0$. Si l'on choisit comme point initial $a + 1/n \in]0, +\infty[$ la première itération de Newton sera:

$$(4.32) \quad \tilde{t} = a + \frac{1}{n} - \frac{\varphi(a + \frac{1}{n})}{\varphi'(a + \frac{1}{n})} = \frac{cn^n + a^2bn^2 + 2abn + b}{bn(an^2 + n + 1)}$$

Nous aurons donc l'évaluation suivante

$$(4.33) \quad K \leq \frac{cn^n + a^2bn^2 + 2abn + b}{bn(an^2 + n + 1)}$$

où les constantes a, b, c ont été précisées auparavant..

Remarque 4.5. Dans les évaluations précédentes interviennent les constantes $\lambda_{i,j}^{(A_i, r_i - \delta(A_i) - j - 1)}$

$j = \overline{0, r_i - 1}$; $i = \overline{1, m}$ et $\bar{j}$; ces constantes ayant la signification précisée ci-dessus. Nous pouvons présenter délimitations de ces constantes seulement dans quelques cas particuliers.

Ainsi au cas où $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, si nous envisageons les relations antérieures et aussi ces que nous avons présenté en [3] (§ 3, relation (3.29)) nous pouvons déduire:

$$(4.34) \quad \lambda_{i,j}^{(A_i, r_i - \delta(A_i) - j - 1)} =$$

$$= \max_{l=1, \overline{p}} \left\{ \frac{1}{|f_l(x_1^i, \dots, x_p^i)|^{r_i - \delta(A_i) - j} \prod_{v=1, v \neq i}^m |f_l(x_1^v, \dots, x_p^v) - f_l(x_1^v, \dots, x_p^v)|^{r_v + h_v}} \right\}$$

$$j = \overline{0, r_i - 1} \quad ; \quad i = \overline{1, m}$$

et

$$(4.35) \quad \bar{\lambda} = \max_{l=1, \overline{p}} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^m |f_l(x_i)|^{r_i}} \right\}$$

Si $f: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ est l'opérateur de Hammerstein défini par

$$(4.36) \quad (f(x))(t) = \int_a^b K(t, s) g(s, x(s)) ds$$

où $t \in [a, b]$, $x \in C[a, b]$ est la fonction inconnue et $g: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, nous pouvons déduire:

$$(4.37) \quad \lambda_{i,j}^{(A_i, r_i - \delta(A_i) - j - 1)} =$$

$$= \max_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{\left| \int_a^b K(t, s) g(s, x_i(s)) ds \right|^{r_i - \delta(A_i) - j} \prod_{v=1, v \neq i}^m \left| \int_a^b K(t, s) [g(s, x_i(s)) - g(s, x_v(s))] ds \right|^{r_v + h_v}} \right\}$$

$$j = \overline{0, r_i - 1} \quad ; \quad i = \overline{1, m}$$

et

$$(4.38) \quad \bar{\lambda} = \max_{t \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^m \left| \int_a^b K(t, s) g(s, x_i(s)) ds \right|^{r_i}} \right\}$$

En conclusion de ce paragraphe nous examinerons les méthodes itératives obtenues en quelques cas particuliers d'interpolation, cas qui diffèrent du cas $m = 1$ parce que ce cas sera étudié au paragraphe suivant.

A) Le cas $m = 2$. En ce cas la méthode (3.9) prend la forme suivante:

$$(4.39) \quad x_{p+2} = H_{n_1+n_2-1} \left(f(x_p), f(x_{p+1}); f^{-1}(\theta) \right)$$

$p = 0, 1, \dots$; $x_0, x_1 \in X$ étant des valeurs données.

Si nous envisageons l'expression (1.8) - (1.9) du $(\varphi-B)$ polynôme d'interpolation, la relation (4.39) peut s'écrire sous la forme:

$$(4.40) \quad x_{p+2} = \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{(-1)^{k+j}}{j!} \binom{n_2+k-1}{k} A_{n_2+k-1} (f(x_p), f(x_{p+1}), \Omega_1^{-1} D_{p,j}) \\ + \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{(-1)^{k+j}}{j!} \binom{n_1+k-1}{k} A_{n_1+k-1} (f(x_p), f(x_{p+1}), \Omega_2^{-1} D_{p,k,j})$$

où $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$; $\Omega_1 t = A_{n_2+k-1} ((f(x_p) - f(x_{p+1}))^{n_2+k}, t)$

$\Omega_2 t = A_{n_1+k-1} ((f(x_{p+1}) - f(x_p))^{n_1+k}, t)$; $p = 0, 1, \dots$

En (4.40) on a $p = 0, 1, \dots$ et $x_0, x_1 \in X$ et

$$D_{i,j} = [f^{-1}(f(x_i))]^{(j)} f(x_i) \dots f(x_i) = \\ = \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{(i_2, \dots, i_j) \in \mathcal{I}_{j,k}} \sum_{f \in \mathcal{I}_{j, (i_2, \dots, i_j)}^{(f, x)}} (-1)^{j+k-1} F([f(x_i)]^{(j)} f(x_i))^2$$

où $\mathcal{I}_{j,k}$ et $\mathcal{I}_{j, (i_2, \dots, i_j)}^{(f, x)}$ ont la même signification que celle de (2.5).

Le théorème 4.1 équivaut dans le cas de la méthode (4.39) au corollaire suivant:

COROLLAIRE 4.6. Si l'équation $f(x) = \theta$ admet la solution $\bar{x} \in \mathcal{D}$ et les points initiaux $x_0, x_1 \in \mathcal{D}$ sont choisis tels que:

$$(4.41) \quad \max \{ \|\bar{x} - x_0\|, \|\bar{x} - x_1\| \} < \frac{1}{(K \beta^{n_1+n_2})^{1/(n_1+n_2-1)}}$$

où $\beta = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f'(x)\|$ et $K = \sup_{y, z, t \in f(\mathcal{D})} \left\| \begin{bmatrix} y \\ r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{bmatrix}; f^{-1} \right\|$

alors la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ fournie par (4.39) converge vers $\bar{x}$ et l'on a l'inégalité suivante:

$$(4.42) \quad \|\bar{x} - x_p\| \leq \frac{1}{(K \beta^{n_1+n_2})^{1/(n_1+n_2-1)}} d^{\left(\frac{n_2 + \sqrt{n_2^2 + 4n_1}}{2} \right)^{p-1}}$$

où

$$d = \max \left\{ (K \beta^{n_1+n_2})^{1/(n_1+n_2-1)} \|\bar{x} - x_0\|, [(K \beta^{n_1+n_2})^{1/(n_1+n_2-1)} \|\bar{x} - x_1\|]^\alpha \right\}$$

et $\alpha = 2/(n_2 + \sqrt{n_2^2 + 4n_1})$

En effet dans le cas de la méthode (4.39) l'équation (4.3) revient à:

$$(4.43) \quad t^2 - r_2 t - r_1 = 0,$$

et elle admet la racine positive $(r_2 + \sqrt{r_2^2 + 4r_1})/2$. Cette racine représente aussi la vitesse de convergence de la méthode (4.39). On observe facilement que cette vitesse est maximale pour $r_1 < r_2$.

