

REFERENCES

1. CONNOR, J., J., BREBBIA, C., A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes-Butterworths, London, 1977.
2. MARČUK, G., I., AGOSKOV, V., I., Vvedenie v proekcionno setočne metody, Moskva, "Nauka", 1981.
3. MIHLIN, S., G., Variacionnye metody v matematicheskoj fizike, Moskva, "Nauka", 1970.
4. SAMARSKIJ, A., A., Vvedenie v teoriju raznostnyh shem, Moskva, "Nauka", 1971.
5. TELIAS, H., Résolution de l'équation de convection-diffusion et d'un modèle de circulations océaniques générales par des méthodes d'élément finis, thèse, l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1983.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 27 - 66.

COUPLES ITÉRATIFS. MÉTHODES ITÉRATIVES
OBTENUES À L'AIDE DES COUPLES ITÉRATIFS

Adrian Diaconu

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier une classe de méthodes, dénommées méthodes combinées, employées à la résolution des équations opérationnelles non-linéaires. Ces méthodes consistent à présenter deux suites, l'une pour approximer la solution de l'équation respective et l'autre l'inverse de la dérivée de type Fréchet calculée pour cette solution. L'exposé est basé sur la notion de couple itératif, notion qui représente une extension de la notion d'opérateur itératif. On introduit d'abord la notion de procédé itératif produit par un couple itératif et on présente un théorème concernant la convergence d'un tel procédé.

1. Introduction. Dans la théorie de l'approximation des solutions des équations opérationnelles, l'étude des opérateurs itératifs occupe une place très importante.

Considérons l'équation

$$(1.1) \quad f(x) = 0,$$

où 0 représente l'élément nul de l'espace Y , $f: X \rightarrow Y$; X et Y étant des espaces linéaires normés.

D'une manière analogue à celle adoptée dans [5], [8], [9], nous précisons la notion d'opérateur itératif attaché à l'équation (1.1) par la définition suivante :

Définition 1.1. L'application $Q : X \rightarrow X$ s'appelle opérateur itératif attaché à l'équation (1.1) si chaque solution de l'équation (1.1) vérifie aussi l'équation $Q(x) = x$.

Pour exemplifier la notion d'opérateur itératif nous considérons les exemples suivantes.

a) L'opérateur itératif de Newton - Kantorovitch $Q : X \rightarrow X$, $Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x)$, où pour chaque $x \in X$, $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ représente la dérivée de type Fréchet de l'application f au point x ; par $\mathcal{L}(X, Y)$ nous avons désigné l'ensemble des applications linéaires et continues définies sur l'espace X et à valeurs en l'espace Y . On voit donc qu'il est nécessaire de supposer d'abord l'existence et l'inversabilité de la dérivée de type Fréchet de f sur chaque point $x \in D \subset X$.

b) L'application (l'opérateur) itératif de Newton modifié : $Q : X \rightarrow X$, $Q(x) = x - A f(x)$, où $A : X \rightarrow X$ est une application linéaire donnée.

c) L'opérateur itératif de Traub : $Q : X \rightarrow X$; $Q(x) = \varphi(x) - [f'(\varphi(x))]^{-1} f(\varphi(x))$ où $f'(x)$ a la signification utilisée à a) et $\varphi : X \rightarrow X$ est un opérateur donné. Au cas $\varphi = I_X$ (l'application identique de X) nous retrouvons l'opérateur de Newton - Kantorovitch.

d) Au cas $\varphi : X \rightarrow X$ de a) est l'opérateur de Newton nous obtenons un autre cas particulier de l'opérateur de Traub à savoir :

$$Q : X \rightarrow X ; Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x) - [f'(x)]^{-1} f(x) - [f'(x)]^{-1} f(x) .$$

e) L'opérateur itératif de type Aitken - Stefenssen :

$$Q : X \rightarrow X ; Q(x) = \varphi_1(x) - [\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]^{-1} f(\varphi_1(x))$$

où $\varphi_1 : X \rightarrow X$ et $\varphi_2 : X \rightarrow X$ sont deux opérateurs itératifs donnés et $[x, y; f]$ représente la différence divisée de la fonction f sur les points $x, y \in D \subset X$.

La notion de différence divisée d'une fonction $f : X \rightarrow Y$ où X et Y sont des espaces linéaires normés s'introduit d'une manière similaire à celle adoptée dans les travaux [7], [8], [10], [11], les points $x, y \in D$ une application $[x, y; f] \in \mathcal{L}(X, Y)$ qui remplit les conditions suivantes :

$$i) [x, y; f] (x - y) = f(x) - f(y) ,$$

ii) si la dérivée de type Fréchet d'ordre premier $f'(x)$ existe, on a :

$$[x, x; f] = f'(x) .$$

Les différences divisées d'ordre supérieurs s'introduisent à l'aide de l'induction, c'est-à-dire en supposant que les différences divisées d'ordre $n-1$ sont définies, nous définirons la différence divisée d'ordre n de la fonction f sur les points $x_1, \dots, x_{n+1}$ comme une application $[x_1, \dots, x_{n+1}; f] \in \mathcal{L}_n(X, Y)$ qui remplit les conditions suivantes :

$$i) [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] (x_1 - x_j) = [x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}; f]$$

pour $1 \neq j$ et $(x_i)_{i=1, n+1}$ étant des points distincts.

ii) si la dérivée de type Fréchet d'ordre n de la fonction sur le point $x \in X$ existe, on a :

$$[x, \dots, x; f] = (1/n!) f^{(n)}(x) .$$

Par $\mathcal{L}_n(X, Y)$ nous avons désigné l'ensemble des applications

n linéaires et continues définies sur X^n à valeurs en Y .

