

matematică, 23 (10), (1971), 1537 - 1544.

- [7] PAVALOIU, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor, Editura Dacia, Cluj-Napoca 1976.
- [8] PAVALOIU, I., Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.
- [9] TUROWICZ, B. A., Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse, Colloq. Math. (1959), 83 - 87.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1985, pp. 71 - 78.

RESOLUTION DES ÉQUATIONS À L'AIDE DES FONCTIONS RATIONNELLES D'INTERPOLATION INVERSE

G. Iancu et I. Păvăloiu

1. Désignons par $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, où I est un intervalle de l'axe réel.

Désignons par x_0, x_1, x_2 trois points distincts de I . Considérons l'ensemble $\varphi_{a,b,\alpha,\beta}$ des fonctions de la forme :

$$(1) \quad \varphi(x) = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}, \quad \alpha \neq 0,$$

où a, b, α, β sont des paramètres réels qu'il s'agit de déterminer de telle manière que la fonction φ coïncide avec la fonction f aux points x_0, x_1 et x_2 , c'est-à-dire

$$(2) \quad \varphi(x_0) = f(x_0), \quad \varphi(x_1) = f(x_1), \quad \varphi(x_2) = f(x_2).$$

Nous supposons d'abord que $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq \frac{x_0 + x_2}{2}$ et $f(x_0) \neq f(x_1)$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, $f(x_0) \neq f(x_2)$.

Nous déduisons de (1) et (2)

$$(3) \quad \frac{ax_0 + b}{\alpha x_0 + \beta} = f(x_0), \quad \frac{ax_1 + b}{\alpha x_1 + \beta} = f(x_1), \quad \frac{ax_2 + b}{\alpha x_2 + \beta} = f(x_2).$$

Le système (3) contient 4 inconnues, dont 3 seulement sont essentielles. Si aux équations (3) nous ajoutons (1) et éliminons les paramètres a, b, α, β , nous obtenons l'égalité

$$(4) \quad \frac{\varphi(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_0)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{(x - x_1)(x_2 - x_0)}{(x - x_0)(x_2 - x_1)}$$

d'où il résulte

$$(5) \quad \frac{\varphi(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - f(x_0)} = \frac{[x_1, x_2; f]}{[x_0, x_2; f]} \cdot \frac{x - x_1}{x - x_0}$$

De (5) nous déduisons pour les paramètres a, b, α, β les expressions suivantes

$$(6) \quad \begin{aligned} a &= f(x_1) [x_0, x_2; f] - f(x_0) [x_1, x_2; f] \\ b &= x_1 f(x_0) [x_1, x_2; f] - x_0 f(x_1) [x_0, x_2; f] \\ \alpha &= [x_0, x_2; f] - [x_1, x_2; f] \\ \beta &= [x_1, x_2; f] x_1 - [x_0, x_2; f] x_0 \end{aligned}$$

où nous avons désigné par $[x, y; f]$ la différence divisée de la fonction f sur les points x et y .

De cette manière la fonction φ donnée par (1) qui vérifie les conditions (2) est parfaitement déterminée.

Dans ce qui suit nous désignons, pour fixer les idées, par F l'image de l'intervalle I par la fonction f et nous supposons qu'il existe $f^{-1}: F \rightarrow I$.

Si $\bar{x} \in I$ est une racine de l'équation

$$(7) \quad f(x) = 0,$$

alors $0 \in F$ et évidemment $\bar{x} = f^{-1}(0)$.

Considérons à présent l'ensemble $\varphi_{a', b', \alpha', \beta'}$ des fonctions définies sur $R - \{-\frac{a'}{\alpha'}\}$ à valeurs dans R , de la forme suivante:

$$(8) \quad \varphi(y) = \frac{a'y + b'}{\alpha'y + \beta'}, \quad \alpha' \neq 0.$$