B) Le cas des noeuds simples d'interpolation. Si nous considérons dans la formule d'interpolation (3.1) tous les ordres de multiplicité des noeuds égaux à l'unité, nous obtenons la formule suivante:

$$(4.44) \quad f^{-1}(y) = L_n(y_1, \dots, y_{n+1}; f^{-1})(y) + \\ + [y_1, \dots, y_{n+1}; f^{-1}](y - y_1) \dots (y - y_{n+1})$$

parce que dans ce cas le $(\varphi-B)$ polynôme de Hermite revient à celui de Lagrange. Si nous posons $y = \theta$ en (4.44) nous obtenons:

$$(4.45) \quad \bar{x} = f^{-1}(\theta) = L_n(y_1, \dots, y_{n+1}; f^{-1})(\theta) + \\ + (-1)^{n+1} [y_1, \dots, y_{n+1}; f^{-1}] y_1 \dots y_{n+1}$$

L'approximation de la racine $\bar{x}$ sera:

$$(4.46) \quad \tilde{x} = L_n(y_1, \dots, y_{n+1}; f^{-1})(\theta) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^n \sum_{i=1}^{n+1} A_{n+1} (f(y_1), \dots, f(x_{i-1}), f(x_{i+1}), \dots, f(x_{n+1}), [w'_{n+1} f(x_i)]^{-1} x_i) = \\
 &= x_1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i [f(x_1), \dots, f(x_{i+1}); f^{-1}] f(x_1) \dots f(x_i)
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne les méthodes itératives obtenues dans le cas de l'interpolation aux noeuds simples on remarque qu'on ce cas on obtiendra la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ en partant de $n+1$ valeurs initiales $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. On construit la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence:

$$(4.47) \quad x_{p+n+2} = L_n(f(x_{p+1}), \dots, f(x_{p+n+1}); f^{-1})(\theta)$$

où $p = 0, 1, \dots$.

Si nous envisageons la forme du polynôme d'interpolation de Lagrange (1.11) la relation (4.47) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(4.48) \quad x_{p+n+2} = x_{p+1} + \sum_{i=1}^n (-1)^i [f(x_{p+1}), \dots, f(x_{p+n+1}); f^{-1}] \cdot f(x_{p+1}) \dots f(x_{p+i})$$

En ce qui concerne la convergence de la méthode (4.47) on a le théorème suivant:

THEOREME 4.7. Si l'équation $f(x) = 0$ admet la solution $\bar{x}$ et les points initiaux $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{D}$ de la méthode (4.47) vérifient les inégalités suivantes:

$$(4.49) \quad \|\bar{x} - x_i\| < 1/(\sqrt[n]{K} \beta^{n+1})$$

où $K = \sup_{x_i \in \mathcal{D}} \|[x_1, \dots, x_{n+1}; f^{-1}]\|$ et $\beta = \sup_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}} \|[x_1, x_2; f]\|$ alors la suite fournie par (4.47) converge vers $\bar{x}$ et l'on a l'égalité suivante:

$$(4.50) \quad \|\bar{x} - x_s\| \leq d^{\alpha^{s-1}} / \sqrt[n]{K} \beta^{n+1}; \quad s \in \mathbb{N}$$

où α est la racine positive unique de l'équation

$$(4.51) \quad t^{n+1} - t^n - t^{n-1} - \dots - t - 1 = 0$$

pendant que:

$$(4.52) \quad d = \max_{i=1, n+1} \left\{ (\sqrt[n]{K} \beta^{n+1} \|\bar{x} - x_i\|)^{\frac{1}{\alpha^{i-1}}} \right\}$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.1. Le seul point dans lequel les deux démonstrations diffèrent est celui de la détermination de la relation (4.6). Ici cette relation résulte de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 (4.53) \quad \|f(x_{p+1})\| &= \|\theta - f(x_{p+1})\| = \|f(\bar{x}) - f(x_{p+1})\| = \\
 &= \|[x, x_{p+1}; f](\bar{x} - x_{p+1})\| \leq \|[x, x_{p+1}; f]\| \cdot \|\bar{x} - x_{p+1}\| \leq \\
 &\leq \beta \|\bar{x} - x_{p+1}\|
 \end{aligned}$$

On peut remarquer que la racine de l'équation (4.51) appartient à l'intervalle $(1, 2)$.

§ 5. Méthodes itératives de type Tchébycheff.

Dans ce paragraphe nous étudierons les méthodes itératives à un seul pas d'itération. On obtient ces méthodes depuis la méthode générale en faisant $m = 1$. Nous avons donc un seul noeud d'interpolation avec l'ordre de multiplicité égal à r . La méthode (3.9) revient à :

$$(5.1) \quad x_{p+1} = H_{n-1} \left(f(x_p); f^{-1} \right)(\theta)$$

$p = 0, 1, \dots$, $x_0 \in X$ étant donné

Si nous envisageons la relation (1.12) nous déduisons que :

$$(5.2) \quad x_{p+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} [f^{-1}(f(x_p))]^{(j)} (f(x_p))^j$$

$p = 0, 1, \dots$, $x_0 \in X$, et en utilisant la théorème 2.4 nous pouvons expliciter la dérivée Fréchet d'ordre j de $f^{-1}(f(x_p))$ et la relation (5.2) devient ainsi

$$(5.3) \quad x_{p+1} = x_p - [f'(x_p)]^{-1} f(x_p) + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{(i_1, \dots, i_j) \in \mathcal{P}_{j,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{j,k}^{(i_1, \dots, i_j)}(f, x)} (-1)^{j+k-1} F([f'(x_p)]^{-1} f(x_p))$$

$p = 0, 1, \dots$ et l'élément $x_0 \in X$ étant donné.

En (5.3) $\mathcal{F}_{j,k}$ représente l'ensemble des solutions du système (3.6) avec $s = k$, pendant que $\mathcal{F}_{j,k}^{(i_1, \dots, i_j)}(f, x)$ représente l'ensemble des $(i_1, \dots, i_j)$ enchainements des couplages produits par

$$[f'(x_p)]^{-1} f''(x_p), \dots, [f'(x_p)]^{-1} f^{(j)}(x_p)$$

F étant un tel enchainement.