Si dans l'expression de l'opérateur itératif de type Aitken-Steffensen nous posons $\varphi_1 = \varphi_2 = I_X$, nous obtenons l'opérateur itératif de Newton - Kantorovich. Pour $\varphi_1 = I$ et $\varphi_2 = \varphi$ nous obtenons l'opérateur itératif de Steffensen proprement dit :

$$Q : X \rightarrow X ; Q(x) = x - [x, \varphi(x) ; f]^{-1} f(\varphi(x)) .$$

À l'aide d'un opérateur itératif et d'un élément initial $x_0 \in X$ on peut construire la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la relation

$$x_{n+1} = Q(x_n) ; n = 0, 1, \dots$$

Cette suite s'appellera suite d'approximation produite par l'opérateur Q .

On pose le problème de déterminer les conditions dans lesquelles la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a comme limite la solution $\bar{x}$ de l'équation (1.1). En outre, du fait qu'il est évident qu'on peut obtenir une précision d'approximation donnée d'avance par un nombre différent de pas en cas d'opérateurs itératifs différents, on pose aussi la problème de caractériser la vitesse de convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une certaine caractérisation peut s'obtenir à l'aide de la notion d'ordre de convergence.

Définition 1.2. On supposera $p \in]0, +\infty[$ et $D \subset X$. L'opérateur itératif $Q : X \rightarrow X$ a l'ordre p sur l'ensemble D , s'il existe un nombre $K > 0$ tel que pour chaque $x \in D$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$(1.2) \quad \|f(Q(x))\| \leq K \|f(x)\|^p .$$

Si nous envisageons cette définition nous pouvons démontrer facilement les affirmations suivantes :

L'opérateur itératif de Newton - Kantorovich a l'ordre 2 et celui de Newton modifié a l'ordre 1. Pour l'opérateur itératif de Traub, on démontre que celui-ci a l'ordre de φ augmenté d'une unité. Dans le cas particulier où $\varphi(x) = x - [f'(x)]^{-1}f(x)$ il résulte que l'opérateur Q a l'ordre 3.

Dans le cas de l'opérateur de type Aitken - Steffensen on démontre que dans l'hypothèse que l'opérateur φ_1 a l'ordre p_1 et l'opérateur φ_2 a l'ordre p_2 , alors l'opérateur de type Aitken - Steffensen a l'ordre $p_1 + p_2$. Dans le cas particulier $\varphi_1 = I_X$ et $\varphi_2 = \varphi$, où l'ordre de l'opérateur φ est p , il résulte pour l'opérateur de Steffensen l'ordre $p + 1$.

Dans [6], [8], I. PAVLOIU a établi un théorème qui fournit des conditions suffisantes qui assurent l'ordre $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$ pour un opérateur itératif et aussi la convergence de la suite, fournie par cet opérateur vers la solution $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$.

Si nous examinons les opérateurs itératifs présentés dans les exemples ci-dessus, nous remarquerons que la plupart de ces opérateurs contiennent des applications linéaires inversées ; ce fait entraîne, dans le cas où nous appliquerons les méthodes itératives fournies par ces opérateurs, la nécessité de résoudre une équation opérationnelle linéaire à chaque pas d'itération. Du point de vue du calcul cela représente un problème difficile.

Pour amoindrir cette difficulté dans le cas de la méthode itérative de Newton, S. Ul'm construit dans [12] une méthode itérative qui utilise deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(Y, X)$ par les relations :

$$(1.3) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n f(x_n) \\ A_{n+1} = A_n (2I - f'(x_{n+1})A_n) \end{cases} \quad n=0, 1, \dots$$

où les éléments initiaux $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ sont arbitraires ; I est l'opérateur identique de Y .

Dans le travail mentionné, en supposant l'existence de la solution $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ et aussi de l'application linéaire $[f'(\bar{x})]^{-1}$ et en imposant à $\bar{x}$ et $[f'(\bar{x})]^{-1}$ quelques restrictions, S. Ul'm démontre la convergence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\bar{x}$ et $[f'(\bar{x})]^{-1}$ respectivement.

Dans les travaux [2], [3] nous avons étudié aussi la méthode (1.3). A l'aide de cette méthode nous avons donné un théorème d'existence de la solution de l'équation $f(x) = 0$ et nous avons démontré, dans l'hypothèse que x_0 est suffisamment proche de la solution $\bar{x}$ de $f(x) = 0$, et A_0 est suffisamment proche de $[f'(\bar{x})]^{-1}$ que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\bar{x}$ et $[f'(\bar{x})]^{-1}$ respectivement et que la vitesse de convergence a l'ordre 2.