Nous déterminerons les paramètres a', b', α', β' de telle sorte que la fonction (8) vérifie les conditions

$$(9) \quad \varphi(x_0) = x_0, \quad \varphi(x_1) = x_1, \quad \varphi(x_2) = x_2,$$

où $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

En procédant comme ci-dessus nous déduisons pour les paramètres a', b', α', β' les expressions suivantes:

$$(10) \quad \begin{aligned} a' &= x_1 [x_1, x_2; f] - x_0 [x_0, x_2; f] \\ b' &= f(x_1) x_0 [x_0, x_2; f] - f(x_0) x_1 [x_1, x_2; f] \\ \alpha' &= [x_1, x_2; f] - [x_0, x_2; f] \\ \beta' &= f(x_1) [x_0, x_2; f] - f(x_0) [x_1, x_2; f] \end{aligned}$$

La fonction φ donnée par (8) où a', b', α', β' ont les valeurs (10) représente la fonction rationnelle d'interpolation inverse de la fonction f . Une approximation pour la racine $\bar{x}$ de l'équation (7) s'obtient de la sorte:

$$(11) \quad \bar{x} \approx \varphi(0) = \frac{x_0 f(x_1) [x_0, x_2; f] - x_1 f(x_0) [x_1, x_2; f]}{f(x_1) [x_0, x_2; f] - f(x_0) [x_1, x_2; f]}$$

En utilisant (11) on peut obtenir diverses méthodes itératives pour la résolution de l'équation (7).

On obtient une première méthode en se donnant les points x_0 et x_1 et en prenant $x_2 = z_0$. Il résulte alors de (11) la méthode itérative suivante:

$$(12) \quad x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_1) [x_0, z_n; f] - x_1 f(x_0) [x_1, z_n; f]}{f(x_1) [x_0, z_n; f] - f(x_0) [x_1, z_n; f]}, \quad z_0 = x_2,$$

$n = 0, 1, \dots$

Nous supposons que $f(x_1)/f(x_0) \neq [x_1, \bar{x}; f]/[x_0, \bar{x}; f]$ et que les éléments de la suite $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ peuvent être déterminés. Si la suite $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \bar{x}$, il s'ensuit immédiatement que $f(\bar{x}) = 0$, c'est-à-dire que $\bar{x}$ est la racine de l'équation $f(x) = 0$.

On peut obtenir une autre méthode itérative en se donnant, par exemple, le point x_0 et en prenant $x_1 = z_0$ et $x_2 = z_1$.

Il résulte alors de (11)

$$(13) \quad z_{n+1} = \frac{x_0 f(z_{n-1}) [x_0, z_n; f] - z_{n-1} f(x_0) [z_{n-1}, z_n; f]}{f(z_{n-1}) [x_0, z_n; f] - f(x_0) [z_{n-1}, z_n; f]}$$

où $z_0 = x_1$, $z_1 = x_2$, $n = 1, 2, \dots$

On prouve facilement, dans les conditions analogues à celles de la méthode (12) que si la suite (z_n) générée par (13) est convergente et $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, alors $f(\bar{x}) = 0$.

Remarque 1. L'approximation donnée par (11) pour $\bar{x}$ peut se mettre sous la forme

$$(14) \quad \bar{x} \approx x_0 - \frac{f(x_0) [x_1, x_2; f]}{[x_0, x_1; f] \cdot [x_0, x_2; f] - f(x_0) [x_0, x_1, x_2; f]}$$

Remarque 2. Supposons que $x_0 < x_1 < x_2$ et $\max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1)\} < \left| \frac{[x_0, x_2; f]}{[x_0, x_1, x_2; f]} \right|$. Ceci nous assure que la fonction φ donnée par (1) avec a, b, α, β donnés par (6) est continue et indéfiniment dérivable dans l'intervalle $[x_0, x_2]$, c'est-à-dire $-\frac{\beta}{\alpha} \notin [x_0, x_2]$.

Si $x \in [x_0, x_2]$, et si nous supposons que la fonction f admet des dérivées jusqu'au 3-ème ordre inclusivement dans l'intervalle (x_0, x_2) , alors il est facile de voir qu'il existe au moins un point $\xi \in (x_0, x_2)$ tel que

$$(15) \quad f(x) - \varphi(x) = \frac{f'''(\xi) - \varphi'''(\xi)}{6} \omega(x),$$

où $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ et $\varphi'''(x) = \frac{6\alpha^2(\alpha\beta - \alpha't')}{(\alpha x + \beta)^4}$.