Nous appellerons les méthodes itératives (5.3), méthodes itératives de type Tchébycheff du r -ième ordre. Nous présenterons les cas particuliers suivants de ces méthodes.

Pour $r = 2$ nous obtenons la méthode:

$$(5.4) \quad x_{p+1} = x_p - [f'(x_p)]^{-1} f(x_p) \\ p = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in X$$

Cette méthode représente la méthode de Newton-Kantorovitch, universellement connue.

Pour $r = 3$ nous obtenons la méthode:

$$(5.5) \quad x_{p+1} = x_p - [f'(x_p)]^{-1} f(x_p) - \frac{1}{2} [f'(x_p)]^{-1} f''(x_p) [f'(x_p)]^{-1} f(x_p)^2 \\ p = 0, 1, \dots; \quad x_0 \in X$$

méthode qui représente la méthode classique de Tchébycheff.

Pour $r = 4$ nous obtenons la méthode :

$$(5.6) \quad x_{p+1} = x_p - [f'(x_p)]^{-1} f(x_p) - \frac{1}{2} [f'(x_p)]^{-1} f''(x_p) [f'(x_p)]^{-1} f(x_p)^2 \\ - \frac{1}{2} [f'(x_p)]^{-1} f''(x_p) ([f'(x_p)]^{-1} f(x_p), [f'(x_p)]^{-1} f''(x_p) [f'(x_p)]^{-1} f(x_p)) \\ + \frac{1}{6} [f'(x_p)]^{-1} f'''(x_p) ([f'(x_p)]^{-1} f(x_p))^3$$

$p = 0, 1, \dots$, $x_0 \in X$.

Si nous envisageons l'extension de la formule de Taylor au cas des applications entre les espaces linéaires normés (voir par exemple 7 pp. 20), et si nous désignons par $\bar{x}$ la solution de l'équation $f(x) = 0$ et par $\tilde{x}$ l'élément $H_{k-1} \left(\frac{f(x_0)}{h}; f^{-1} \right) (0)$

nous déduisons la relation suivante :

$$(5.7) \quad \|\bar{x} - \tilde{x}\| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in [0,1]} \| [f^{-1}((1-t)f(x_0))]^{(n)} \| \cdot \|f(x_0)\|^n$$

Supposons que l'application f admet des dérivées Fréchet jusqu'à l'ordre r inclusivement sur un ensemble $\mathcal{D} \subset X$ et que ces dérivées sont bornées en norme sur $\mathcal{D}$; donc il existe les constantes m_k , $k = \overline{2, r}$ telles que $m_k = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f^{(k)}(x)\|$, $k = \overline{2, r}$.

Supposons aussi que la dérivée du premier ordre admet une inverse pour chaque $x \in \mathcal{D}$ et qui il existe $M > 0$ tel que $M = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f'(x)\|^{-1}$

En outre supposons que l'ensemble $f(\mathcal{D})$ est convexe et $0 \in f(\mathcal{D})$.

Si les conditions présentées ci dessus sont remplies il résulte que $y = (1-t)f(x_0) \in \mathcal{D}$, d'où l'on déduit que $x = f^{-1}((1-t)f(x_0)) \in \mathcal{D}$, donc on a l'inégalité (2.8) pour $y = (1-t)f(x_0)$, et par suite on peut écrire l'inégalité suivante:

$$(5.8) \quad \| [f^{-1}((1-t)f(x_0))]^{(n)} \| \leq$$



$$\leq \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{J}_{r,k}} \frac{(2k-k-2)!}{i_2! \dots i_n!} M^{2k-k-1} \left(\frac{m_2}{2!}\right)^{i_2} \left(\frac{m_3}{3!}\right)^{i_3} \dots \left(\frac{m_n}{n!}\right)^{i_n}$$

où $\mathcal{J}_{r,k}$ est l'ensemble des solutions du système (3.6), où $j = r$ et $s = k$.

Désignons par K_0 la constante que figure au membre droit de l'inégalité (5.7). Nous déduisons que :

$$(5.9) \quad \|\bar{x} - \tilde{x}\| \leq \frac{K_0}{h!} \|f(x_0)\|^k$$

Dans le cas particuliers mentionnés on a pour $r = 2$:

$$(5.10) \quad K_0 = M^3 m_2$$

pour $r = 3$

$$(5.11) \quad K_0 = M^4 m_3 + 3 M^5 m_2^2$$

et pour $r = 4$

$$(5.12) \quad K_0 = M^5 m_4 + 10 M^6 m_2 m_3 + 15 M^5 m_2^3$$

(pour expliciter les solutions du système (3.6) on peut voir [8] pp. 47 - 49).

En ce que concerne la convergence de la suite fournie par la méthode (5.1), on a le théorème suivant :

THEOREME 5.1. Si les conditions suivantes sont remplies:

- i) l'équation $f(x) = 0$ admet la solution $\bar{x} \in \mathcal{D}$, les ensembles $\mathcal{D}$ et $f(\mathcal{D})$ sont convexes; $0 \in f(\mathcal{D})$ et la fonction $f|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ est bijective ;
- ii) l'application $f : X \rightarrow Y$ admet des dérivées de type Fréchet jusqu'à l'ordre r inclusivement et il existe les constantes $m_2, m_3, \dots, m_r, M > 0$ telles que $m_k = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f^{(k)}(x)\|$; $k = \overline{2, r}$ et

$$M = \sup_{x \in \mathcal{D}} \| [f'(x)]^{-1} \|$$

iii) le point initial $x_0 \in \mathcal{D}$ est choisi tel que l'on ait

$$(5.13) \quad \|\bar{x} - x_0\| \leq 1 / \sqrt[k]{\frac{K_0 \beta^k}{h!}}$$

que a le centre en $\bar{x}$ et le rayon $R = \max \left\{ 1, 1 / \sqrt[k]{K_0 \beta^{r/r!}} \right\}$ est incluse dans $\mathcal{D}$; K_0 étant la constante qui figure au membre droit de l'inégalité (5.7) et $\beta = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f'(x)\|$;

alors:

j) la suite fournie par la méthode (5.1) converge vers $\bar{x}$;

jj) on a l'évaluation suivante de l'erreur d'approximation :

$$(5.14) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\left(\sqrt[k]{\frac{K_0 \beta^k}{h!}} \|\bar{x} - x_0\| \right)^{k^{n-1}}}{\sqrt[k]{\frac{K_0 \beta^k}{h!}}}$$

Démonstration. Nous démontrerons en employant l'induction mathématique que pour chaque nombre $n \in \mathbb{N}$ les relations suivantes sont vraies :

$$a) \quad x_n \in \mathcal{D}$$

$$b) \quad \rho_n = \sqrt[k]{\frac{K_0 \beta^k}{h!}} \|\bar{x} - x_n\| \leq \left(\sqrt[k]{\frac{K_0 \beta^k}{h!}} \|\bar{x} - x_0\| \right)^{k^{n-1}}$$

Pour $n = 0$ les relations sont vraies à cause des hypothèses du théorème. Supposons que ces propositions sont vraies pour $n = k$.