Après le modèle de la méthode (1.3) nous avons considéré des méthodes construites en partant de la méthode de la corde.

$$(1.4) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n f(x_n) \\ A_{n+1} = A_n (2I - [x_n, x_{n+1}; f] A_n) \end{cases} \quad n=0, 1, \dots$$

où $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ sont arbitraires ; ou de la méthode de Steffensen :

$$(1.5) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n f(x_n) \\ A_{n+1} = A_n (2I - [x_n, \varphi(x_n); f] A_n) \end{cases} \quad n=0, 1, \dots$$

où $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ sont arbitraires et $\varphi : X \rightarrow X$ est un opérateur itératif qui remplit sur un ensemble $D \subset X$ les conditions suivantes :

$$\|x - \varphi(x)\| \leq \alpha \|f(x)\| ; \quad x \in D \quad \text{et}$$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L \|x - y\| ; \quad x, y \in D,$$

et L sont deux nombres réels positifs donnés.

Relativement aux méthodes (1.4) et (1.5) nous avons démontré que dans l'hypothèse que certaines conditions de rapprochement de x_0 à $\bar{x}$ et respectivement de A_0 à $[f'(\bar{x})]^{-1}$ sont remplies, les vitesses de convergence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont d'ordre $(1 + \sqrt{2})/2$ au cas de la méthode (1.4) et d'ordre 2 au cas de la méthode (1.5).

Les méthodes (1.3) - (1.4) ne peuvent pas être considérées comme fournies par un certain opérateur itératif, donc à ces méthodes on ne peut pas appliquer la notion d'ordre de convergence et les théorèmes impliqués par cette notion.

Il s'impose donc d'étendre la notion d'opérateur itératif et d'ordre d'un opérateur itératif.

2. Couple itératif. Procédé itératif fourni par un couple itératif.

La notion d'opérateur itératif peut être étendue comme suit.

Définition 2.1. Désignons par X et Y deux espaces linéaires normés. La paire (Q, R) , où $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ et $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$, s'appelle couple itératif attaché à l'équation $f(x) = 0$, si pour chaque solution $\bar{x}$ de cette équation les conditions suivantes sont remplies :

- 1) $Q(\bar{x}, A) = \bar{x}$ pour chaque $A \in \mathcal{L}(Y, X)$,
- 2) s'il existe $[f'(\bar{x})]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, alors $R(\bar{x}, [f'(\bar{x})]^{-1}) = [f'(\bar{x})]^{-1}$.

À propos de condition 2) nous remarquerons que la mission de l'application Q est l'approximation de la solution $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ et la mission de l'application R est l'approximation

mation de $[f'(\bar{x})]^{-1}$. A partir d'éléments initiaux, les applications Q et R fourniront des suites d'approximation. Dans l'obtention des ces suites les applications Q et R "s'aident" réciproquement. Cet circonstance justifie la dénomination de couple itératif.

A un couple itératif l'approximation des inverses de certaines applications linéaires a une importance spéciale. On connaît la méthode de Schultz [1] pour l'approximation de l'inverse d'une application linéaire. Ainsi au cas où $A \in \mathcal{L}(X, X)$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ et tels que $\|I - AA_0\| < 1$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation

$$(2.1) \quad A_{n+1} = A_n (2I - AA_n), \quad n=0,1,\dots$$

converge vers $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$; I étant l'application identique de Y .

La suite fournie par (2.1) peut se généraliser à la suite définie par la relation :

$$(2.2) \quad A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^n (I - AA_n)^k, \quad n=0,1,\dots$$

où $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ est une application arbitraire.

Nous remarquerons que pour $r=1$ la suite fournie par (2.2) revient à la suite fournie par (2.1).

De (2.2) on peut déduire immédiatement la relation suivante :

$$(2.3) \quad I - AA_{n+1} = (I - AA_n)^s \left[I - AA_n \sum_{k=0}^{n-s} (I - AA_n)^k \right]$$

pour chaque $s=1,2,\dots,r$. Pour $s=r$ il résulte de (2.3)

$$(2.4) \quad I - AA_{n+1} = (I - AA_n)^{r+1}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

De (2.4) on déduit immédiatement la relation suivante :

$$(2.5) \quad I - AA_n = (I - AA_{n-q})^{(r+1)^q}$$

pour chaque $q=1,2,\dots,n$ et $n \in \mathbb{N}$. Donc pour $q=n$ on a

$$(2.6) \quad I - AA_n = (I - AA_0)^{(r+1)^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$(2.7) \quad \|A^{-1} - A_n\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|I - AA_n\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|I - AA_0\|^{(r+1)^n}$$

d'où il résulte que dans le cas où $\|I - AA_0\| < 1$ la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation (2.2) est convergente vers A^{-1} , l'ordre d'approximation étant $r+1$.