En ajoutant aux hypothèses ci-dessus les conditions $f'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in (x_0, x_2)$ et $\max\{|f(x_1) - f(x_0)|, |f(x_2) - f(x_1)|\} < \left| \frac{[x_1, x_2; f] [x_0, x_1; f]}{[x_0, x_1, x_2; f]} \right|$ on obtient de (15) l'évaluation sui-

vante :

$$(16) \quad |f^{-1}(0) - \varphi(0)| \leq \frac{|(f^{-1}(\xi))''' - \varphi'''(\xi)|}{6} |f(x_0)| |f(x_1)| |f(x_2)|$$

où $\varphi'''(\xi) = \frac{6\alpha^2(\alpha\beta' - \alpha't')}{(\alpha'\xi + \beta')^4}$, $\xi \in (u, v)$ où

$$u = \min\{f(x_0), f(x_2)\} \quad \text{et} \quad v = \max\{f(x_0), f(x_2)\}.$$

À propos de la délimitation (16) nous avons supposé que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine dans l'intervalle (x_0, x_2) .

L'inégalité (16) représente une délimitation de l'erreur commise en approximant la racine $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ par $\frac{\xi'}{\beta'}$ donnée par l'expression (11).

On remarque dans (16) que $\frac{\xi'}{\beta'}$ approche $\bar{x}$ d'autant mieux que $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ sont plus proches de zéro.

Nous nous proposons à présent de déterminer une fonction de la forme (8) qui vérifie les conditions

$$(17) \quad \varphi(y_0) = x_0; \quad \varphi'(y_0) = 1/f'(x_0); \quad \varphi(y_1) = x_1.$$

Nous déduisons de ces conditions pour les coefficients a', b', α', β' les expressions suivantes :

$$(18) \quad \begin{aligned} a' &= x_1 [x_0, x_1; f] - x_0 f'(x_0) \\ b' &= f(x_1) x_0 f'(x_0) - f(x_0) x_1 [x_0, x_1; f] \\ \alpha' &= [x_0, x_1; f] - f'(x_0) \\ \beta' &= f(x_1) \cdot f'(x_0) - f(x_0) [x_0, x_1; f] \end{aligned}$$

qui nous conduisent à l'approximation suivante pour $\bar{x}$:

$$(19) \quad \bar{x} \approx \frac{b'}{\beta'} = \frac{x_0 f(x_1) f'(x_0) - x_1 f(x_0) [x_0, x_1; f]}{f(x_1) f'(x_0) - f(x_0) [x_0, x_1; f]}$$

Dans l'hypothèse $f'(x) \neq 0$ dans l'intervalle (x_0, x_1) il existe la délimitation suivante :

$$(20) \quad \left| \bar{x} - \frac{b'}{\beta'} \right| \leq \frac{|(f^{-1}(\xi))''' - \varphi'''(\xi)|}{6} |f(x_0)|^2 \cdot |f(x_1)|$$

où $\xi \in (u', v')$, où $u' = \min\{f(x_0), f(x_1)\}$ et $v' = \max\{f(x_0), f(x_1)\}$, et la fonction φ a la forme (8) avec les coefficients donnés par (18).

Nous allons supposer à présent que nous connaissons les valeurs de la fonction f aux points $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, où $x_i \in I$, $i = 0, 1, \dots, n$ ainsi que la valeur de la dérivée de la fonction f au point x_0 . Nous désignerons, pour fixer les idées, par s le plus petit nombre naturel pour lequel l'équation $f(x) = 0$ admet une racine dans l'intervalle (x_s, x_{s+1}) . Nous supposons que $f'(x) > 0, \forall x \in I$.

Nous désignons par $\varphi_0 : [f(x_0), f(x_1)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de la forme

$$(21) \quad \varphi_0(y) = \frac{a_0 y + b_0}{\alpha_0 y + \beta_0}$$

Si nous exigeons que φ_0 satisfasse aux conditions

$$(22) \quad \varphi_0(y_0) = x_0, \quad \varphi_0'(y_0) = 1/f'(x_0), \quad \varphi_0(y_1) = x_1$$

où $y_i = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, alors les coefficients $a_0, b_0, \alpha_0, \beta_0$ ont la forme suivante :

$$(23) \quad \begin{aligned} a_0 &= x_1[x_0, x_1; f] - x_0 f'(x_0) \\ b_0 &= f(x_1) x_0 f'(x_0) - f(x_0) x_1 [x_0, x_1; f] \\ \alpha_0 &= [x_0, x_1; f] - f'(x_0) \\ \beta_0 &= f(x_1) \cdot f'(x_0) - f(x_0) [x_0, x_1; f] \end{aligned}$$