Du fait que $x_k \in \mathcal{D}$ il résulte d'une manière analogue à la démonstration de l'inégalité (5.7), l'inégalité suivante :

$$(5.15) \quad \|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq \frac{K_0}{h!} \|f(x_k)\|^k$$

Si nous envisageons la formule des accroissements finis nous déduisons :

$$(5.16) \quad \|f(x_k)\| = \|\theta - f(x_k)\| = \|f(x) - f(x_k)\| \leq \\ \leq \sup_{\theta \in [0,1]} \|f'(\bar{x} + \theta(x_k - \bar{x}))\| \cdot \|\bar{x} - x_k\| \leq \beta \|\bar{x} - x_k\|$$

Pour établir (5.16) nous avons employé le fait que l'ensemble D est convexe, donc que de $x_k, \bar{x} \in D$ il résulte $\bar{x} + \theta(x_k - \bar{x}) \in D$ et par conséquent

$$\sup_{\theta \in [0,1]} \|f'(\bar{x} + \theta(x_k - \bar{x}))\| \leq \beta$$

De (5.15) et (5.16) nous déduisons que :

$$(5.17) \quad \|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq \frac{K_0 \beta^k}{n!} \|\bar{x} - x_k\|^k$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité (5.15) par $\sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^k}{n!}}$ on a, dans les notations introduites l'inégalité suivante :

$$(5.18) \quad \rho_{k+1} \leq \rho_k^r.$$

De l'hypothèse de l'induction on déduit

$$\rho_k \leq \left(\sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^k}{n!}} \|\bar{x} - x_0\| \right)^{k-1}$$

et il résulte immédiatement que

$$(5.19) \quad \rho_{k+1} \leq \left(\sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^k}{n!}} \|\bar{x} - x_0\| \right)^{k^2}$$

Cette dernière inégalité nous indique que la proposition b) est vraie pour $n = k + 1$. De (5.19) il résulte immédiatement que :

$$(5.20) \quad \|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq \frac{\left(\sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^k}{n!}} \|\bar{x} - x_0\| \right)^{k^2}}{\sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^k}{n!}}}$$

et à cause de l'hypothèse iii) il résulte que :

$$\|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq 1 / \sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^k}{n!}} \leq R$$

donc x_{k+1} fait partie de la sphère au centre en $\bar{x}$ et au rayon R , donc $x_{k+1} \in D$.

Du fait du principe de l'induction mathématique nous déduisons que les propositions a) et b) sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

De l'inégalité exprimée par b) on déduit que :

$$(5.21) \quad \sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^n}{n!}} \|\bar{x} - x_n\| \leq \left(\sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^n}{n!}} \|\bar{x} - x_0\| \right)^{n-1}$$

et de l'hypothèse $\sqrt[n-1]{\frac{K_0 \beta^r}{r!}} \|\bar{x} - x_0\| < 1$ il résulte immédiatement que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$. Ce fait représente exactement la conclusion j) du théorème. L'inégalité exprimée par b) représente la conclusion jj) du théorème. Le théorème est donc démontré.

§ 6. Opérateurs itératifs à un et à plusieurs pas.

D'une manière analogue à celles employées dans les travaux [6] [7] nous introduisons la notion d'opérateur itératif attaché à l'équation $f(x) = 0$.

Définition 6.1. L'opérateur non-linéaire $Q : X \rightarrow X$ s'appelle opérateur itératif à un seul pas, attaché à l'équation $f(x) = 0$, si pour chaque solution $\bar{x}$ de cette équation, $\bar{x}$ sera un point un point fixe de l'opérateur Q .

On peut obtenir une classe d'opérateurs itératifs à un seul pas d'itération, attachés à l'équation $f(x) = 0$, si nous écrivons l'expression du $(\varphi - B)$ polynôme de type Taylor relatif à la fonction $f^{-1} : Y \rightarrow X$ et au noeud $f(x)$ qui a l'ordre de multiplicité r . Nous considérons ensuite la valeur de ce $(\varphi - B)$ polynôme sur l'élément $\theta \in Y$. L'expression d'un tel opérateur itératif est :

$$(6.1) \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(-1)^j}{j!} [f^{-1}(f(x))]^{(j)} (f(x))^j$$

où $[f^{-1}(f(x))]^{(j)} (f(x))^j \in \mathcal{L}_j(Y, X)$ représente la dérivée de type Fréchet d'ordre j de l'application $f^{-1} : Y \rightarrow X$ au point $f(x)$.

D'après les résultats établis on a :

$$(6.2) \quad [f^{-1}(f(x))]^{(j)} (f(x))^j = \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{j,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{j, i_1, \dots, i_k}^{(f, x)}} (-1)^{j+k-1} F(\{[f'(x)]^{-1} f(x)\}^j)$$

Dans la classe des opérateurs itératifs définis par (6.1)-(6.2) se trouvent les opérateurs itératifs connus suivantes:

a) l'opérateur itératif de Newton $Q : X \rightarrow X$ défini par $Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x)$, obtenu depuis le cas général pour $r = 1$.

b) l'opérateur itératif de Tchébycheff $Q : X \rightarrow X$ défini par $Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x) - 1/2 [f'(x)]^{-1} f''(x) \{[f'(x)]^{-1} f(x)\}^2$, obtenu depuis le cas général pour $r = 2$.

Pour l'opérateur itératif général (6.1)-(6.2) nous employons la dénomination d'opérateur itératif d'ordre r .

Une autre catégorie d'opérateurs itératifs est celle qui comprend les opérateurs obtenus par des modifications d'opérateurs déjà connus. Par exemple désignons par $Q : X \rightarrow X$ un opérateur itératif quelconque. Supposons en ce cas aussi, que l'application $f : X \rightarrow Y$ admet des dérivées de type Fréchet dans tous les points d'un ensemble $D \subset X$; nous pouvons considérer l'application :

(6.3) $T : X \rightarrow X$; $T(x) = Q(x) - [f'(x)]^{-1} f(Q(x))$. L'opérateur T obtenu de cette manière s'appelle, l'opérateur itératif de Traub. Dans le cas $Q = I_X$ (I_X étant l'application identique de l'espace X), l'opérateur de Traub revient à l'opérateur de Newton.