Ces que nous avons présenté ci-dessus justifie la définition suivante :

Définition 2.2. Considérons deux espaces linéaires et normés X et Y et l'application $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle qu'il existe l'application $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. On appellera approximante d'ordre $r+1$ de l'application A^{-1} , l'application $S_{r+1}(A, B) \in \mathcal{L}(Y, X)$ définie par la relation suivante :

$$(2.8) \quad S_{r+1}(A, B) = B \sum_{k=0}^r (I - AB)^k$$

où $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ est une application arbitraire.

A l'aide de cette définition et de ce que nous avons présenté ci-dessus nous pouvons décrire une méthode par laquelle nous pouvons obtenir des couples itératifs qui ne contiennent pas les inverses de certaines applications linéaires.

Considérons un opérateur itératif quelconque et supposons qu'il contient pas l'inverse d'une application linéaire q fois. Nous remplaçons l'inverse de l'application envisagée $T(x)$ qui se trouve dans la position k par $S_{r+1}(T(x), B)$, $k=1,\dots,q$. On obtient de cette manière, l'application $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$. On définit l'application $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ par

$$R(x, A) = S_{B+1}(T(x), A)$$

où $T(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ est l'application pour laquelle nous approximations l'inverse.

Par exemple si nous considérons l'opérateur itératif de Tchébycheff

$$Q: X \rightarrow X; \quad Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x) - (1/2) [f'(x)]^{-1} f''(x),$$

$$\{ [f'(x)]^{-1} f(x) \}^2$$

et nous utilisons la méthode décrite ci-dessus nous obtenons le couple itératif (Q, R) où :

$$(2.1) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x - S_{A+1}(f'(x), A) f(x) - \\ \quad - \frac{1}{2} S_{A+1}(f'(x), A) f''(x) \{ S_{A+1}(f'(x), A) f(x), \\ \quad \quad \quad S_{A+1}(f'(x), A) f(x) \} \\ R(x, A) = S_{A+1}(f'(x), A) \end{cases}$$

Nous allons par la suite obtenir une extension de la notion d'ordre d'un opérateur itératif à celle d'ordre d'un couple itératif. Pour ce faire il est nécessaire d'introduire la notion de pseudodérivée d'une application $f: X \rightarrow Y$.

Nous désignerons par la suite par $\mathcal{I}_X(f)$ l'ensemble des opérateurs itératifs attachés à l'équation $f(x) = 0$.

Définition 2.3. Les applications $D^k f(x) \in \mathcal{L}_k(X, Y)$, $k=1, \dots, n$ s'appellent pseudodérivées d'ordre k de l'application $f: X \rightarrow Y$ au point $x \in \Omega \subset X$ si les conditions suivantes sont remplies :

1) Il existe un nombre $L > 1$ et les opérateurs $T_0, T_1, \dots, T_n \in \mathcal{I}_X(f)$ continus et tels que pour chaque $x, y \in \Omega$ on a la relation suivante :

$$(2.10) \quad \| f(x) - f(T_0 y) - \sum_{k=1}^n D^k f(y) (x - T_0 y)(x - T_1 y) \dots (x - T_{k-1} y) \| \leq$$

$$\leq L \| x - T_0 y \| \cdot \| x - T_1 y \| \cdot \dots \cdot \| x - T_n y \|^n$$

2) Pour chaque solution $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ qui a en même temps la propriété qu'il existe $f^{(k)}(\bar{x}) \in \mathcal{L}_k(X, Y)$ la dérivée d'ordre k de la fonction f sur $\bar{x}$, on a l'égalité

$$(2.11) \quad D^k f(\bar{x}) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Dans le cas où la fonction $f: X \rightarrow Y$ admet des dérivées de type Fréchet jusqu'à l'ordre n au point $x \in \Omega$, nous pouvons choisir $D^k f(x) = (1/k!) f^{(k)}(x)$, $k = 1, \dots, n$. Pour vérifier la relation (2.10) nous choisirons $T_k = I_X$ (I_X étant l'application identique de X) pour chaque $k = 1, \dots, n$ et ainsi la relation (2.10) revient à une formule de type Taylor.

Un autre exemple pour illustrer la notion de pseudodérivée peut être obtenu si nous considérons que elle sont données les applications $\varphi_i \in \mathcal{I}_X(f)$, $i = 0, \dots, n$ telles que $\varphi_i(\Omega) \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$ et nous définissons :

$$(2.12) \quad D^k f(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x); f], \quad k = \overline{1, n}$$

Il est évident que $D^k f(x) \in \mathcal{L}_k(X, Y)$. Si nous envisageons la formule d'interpolation de Newton sur les noeds $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)$ nous obtenons :

$$(2.13) \quad f(x) = f(\varphi_0(y)) + \sum_{k=1}^n [\varphi_0(y), \dots, \varphi_k(y); f] (x - \varphi_0(y)) \dots (x - \varphi_{k-1}(y)) + \\ + [\varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y); f] (x - \varphi_0(y)) (x - \varphi_1(y)) \dots (x - \varphi_n(y))$$

et si nous supposons que $L = \sup_{x_i \in \Omega, i=1, \dots, n} \| [x_1, \dots, x_{n+2}; f] \| < +\infty$ la relation (2.10) sera vérifiée si nous choisissons $T_i = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$.