Nous déterminons à présent les fonctions

$$\varphi_i : [f(x_i), f(x_{i+1})] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ où}$$

$$(24) \quad \varphi_i(y) = \frac{a_i y + b_i}{\alpha_i y + \beta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de telle manière qu'elle satisfassent aux conditions :

$$(25) \quad \varphi_i(y_i) = x_i, \quad \varphi_i'(y_i) = \varphi_{i-1}'(y_i), \quad \varphi_i(y_{i+1}) = x_{i+1}, \\ i = 1, 2, \dots, s$$

Nous considérons alors comme une approximation pour la racine $\bar{x}$ de l'équation (7) le nombre

$$\bar{x}_p = \varphi_s(0)$$

Si nous écrivons $T_{i-1} = 1/\varphi_{i-1}'(y_i)$, alors nous obtenons pour les coefficients $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ de (24) les expressions suivantes :

$$(26) \quad \begin{aligned} a_i &= x_{i+1} [x_i, x_{i+1}; f] - x_i T_{i-1} \\ b_i &= f(x_{i+1}) x_i T_{i-1} - f(x_i) x_{i+1} [x_i, x_{i+1}; f] \\ \alpha_i &= [x_i, x_{i+1}; f] - T_{i-1} \\ \beta_i &= f(x_{i+1}) T_{i-1} - f(x_i) [x_i, x_{i+1}; f] \end{aligned}$$

Il résulte de la condition $\bar{x} \approx \varphi_s(0)$ l'expression suivante pour l'approximation de la racine $\bar{x}$:

$$(27) \quad \bar{x} \approx \frac{b_s}{\beta_s} = \frac{f(x_{s+1}) x_s T_{s-1} - f(x_s) x_{s+1} [x_s, x_{s+1}; f]}{f(x_{s+1}) T_{s-1} - f(x_s) [x_s, x_{s+1}; f]}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. IMAMOV, A., Reşenie nelineinîh uravnenii metodomi splain-interpolirovanie, Metodî splain-funkţii, Akademia Nauk SSSR., Novosibirsk, 81 (1979), 74 -80.
2. PAVALOIU, I., Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare, Editura Dacia, Cluj, 1981.
3. IANCU, G., PAVALOIU, I., Resolution des équations à l'aide des fonctions spline d'interpolation inverse, Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods, "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminars, Preprint Nr.1, (1984), 97 - 104.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1985, pp. 79 - 83.

ON A SURJECTIVITY THEOREM

Costică Mustăţa

It was proved in [3] that if X and Y are two Banach spaces and $F: X \rightarrow Y$ is a multifunction such that $F(X)$ is a closed subset of Y , then the multifunction F is surjective if and only if for every $b \in F(X)$ the tangent cone in b to the set $F(X)$ is Y .

In this note we shall give necessary and sufficient conditions for the surjectivity of a multifunction $F: X \rightarrow Y$, when X and Y are arbitrary metric spaces.

For a metric space Z and a fixed point $z_0 \in Z$ denote by $Lip_0(Z, R)$ the set of all real-valued Lipschitz functions on Z which vanish at z_0 , i.e.

$$(1) \quad Lip_0(Z, R) = \{f: Z \rightarrow R, f \text{ is Lipschitz and } f(z_0) = 0\}.$$

Recall that a function $f: Z \rightarrow R$ is called Lipschitz if there exists $M \geq 0$ such that

$$(2) \quad |f(z_1) - f(z_2)| \leq M d(z_1, z_2),$$

for all $z_1, z_2 \in Z$, where d denotes the metric of Z . The smallest number M for which (2) holds is called the Lipschitz norm of f and is denoted by $\|f\|$. The norm is given by:

$$(3) \quad \|f\| = \sup \{|f(z_1) - f(z_2)| / d(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in Z, z_1 \neq z_2\}.$$