Un autre cas particulier de l'opérateur de Traub s'obtient si nous choisissons $Q(x)$ égal à $x - [f'(x)]^{-1} f(x)$; l'expression obtenue pour l'opérateur T est:

$$(6.4) \quad T(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x) - [f'(x)]^{-1} f(x - [f'(x)]^{-1} f(x))$$

Un autre exemple important d'opérateur itératif est l'opérateur itératif de type Aitken-Steffensen. Pour construire cet opérateur nous partons de deux opérateurs itératifs Q_1 et Q_2 donnés et nous supposons qu'il existe la différence divisée du premier ordre de l'application f et que cette différence divisée est inversable. De cette manière l'opérateur itératif de Aitken-Steffensen sera $Q : X \rightarrow X$ défini par :

$$(6.5) \quad Q(x) = Q_1(x) - [Q_1(x), Q_2(x); f]^{-1} f(Q_1(x)).$$

Nous remarquerons que dans le cas $Q_1 = Q_2 = I_X$ l'opérateur itératif de Aitken - Steffensen revient à l'opérateur de Newton, bien sûr au cas seulement où l'application $f : X \rightarrow Y$ admet des dérivées de type Fréchet dans tous les points de l'ensemble $\mathcal{D}$. Pour $Q_1 = I_X$ et $Q_2 = \bar{Q}$ on obtient l'opérateur itératif de Steffensen proprement dit.

$$(6.6) \quad Q(x) = x - [x, \bar{Q}(x); f]^{-1} f(x).$$

L'importance des opérateurs itératifs réside dans leur utilisation à la construction des suites qui approximent la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Définition 6.2. Désignons par $Q : X \rightarrow X$ un opérateur itératif attache à l'équation $f(x) = 0$ et par $x_0 \in X$ un point arbitraire. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui a comme terme initial x_0 et dont les autres termes résultent de la relation de récurrence

$$(6.7) \quad x_{n+1} = Q(x_n),$$

s'appelle suite d'approximations fournie par Q .

A l'aide d'un opérateur itératif et en partant de point x_0 , on peut construire la suite d'itérations $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. donc relativement à cette suite on peut poser le problème de déterminer les conditions dans lesquelles cette suite converge vers la solution $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$. En outre, on demande de déterminer une borne supérieure de l'erreur avec laquelle l'élément x_n approxime la solution $\bar{x}$ de l'équation.

Du fait qu'il est évident qu'on obtiendra une certaine précision d'approximation par un nombre d'itérations qui dépend de l'opérateur Q , se pose le problème d'introduire une variable qui caractérise la vitesse de convergence de la suite définie par (6.7). Une telle variable est l'ordre de convergence.

Définition 6.3. Supposons $p \in]0, +\infty[$ et $D \subset X$. L'opérateur itératif $Q : X \rightarrow X$ a l'ordre p sur l'ensemble D , s'il existe un nombre $K > 0$, tel que pour chaque $x \in D$ on ait l'inégalité suivante:

$$(6.8) \quad \|f(Q(x))\| \leq K \|f(x)\|^p.$$

En [5], [7] I. PAVALOIU a établi un théorème qui fournit des conditions suffisantes qui assurent l'ordre $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$ pour un opérateur itératif et aussi la convergence de la suite fournie par cet opérateur vers la solution $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ (l'existence de $\bar{x}$ résulte des conditions du théorème). Nous retrouverons, ce théorème comme un cas particulier d'un résultat présenté dans ce travail.

En ce qui va suivre nous introduisons la notion d'opérateur itératif à plusieurs pas et d'ordre d'un tel opérateur.

Définition 6.4. L'application $Q : X^m \rightarrow X$ s'appelle opérateur itératif à m pas attaché à l'équation $f(x) = 0$, si pour chaque solution $\bar{x}$ de cette équation on a :

$$Q(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x}.$$

De cette définition résulte le fait que l'application $Q : X^m \rightarrow X$ est un opérateur itératif à m pas attaché à l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si l'application $R : X \rightarrow X$ définie par $R(x) = Q(x, \dots, x)$, c'est-à-dire la restriction de Q à la diagonale de l'espace X^m est un opérateur itératif à un seul pas.

Pour exemplifier la notion définie ci-dessus considérons l'application $Q : X^m \rightarrow X$ définie par :

$$(6.9) \quad Q(x_1, \dots, x_m) = H_n \left(\begin{matrix} f(x_1) \\ \kappa_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} f(x_m) \\ \kappa_m \end{matrix}; f^{-1} \right) (0)$$

l'expression du deuxième membre de (6.9) représente le $(\varphi-B)$ polynôme abstrait d'interpolation de la fonction $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sur les noeuds $f(x_1), \dots, f(x_m)$ et calculé sur l'élément nul de Y .

D'une manière similaire au cas d'un opérateur à un seul pas nous pouvons considérer des suites fournies par un opérateur itératif à m pas.

Définition 6.4. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle suite d'approximations fournie par l'opérateur itératif à m pas $Q : X^m \rightarrow X$, si les termes de cette suite s'obtiennent par la relation de récurrence

$$(6.10) \quad x_{n+m} = Q(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m-1}),$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les points initiaux $x_0, \dots, x_{m-1}$ étant des éléments arbitraires de X .

En ce qui va suivre nous présenterons une extension de la notion d'ordre d'un opérateur itératif.

Définition 6.5. Supposons $p \in]0, +\infty[$ et $D \subset X$. L'opérateur itératif à m pas $Q : X^m \rightarrow X$ attaché à l'équation $f(x) = 0$ a l'ordre p sur l'ensemble D , s'il existe les nombres $K, \alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ tels que pour tous les $x_1, \dots, x_m \in D$ on a l'inégalité suivante :

$$(6.11) \quad \|f(Q(x_1, \dots, x_m))\| \leq K \|f(x_1)\|^{\alpha_1} \|f(x_2)\|^{\alpha_2} \dots \|f(x_m)\|^{\alpha_m}$$

et p est la solution de l'équation

$$(6.12) \quad p^m - \alpha_m p^{m-1} - \alpha_{m-1} p^{m-2} - \dots - \alpha_2 p - \alpha_1 = 0.$$

Du fait que l'équation (6.12) est similaire à l'équation (4.3) nous pouvons conclure de la remarque 4.2 que l'équation (6.12) admet une racine positive unique. Au cas où $\alpha_1 + \dots + \alpha_m > 1$ cette racine est supérieure à l'unité. Le fait que l'opérateur itératif à m pas $Q: X^m \rightarrow X$ a un ordre $p > 1$ sur un ensemble DCX a des conséquences sur la convergence de la suite fournie par ce opérateur. Ces conséquences sont contenues dans le théorème suivant