Si nous tenons compte que $\bar{x}$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$, nous déduisons que $\varphi_i(\bar{x}) = \bar{x}$, $i = 1, \dots, n$ et en tenant compte de la définition de la différence divisée on a :

$$D^k f(\bar{x}) = [\varphi_0(\bar{x}), \varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_k(\bar{x}); f] = [\bar{x}, \dots, \bar{x}; f] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x})$$

et la relation (2.11) est aussi vérifiée. Par suite on peut déduire que les applications k -linéaires définies par (2.12) représentent des pseudodérivées d'ordre k , $k = 1, \dots, n$.

À l'aide de ces notions nous pouvons maintenant introduire la notion d'ordre d'un couple itératif.

Définition 2.4. Le couple itératif (Q, R) , $Q: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$, $R: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ à l'ordre $p \in]0, +\infty[$ sur l'ensemble $\Omega \times \Omega_1 \subseteq X \times \mathcal{L}(Y, X)$ s'il existe les nombres $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ et $K_i, \alpha_i, \beta_i \in [0, +\infty[$ pour $i = \overline{1, m_1}$ et $L_i, \gamma_i, \delta_i \in [0, +\infty[$ pour $i = \overline{1, m_2}$ tels que :

$$\min \{ \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{m_1} + \beta_{m_1}, \gamma_1 + \delta_1, \dots, \gamma_{m_2} + \delta_{m_2} \} = p$$

et aussi tels que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$a) \| f(Q(x, A)) \| \leq \sum_{i=1}^{m_1} K_i \| f(x) \|^{ \alpha_i } \| I - Df(x) A \|^{ \beta_i }$$

pour chaque $x \in \Omega$ et pour chaque $A \in \Omega_1$, et :

$$b) \| I - Df(x) R(x, A) \| \leq \sum_{i=1}^{m_2} L_i \| f(x) \|^{ \gamma_i } \| I - Df(x) A \|^{ \delta_i }$$

pour chaque $x \in \Omega$ et pour chaque $A \in \Omega_1$, où $Df(x) \in \mathcal{L}(X, X)$ est une pseudodérivée du premier ordre de l'application $f: X \rightarrow Y$ au point x .

Remarque 2.5. Chaque opérateur itératif $\varphi: X \rightarrow X$ peut être considéré un couple. Dans ce cas nous définirons $Q(x, A) = \varphi(x)$ et $R(x, A) = [Df(x)]^{-1}$ où nous avons supposé auparavant qu'il existe une pseudodérivée du premier ordre et qu'elle est inversable au point x . Ainsi les inégalités a) et b) de la définition 2.4 sont vérifiées avec $m_1 = 1$, $K_1 = K$, $\alpha_1 = p$, $\beta_1 = 0$, $m_2 = 0$. Ainsi la notion d'ordre d'un couple itératif généralise celle d'ordre d'un opérateur itératif introduit par la définition 1.2.

Nous écrirons par la suite $K = (K_i)_{i=\overline{1, m_1}}$, $\alpha = (\alpha_i)_{i=\overline{1, m_1}}$, $\beta = (\beta_i)_{i=\overline{1, m_1}}$, $L = (L_i)_{i=\overline{1, m_2}}$, $\gamma = (\gamma_i)_{i=\overline{1, m_2}}$, $\delta = (\delta_i)_{i=\overline{1, m_2}}$ et nous désignerons par $\mathcal{Q}_{p, m_1, m_2}^{(K, \alpha, \beta, L, \gamma, \delta)}$ l'ensemble des couples itératifs qui vérifient sur l'ensemble $\Omega \times \Omega_1$ relativement à la fonction f les inégalités a) et b) de la définition 2.4.

À l'aide d'un couple itératif la résolution de l'équation $f(x) = 0$ revient à la résolution dans l'espace $X \times \mathcal{L}(Y, X)$ du système :

$$(2.14) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x \\ R(x, A) = A \end{cases}$$

Nous précisons maintenant la notion de procédé itératif fourni par un couple itératif.

Définition 2.5. On appelle procédé itératif fourni par le couple itératif (Q, R) la paire de suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ arbitraires et

$$(2.15) \quad \begin{cases} x_{n+1} = Q(x_n, A_n) \\ A_{n+1} = R(x_{n+1}, A_n) \end{cases}$$

Dans la dernière partie de ce paragraphe nous considérons

quelques exemples :

A) Le cas des couples itératifs de type Traub.

Si nous appliquons la méthode décrite ci-dessus à l'opérateur itératif de Traub nous obtenons le couple itératif (Q, R) où les applications

$$Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X \quad \text{et} \quad R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$$

sont définies par les relations suivantes :

$$(2.16) \quad \begin{cases} Q(x, A) = \varphi(x) - A \left[\sum_{k=0}^h (I - f'(x)A)^k \right] f(\varphi(x)) \\ R(x, A) = A \left[\sum_{k=0}^h (I - f'(x)A)^k \right] \end{cases}$$

où $\varphi : X \rightarrow X$ est un opérateur itératif quelconque et $f'(x)$ représente la dérivée de type Fréchet de l'application $f : X \rightarrow Y$, l'existence de cette dérivée étant supposée sur un ensemble $\Omega \subset X$

Supposons maintenant que sur l'ensemble $\Omega \subset X$ sont remplies les conditions suivantes :

i₁) l'opérateur itératif φ a l'ordre $p \in [0, +\infty[$ sur l'ensemble Ω et il existe le nombre $\beta > 0$ tel que $\|\varphi(x) - x\| \leq \beta \|f(x)\|$ pour chaque $x \in \Omega$.

ii₁) l'application $f' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ remplit la condition de Lipschitz sur Ω c'est-à-dire il existe le nombre $L > 0$ tel que $\|f'(x) - f'(y)\| \leq L \|x - y\|$ pour chaque $x, y \in \Omega$;

iii₁) pour chaque $x \in \Omega$ il existe $[f'(x)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ et il existe aussi le nombre $B > 0$ tel que $\|[f'(x)]^{-1}\| \leq B$ pour chaque $x \in \Omega$;

iv₁) il existe un ensemble $\Omega_1 \subset \mathcal{L}(Y, X)$ tel que pour chaque $x \in \Omega$ et pour chaque $A \in \Omega_1$ il résulte que $\varphi(x), Q(x, A) \in \Omega$.

En ce qui concerne l'ordre du couple défini par les relations (2.16) on a le Théorème suivant :

THÉORÈME 2.1 . Si les conditions i₁) - iv₁) sont remplies le couple (Q, R) défini par les relations (2.16) a l'ordre

$$\alpha = \min \{ 2p, r+p+1, p+1, s+1 \}$$

sur l'ensemble $\Omega \times \Omega_1$.

Démonstration . Considérons l'application $S_q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ définie par $S_q(x, A) = A \sum_{k=0}^q (I - f'(x)A)^k$. Si nous envisageons la manière de démonstration de la relation (2.4) nous déduisons que :

$$(2.17) \quad \|I - f'(x) S_q(x, A)\| \leq \|I - f'(x) A\|^{q+1}$$

pour chaque $q \in \mathbb{N}$.

En outre on a :

$$(2.18) \quad \|f(Q(x, A))\| \leq \|f(Q(x, A)) - f(\varphi(x)) - f'(\varphi(x))(Q(x, A) - \varphi(x))\| + \|f(\varphi(x)) + f'(\varphi(x))(Q(x, A) - \varphi(x))\|$$

pour chaque $x \in \Omega$ et $A \in \Omega_1$.

Si nous envisageons la condition ii₁) nous déduisons que

$$(2.19) \quad \|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\| \leq (L/2) \|y - x\|^2$$

pour chaque $x, y \in \Omega$ (Pour la démonstration de (2.19) on peut consulter [8]). Du fait que $\varphi(x) \in \Omega$ et aussi $Q(x, y) \in \Omega$ nous déduisons que :

$$(2.20) \quad \|f(Q(x, A)) - f(\varphi(x)) - f'(\varphi(x))(Q(x, A) - \varphi(x))\| \leq \frac{L}{2} \|Q(x, A) - \varphi(x)\|^2$$

De (2.16) on déduit

$$(2.21) \quad \|Q(x, A) - \varphi(x)\| \leq \|S(x, A)\| \cdot \|f(\varphi(x))\|$$

De i₁) il résulte qu'il existe le nombre $K > 0$ tel que :

$$(2.22) \quad \|f(\varphi(x))\| \leq K \|f(x)\|^p$$

Il résulte aussi que

$$(2.23) \quad \|S(x, A)\| \leq \|A\| \sum_{k=0}^{\infty} \|I - f'(x) A\|^k$$

et

$$(2.24) \quad \|A\| \leq B (1 + \|I - f'(x) A\|)$$

En outre :

$$(2.25) \quad \begin{aligned} & \|f(\varphi(x)) + f'(\varphi(x)) (Q(x, A) - \varphi(x))\| \leq \\ & \leq \|I - f'(\varphi(x)) S_n(x, A)\| \cdot \|f(\varphi(x))\| \leq K (\|I - f'(x) S_n(x, A)\| + \\ & + \|f'(x) - f'(\varphi(x))\| \cdot \|S_n(x, A)\|) \cdot \|f(x)\|^p \leq \\ & \leq K \|f(x)\|^p \cdot \|I - f'(x) A\|^{n+1} + LBK\beta \|f(x)\|^{p+1} (1 + \|I - f'(x) A\|) \sum_{k=0}^n \|I - f'(x) A\|^k \end{aligned}$$

De (2.18), (2.20) - (2.25) on déduit la relation suivante :

$$(2.26) \quad \|f(Q(x, A))\| \leq \frac{LB^2K^2}{2} \|f(x)\|^{2p} (1 + \|I - f'(x) A\|)^2 \left(\sum_{k=0}^n \|I - f'(x) A\|^k \right)^2 + K \|f(x)\|^p \cdot \|I - f'(x) A\|^{n+1} + LBK\beta \|f(x)\|^{p+1} (1 + \|I - f'(x) A\|) \sum_{k=0}^n \|I - f'(x) A\|^k$$

La relation (2.26) indique le fait que la condition a) de la définition 2.4 est remplie avec $m_1 = \frac{3(n+1)(n+2)}{2} + 2n+3$ et $\min \{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{m_1} + \beta_{m_1}\} = \min \{2p, n+p+1, p+1\}$.