THEOREME 6.6. Si les ensembles X et Y sont organisés comme, des espaces de Banach, si sur le domaine DCX l'application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$ est continue et si les conditions suivantes sont remplies:

i) l'opérateur itératif à m pas $Q: X^m \rightarrow X$ attaché à l'équation $f(x) = 0$ a l'ordre p sur D , les égalités (6.11) et (6.12) étant vérifiées avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_m > 1$;

ii) il existe les nombres $L, \beta_1, \dots, \beta_m > 0$ tels que

$$(6.13) \quad \|Q(x_1, \dots, x_m) - x_m\| \leq L \|f(x_1)\|^{\beta_1} \|f(x_2)\|^{\beta_2} \dots \|f(x_m)\|^{\beta_m}$$

pour chaque $x_1, \dots, x_m \in D$;

iii) les points initiaux $x_0, \dots, x_{m-1}$ du procédé itératif fournie par Q sont choisis tels que:

$$K^{1/(\alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1)} \|f(x_k)\| < 1 \quad ; \quad k = \overline{0, m-1}$$

iv) la sphère $S(x_0, R)$ au centre en x_0 et au rayon

$$R = \max \left\{ \|x_1 - x_0\|, \dots, \|x_{m-2} - x_0\|, \|x_{m-1} - x_0\| + L K^{\frac{\beta_1 + \dots + \beta_m}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_m}} \frac{d^\omega}{1 - d^{\omega(p-1)}} \right\}$$

est incluse en D (nous avons désigné par d l'expression

$$\max \left\{ \left[K^{1/(\alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1)} \|f(x_i)\| \right]^{\frac{1}{p-1}}, i = \overline{0, m-1} \right\}$$

et par ω l'expression $\beta_1 + \beta_2 p + \dots + \beta_m p^{m-1}$)

alors

j) la suite fournie par la relation (6.10) avec les éléments initiaux $x_0, \dots, x_{m-1}$ est convergente ;

jj) l'équation $f(x) = 0$ a la solution $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$jjj) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq L K^{(\beta_1 + \dots + \beta_m)/(1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m))} d^{\omega p^{n-m+1}} \quad n \geq m$$

$$jv) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq L K^{(\beta_1 + \dots + \beta_m)/(1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m))} \frac{d^{\omega p^n}}{1 - d^{\omega p^n(p-1)}} \quad n \geq m$$

Démonstration. En employant l'induction mathématique nous montrerons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les propriétés suivantes sont vraies

a) $x_n \in S(x_0, R)$

$$b) \quad \rho_n = K^{1/(\alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1)} \|f(x_n)\| \leq d^{p^n}$$

Des hypothèses du théorème il résulte évidemment que ces propriétés sont vraies pour $n = 0, \dots, m-1$.

Supposons maintenant qu'elles sont vraies pour $n \leq s, s \geq m$.

Nous en déduisons que :

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \|x_{s+1} - x_s\| &= \|Q(x_{s-m+1}, \dots, x_s) - x_s\| \leq \\ &\leq L \|f(x_{s-m+1})\|^{\beta_1} \dots \|f(x_s)\|^{\beta_m} \leq \\ &\leq L K^{\frac{\beta_1 + \dots + \beta_m}{1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)}} d^{\beta_1 p^{s-m+1} + \beta_2 p^{s-m+2} + \dots + \beta_m p^s} = \\ &= L K^{\frac{\beta_1 + \dots + \beta_m}{1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)}} d^{(\beta_1 + \beta_2 p + \dots + \beta_m p^{m-1}) p^{s-m+1}} \end{aligned}$$

et

$$(6.15) \quad \|x_{s+1} - x_0\| \leq \|x_{s+1} - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_0\| \leq \\ \leq \sum_{i=m-1}^s \|x_{i+1} - x_i\| + \|x_{m-1} - x_0\| \leq \\ \leq \|x_{m-1} - x_0\| + LK \frac{\beta_1 + \dots + \beta_m}{1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)} \sum_{i=m-1}^s d^{(\beta_1 + \beta_2 p + \dots + \beta_m p^{m-1}) p^{i-m+1}}$$

De la condition $\alpha_1 + \dots + \alpha_m > 1$ il résulte $p > 1$ et si nous désignons par ω l'expression $\beta_1 + \beta_2 p + \dots + \beta_m p^{m-1}$ nous déduisons que :

$$\sum_{i=m-1}^s d^{\omega p^{i-m+1}} = d^{\omega} \sum_{i=m-1}^s d^{\omega(p^{i-m+1} - 1)}$$

de $p > 1$ il résulte $p^{i-m+1} - 1 > (i - m + 1)(p - 1)$ et ensuite de $d < 1$ il résulte :

$$(6.16) \quad \sum_{i=m-1}^s d^{\omega p^{i-m+1}} < d^{\omega} \sum_{i=0}^{s-m+1} (d^{\omega(p-1)})^i < \frac{d^{\omega}}{1 - d^{\omega(p-1)}}$$

On déduit ainsi de (6.16) et (6.15)

$$(6.17) \quad \|x_{s+1} - x_0\| < \|x_{m-1} - x_0\| + LK \frac{\beta_1 + \dots + \beta_m}{1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)} \frac{d^{\omega}}{1 - d^{\omega(p-1)}} \leq R$$

et l'inégalité (6.17) est équivalente au fait que $x_{s+1} \in S(x_0, R)$.

En ce qui concerne la propriété b), on remarque que de l'hypothèse i) on déduit que :

$$(6.18) \quad \|f(x_{s+1})\| = \|f(Q(x_{s-m+1}), \dots, x_s)\| \leq \\ \leq K \|f(x_{s-m+1})\|^{\alpha_1} \|f(x_{s-m+2})\|^{\alpha_2} \dots \|f(x_s)\|^{\alpha_m}$$

En multipliant les deux membres de la relation (6.18) par

$K^{1/(\alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1)}$ et compte tenu de la signification de ρ_n ; nous

on a :

$$(6.19) \quad \rho_{s+1} \leq \rho_{s-m+1}^{\alpha_1} \dots \rho_s^{\alpha_m}$$

De (6.19) de des hypothèses d'induction on déduit

$$(6.20) \quad \rho_{s+1} \leq d^{\alpha_1 p^{s-m+1} + \dots + \alpha_m p^s} = \\ = d^{p^{s-m+1} (\alpha_1 + \alpha_2 p + \dots + \alpha_m p^{m-1})} = d^{p^{s-m+1} \cdot \omega} = d^{\omega p^{s-m+1}}$$

donc la propriété b) est aussi vraie pour $n = s + 1$.