En outre est évident que :

$$(2.27) \quad \|I - f'(x)R(x, A)\| \leq \|I - f'(x)A\|^{s+1}$$

c'est-à-dire que la condition b) de la définition 2.4 est

remplie avec $m_2 = 1$ et $\tau_1 + \delta_1 = s+1$.

Donc $\min \{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{m_1} + \beta_{m_1}, \tau_1 + \delta_1, \dots, \tau_{m_2} + \delta_{m_2}\} = \min \{2p, n+p+1, p+1, s+1\}$

et le théorème est démontré.

Remarque 2.1. Du théorème 2.1 on déduit que l'ordre du couple itératif considéré ne peut pas dépasser le nombre $p+1$. Donc nous obtenons le plus grand ordre par un minimum d'opérations

au cas où nous choisirons $r = 0$ et :

$$(2.28) \quad s = \begin{cases} p & \text{pour } p \in \mathbb{N} \\ [p] + 1 & \text{pour } p \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

où $[p]$ est la partie entière de nombre p . En ce cas nous obtenons le couple (Q, R) où :

$$(2.29) \quad \begin{aligned} Q(x, A) &= \varphi(x) - A f(\varphi(x)) \\ R(x, A) &= A \sum_{k=0}^s (I - f'(x) A)^k \end{aligned}$$

où $s \in \mathbb{N}$ a la signification précisée par (2.28).

Dans le cas particulier $\varphi = I$, cas qui représente le cas des couples obtenus de l'opérateur de Newton, on a $p = 1$, donc l'ordre du couple (Q, R) sera égal à 2 et on obtiendra le couple le plus avantageux pour $s = 1$. Ce couple sera défini par les relations suivantes :

$$(2.30) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x - A f(x) \\ R(x, A) = A (2I - f'(x) A) \end{cases}$$

Ce couple fournit le procédé itératif (1.5).

Au cas où l'on choisit $\varphi(x) = x - A_0 f(x)$, qui représente le couple de Newton modifié, nous obtenons le couple le plus avantageux

$$(2.31) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x - A_0 f(x) - A f(x - A_0 f(x)) \\ R(x, A) = A (2I - f'(x) A) \end{cases}$$

Remarque 2.2. Si nous considérons l'opérateur itératif $Q : I \rightarrow I$ défini par

$$Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x) - [f'(x)]^{-1} f(x - [f'(x)]^{-1} f(x))$$

nous obtenons le couple itératif (Q, R) où :

$$(2.32) \begin{cases} Q(x, A) = x - AS_{r_1}(f'(x), A)f(x) - AS_{r_2}(f'(x), A) \cdot f(x - AS_{r_3}(f'(x), A)) \\ R(x, A) = S_s(f'(x), A) \end{cases}$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 2.1 nous déduisons que l'ordre de ce couple est

$$p = \begin{cases} \min \{3, s+1\} & \text{pour } r_1 = r_3 \\ \min \{3, r'+1, s+1\} & \text{pour } r_1 \neq r_3 \text{ et } r' = \min\{r_1, r_3\} \end{cases}$$

Donc on obtiendra couple le plus avantageux pour $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ et $s = 2$ et ce couple sera défini par les relations suivantes :

$$(2.33) \begin{cases} Q(x, A) = x - Af(x) - Af(x - Af(x)) \\ R(x, A) = A(3I - 3f'(x)A + [f'(x)A]^2) \end{cases}$$

et l'ordre de ce couple sera égal à 3.

B) Le cas des couples itératifs de type Aitken-Steffensen.

En partant de l'opérateur de Aitken-Steffensen on obtiendra le couple itératif (Q, R) et les applications

$$Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X \quad \text{et} \quad R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$$

sont définies par les relations suivantes :

$$(2.34) \begin{cases} Q(x, A) = \varphi_1(x) - A \left[\sum_{k=0}^n (I - [\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]A)^k \right] f(\varphi_1(x)) \\ R(x, A) = A \left[\sum_{k=0}^n (I - [\varphi_1(x), \varphi_2(x); f]A)^k \right] \end{cases}$$

avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{I}_X(f)$.