En vertu du principe de l'induction mathématique les propriétés

a) et b) sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

De ces propriétés et dans une manière similaire à l'inégalité

(6.14) il résulte que :

$$\|x_{n+1} - x_n\| < LK \frac{\beta_1 + \dots + \beta_m}{1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)} d^{\omega p^{n-m+1}}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m - 1$, donc il résulte la conclusion jjj).

Pour $n \geq m - 1$ et q arbitraire nous déduisons d'abord que :

$$(6.21) \quad \|x_{n+q} - x_n\| < LK \frac{\beta_1 + \dots + \beta_m}{1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)} \frac{d^{\omega p^n}}{1 - d^{\omega p^{n(p-1)}}}$$

Si nous envisageons l'inégalité $d < 1$, nous déduisons de (6.21) que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fondamentale. L'espace X est toutefois complet et donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Désignons par $\bar{x}$ la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'inégalité exprimée par la propriété b) implique le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x_n)\| = 0$, d'où en tenant compte de la continuité de la norme et aussi de la continuité de l'application f , nous déduisons $f(\bar{x}) = 0$.

De (6.21), en y faisant $q \rightarrow \infty$ nous déduisons la conclusion jv).

Le théorème est donc démontré.

Dans le théorème 6.6 la condition imposée à l'opérateur itératif à m pas $Q: X^n \rightarrow X$ d'avoir l'ordre p sur le domaine D est très forte et difficile à remplir. Il importe donc de remplacer cette condition par d'autres moins exigeantes du point de vue pratique.

Nous présenterons ci-dessous un théorème qui évite la condition mentionnée.

THEOREME 6.7. Si les ensembles X et Y sont organisés comme des espaces de Banach, si sur le domaine $D \subset X$ l'application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$ est continue et si les conditions suivantes sont remplies :

i) il existe les nombres naturels $r_1, \dots, r_m$ tels que, pour chaque $x_1, \dots, x_m, x \in D$ il existe la différence divisée

$$\left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m & x \\ h_1 & \dots & h_m & 1 \end{matrix} ; f \right]$$

et une constante $0 < M < +\infty$ telle que :

$$(6.22) \quad M = \sup_{x_1, \dots, x_m, x \in D} \left\| \left[\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m & x \\ h_1 & \dots & h_m & 1 \end{matrix} ; f \right] \right\|$$

ii) il existe les nombres $K; \alpha_i > 0, i = \overline{1, m}; L_i > 0, i = \overline{1, m}; \beta_{ij} > 0, i, j = \overline{1, m}$ avec

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i,j=1}^m \beta_{ij} > 0$$

tels que :

$$(6.23) \quad \left\| H_m \left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \\ h_1 & \dots & h_m \end{matrix} ; f \right) Q(x_1, \dots, x_m) \right\| \leq K \|f(x_1)\|^{\alpha_1} \dots \|f(x_m)\|^{\alpha_m}$$

et

$$(6.24) \quad \|Q(x_1, \dots, x_m) - x_i\| \leq L_i \|f(x_1)\|^{\beta_{i1}} \dots \|f(x_m)\|^{\beta_{im}}; i = \overline{1, m}$$

pour chaque $x_1, \dots, x_m \in D$;

iii) les points initiaux $x_0, \dots, x_{m-1}$ du procédé itératif fourni par Q sont choisis tels que :

$$d = \max \left\{ \frac{1}{c} \|f(x_0)\|, \left[\frac{1}{c} \|f(x_0)\| \right]^{\frac{1}{p}}, \dots, \left[\frac{1}{c} \|f(x_{m-1})\| \right]^{\frac{1}{p^{m-1}}} \right\} < 1$$

où c est la solution de l'équation :

$$(6.25) \quad K c^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} + M L_1^{x_1} \dots L_m^{x_m} c^{t_1 + \dots + t_m} = c$$

et p est la solution de l'équation:

$$(6.26) \quad d_1 + d_2 p + \dots + d_m p^{m-1} = p^m$$

en (6.25) nous avons écrit $t_j = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} r_i; j = \overline{1, m}$ et en

(6.26) nous avons écrit $d_i = \min \{\alpha_i, t_i\}; i = \overline{1, m};$

iv) la sphère au centre en x_0 et au rayon

(6.27)

$$R = \max \left\{ \|x_1 - x_0\|, \dots, \|x_{m-1} - x_0\|, \|x_m - x_0\| + L_m c^{\beta_{m1} + \dots + \beta_{mm}} \frac{d^{\omega_m}}{1 - d^{\omega_m(p-1)}} \right\}$$

où

$$(6.28) \quad \omega_m = \beta_{m1} + \beta_{m2} p + \dots + \beta_{mm} p^{m-1}$$

est incluse dans D , alors on a les conclusions i) et ii) du théorème 6.6 et de plus les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$(6.29) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq L_m c^{\beta_{m1} + \dots + \beta_{mm}} d^{\omega_m} p^{n-m+1}; n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

$$(6.30) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq L_m c^{\beta_{m1} + \dots + \beta_{mm}} \frac{d^{\omega_m p^n}}{1 - d^{\omega_m p^n(p-1)}}; n \in \mathbb{N}, n \geq m$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème coïncide pour la plupart avec celle du théorème 6.6. La différence entre ces deux démonstrations consiste en la manière d'établir la propriété b) qui ici prend la forme:

$$\|f(x_n)\| \leq C_1 d^{p^n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si nous envisageons la formule d'interpolation de type Hermite (1.18) nous déduisons que :

$$\begin{aligned} (6.31) \quad \|f(Q(x_1, \dots, x_m))\| &\leq \|f(Q(x_1, \dots, x_m)) - H_m(x_1, \dots, x_m; f)Q(x_1, \dots, x_m)\| \\ &\quad + \|H_m(x_1, \dots, x_m; f)Q(x_1, \dots, x_m)\| \leq \\ &\leq \| [x_1, \dots, x_m, x; f] \| \|Q(x_1, \dots, x_m) - x\|^{k_1} \dots \|Q(x_1, \dots, x_m) - x\|^{k_m} + \\ &\quad + \|H_m(x_1, \dots, x_m; f)Q(x_1, \dots, x_m)\| \end{aligned}$$

De (6.31) et en tenant compte des hypothèses i) - iii) on déduit:

$$\begin{aligned} (6.32) \quad \|f(Q(x_1, \dots, x_m))\| &\leq K \|f(x_0)\|^{k_1} \dots \|f(x_m)\|^{k_m} + \\ &\quad + M L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m} \|f(x_0)\|^{\sum_{i=1}^m \beta_i k_i} \dots \|f(x_m)\|^{\sum_{i=1}^m \beta_i k_m} \end{aligned}$$

pour chaque $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{D}$.

Si nous posons $\delta_j = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} r_i$, relativement à la suite par

Q , de (6.32) on a :

$$\begin{aligned} (6.33) \quad \|f(x_{n+1})\| &\leq K \|f(x_{n-m+1})\|^{\alpha_1} \dots \|f(x_n)\|^{\alpha_m} + \\ &\quad + M L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m} \|f(x_{n-m+1})\|^{\delta_1} \dots \|f(x_n)\|^{\delta_m} \end{aligned}$$

Des hypothèses de l'induction il résulte que :

$$\begin{aligned} (6.34) \quad \|f(x_{n+1})\| &\leq K c^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} d^{p^{n-m+1}(\alpha_1 + \alpha_2 p + \dots + \alpha_m p^{m-1})} \\ &\quad + M L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m} c^{\delta_1 + \dots + \delta_m} d^{p^{n-m+1}(\delta_1 + \delta_2 p + \dots + \delta_m p^{m-1})} \end{aligned}$$

Du fait que $\delta_i = \min \{\alpha_i, \delta_1\}$; $i = \overline{1, m}$ il résulte que

$$\alpha_1 + \alpha_2 p + \dots + \alpha_m p^{m-1} \geq \delta_1 + \delta_2 p + \dots + \delta_m p^{m-1} = p^m$$

et

$$\delta_1 + \delta_2 p + \dots + \delta_m p^{m-1} \geq \delta_1 + \delta_2 p + \dots + \delta_m p^{m-1} = p^m$$

En conséquence, du fait que $d < 1$ nous déduisons que :

$$(6.35) \quad \|f(x_{n+1})\| \leq (K c^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} + M L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m} c^{\delta_1 + \dots + \delta_m}) d^{p^{n+1}}$$

Du fait que le nombre réel et positif c est la solution de l'équation (6.25) il résulte

$$(6.36) \quad \|f(x_{n+1})\| \leq c d^{p^{n+1}}.$$

L'inégalité (6.36) représente la propriété b) pour n remplacé par $n+1$, donc en vertu du principe de l'induction cette propriété est vraie pour chaque nombre naturel n .

Pour le reste, les conclusions du théorème (6.7) résultent dans une manière analogue à celle du théorème 6.6. Le théorème est donc démontré.

Remarque 6.8. L'équation (6.25) admet en effet une racine positive. En effet l'équation (6.25) est équivalente à l'équation suivante :

$$a c^{u_1} + b c^{u_2} = 1,$$

où nous avons écrit $u_1 = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_m - 1$, $u_2 = \delta'_1 + \dots + \delta'_m - 1$ et $a = K$, $b = M L_1^{k_1} \dots L_m^{k_m}$.

Du fait que la fonction $f(x) = a x^{u_1} + b x^{u_2} - 1$ a la dérivée

$f'(x) = a u_1 x^{u_1-1} + b u_2 x^{u_2-1}$ qui est positive il résulte que cette fonction est croissante dans l'intervalle $[0, +\infty[$. Du fait que $f(0) = -1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ il résulte que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine positive.

Donc le nombre c qui intervient dans le théorème (6.7) existe et il est unique.

Remarque 6.9. Si nous considérons le cas particulier $m = 1$ nous retrouvons le théorème établi par I. PAVALOIU en [5], [7], relativement à la convergence des procédés itératifs à un seul pas d'itération.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIACONU A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenues par l'interpolation inverse (I), "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research seminars, Seminar of functional analysis and numerical methods, Preprint Nr. 4 1981, 1-51.
- [2] DIACONU, A., Sur la dérivée de type Fréchet d'ordre n de l'application inverse ; "Babeş-Bolyai" University Faculty of Mathematics, Research seminars, Seminar of functional analysis and numerical methods, Preprint Nr. 1 1983, 42 - 70.
- [3] DIACONU, A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenues par l'interpolation inverse (II) ; "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research seminars, Seminar of functional analysis and numerical methods, Preprint Nr. 1, 1984, 41 - 96.
- [4] PAVALOIU, I., Interpolation dans des espaces linéaires normés et applications, Mathematica, Cluj, 12, (35), 1, (1970) 149 - 158.
- [5] PAVALOIU, I., Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence, Mathematica, Cluj, 12, (35), 2; (1970) 309 - 324.
- [6] PAVALOIU, I., Asupra operatorilor iterativi, Studii şi cercetări

matematica, 23 (10), (1971), 1537 - 1544.

- [7] PAVALOIU, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor, Editura Dacia, Cluj-Napoca 1976.
- [8] PAVALOIU, I., Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.
- [9] TUROWICZ, B. A., Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse, Colloq. Math. (1959), 83 - 87.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1985, pp. 71 - 78.

RESOLUTION DES ÉQUATIONS À L'AIDE DES FONCTIONS RATIONNELLES D'INTERPOLATION INVERSE

G. Iancu et I. Păvăloiu

1. Désignons par $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, où I est un intervalle de l'axe réel.

Désignons par x_0, x_1, x_2 trois points distincts de I . Considérons l'ensemble $\varphi_{a,b,\alpha,\beta}$ des fonctions de la forme :

$$(1) \quad \varphi(x) = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}, \quad \alpha \neq 0,$$

où a, b, α, β sont des paramètres réels qu'il s'agit de déterminer de telle manière que la fonction φ coïncide avec la fonction f aux points x_0, x_1 et x_2 , c'est-à-dire

$$(2) \quad \varphi(x_0) = f(x_0), \quad \varphi(x_1) = f(x_1), \quad \varphi(x_2) = f(x_2).$$

Nous supposons d'abord que $x_0 \neq x_1, x_1 \neq x_2$ et $f(x_0) \neq f(x_1), f(x_1) \neq f(x_2), f(x_0) \neq f(x_2)$.

Nous déduisons de (1) et (2)

$$(3) \quad \frac{ax_0 + b}{\alpha x_0 + \beta} = f(x_0), \quad \frac{ax_1 + b}{\alpha x_1 + \beta} = f(x_1), \quad \frac{ax_2 + b}{\alpha x_2 + \beta} = f(x_2).$$

Le système (3) contient 4 inconnues, dont 3 seulement sont essentielles. Si aux équations (3) nous ajoutons (1) et éliminons les paramètres a, b, α, β , nous obtenons l'égalité

$$(4) \quad \frac{\varphi(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_0)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{(x - x_1)(x_2 - x_0)}{(x - x_0)(x_2 - x_1)}$$