Supposons maintenant qu'il existe les ensembles $\Omega \subset X$ et $\Omega_1 \subset \mathcal{L}(Y, X)$ sur lesquels les conditions suivantes sont remplies :

i₂) Les opérateurs itératifs $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{I}_X(f)$ ont les ordres

p_1 et p_2 respectivement c'est-à-dire qu'il existe les nombres $K_1, K_2 > 0$ tels que :

$$\|f(\varphi_1(x))\| \leq K_1 \|f(x)\|^{p_1} \quad \text{pour chaque } x \in \Omega$$

et

$$\|f(\varphi_2(x))\| \leq K_2 \|f(x)\|^{p_2} \quad \text{pour chaque } x \in \Omega$$

Il existe aussi les nombres $\beta_1, \beta_2 > 0$ tels que :

$$\|\varphi_1(x) - x\| \leq \beta_1 \|f(x)\| \quad \text{pour chaque } x \in \Omega$$

et

$$\|\varphi_2(x) - x\| \leq \beta_2 \|f(x)\| \quad \text{pour chaque } x \in \Omega.$$

ii₂) L'application $f: X \rightarrow X$ admet des différences divisées d'ordre 1 et d'ordre 2, la différence divisée du premier ordre étant considérée comme une application linéaire admet l'application inverse et il existe aussi les nombres $M > 0$ et $B > 0$ tels que :

$$\|[x, y, z; f]\| \leq M \quad \text{pour chaque } x, y, z \in \Omega$$

et

$$\|[x, y; f]^{-1}\| \leq B \quad \text{pour chaque } x, y \in \Omega.$$

iii₂) Les ensembles Ω et Ω_1 sont choisis de telle manière que dans le cas $x \in \Omega$ et $A \in \Omega_1$ on ait $\varphi_1(x), \varphi_2(x), Q(x, A) \in \Omega$

En ce qui concerne l'ordre du couple défini par les relations (2.34) on a le Théorème suivant :

THEOREME 2.2. Si les conditions i₁) - iii₂) sont remplies sur les ensembles $\Omega \subset X$ et $\Omega_1 \subset \mathcal{L}(Y, X)$, alors le couple (Q, R) défini par les relations (2.34) a sur l'ensemble l'ordre

$$p = \min \{p_1 + p_2, r + p_1 + 1, s + 1\}.$$

Démonstration. Considérons l'application $S_q: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$

définie par la relation $S_q(x, A) = A \sum_{k=0}^q (I - [q_1(x), q_2(x); f]A)^k$.
Si nous tenons compte du deuxième exemple de la notion de pseudo-dérivée il résulte que l'application $[q_1(x), q_2(x); f] \in \mathcal{L}(X, Y)$ représente une pseudodérivée du premier ordre de la fonction f .
Désignons par $Df(x) = [q_1(x), q_2(x); f]$ la différence divisée.
On remarque facilement que :

$$(2.35) \quad \|I - [q_1(x), q_2(x); f] S_q(x, A)\| \leq \|I - [q_1(x), q_2(x); f] A\|^{q+1}$$

Du fait que $R(x, A) = S_q(x, A)$ et en appliquant l'inégalité (2.35) pour $q = s$ on déduit que :

$$(2.36) \quad \|I - Df(x) R(x, A)\| \leq \|I - Df(x) A\|^{s+1}$$

La relation (2.36) démontre que la condition b) de la définition (2.4) est remplie avec $m_2 = 1$ et $\min \{\delta_1 + \delta_2, \dots, \delta_{m_1} + \delta_{m_2}\} = s+1$.

Pour remplir la condition a) de la définition (2.4) nous envisageons d'abord la formule d'interpolation de Newton. À l'aide de cette formule nous déduisons que :

$$(2.37) \quad \|f(Q(x, A)) - f(q_1(x)) - [q_1(x), q_2(x); f](Q(x, A) - q_1(x))\| \leq \| [q_1(x), q_2(x), Q(x, A); f] \| \cdot \|Q(x, A) - q_1(x)\| \cdot \|Q(x, A) - q_2(x)\|$$

Du fait que $q_1(x), q_2(x), Q(x, A) \in \Omega$ il résulte que :

$$(2.38) \quad \| [q_1(x), q_2(x), Q(x, A); f] \| \leq M$$

En outre on a :

$$(2.39) \quad \|Q(x, A) - q_1(x)\| \leq \|S_n(x, A)\| \cdot \|f(q_1(x))\| \leq \|A\| \left\{ \sum_{k=0}^n \|I - [q_1(x), q_2(x); f] A\|^k \right\} K_1 \|f(x)\|^{p_1}$$

En ce qui concerne $\|A\|$ nous aurons :

$$(2.40) \quad \|A\| = \|A - [Df(x)]^{-1} + [Df(x)]^{-1}\| \leq \|[Df(x)]^{-1}\| (1 + \|I - Df(x)A\|)$$

Du fait que $q_1(x)$ et $q_2(x) \in \Omega$ et de l'hypothèse 11₂ nous déduisons que :

$$(2.41) \quad \|[Df(x)]^{-1}\| = \|[q_1(x), q_2(x); f]^{-1}\| \leq B$$

auquel cas on déduit de (2.40) et (2.41)

$$(2.42) \quad \|A\| \leq B (1 + \|I - Df(x)A\|)$$

De (2.39) et (2.42) il résulte :

$$(2.43) \quad \|Q(x, A) - q_1(x)\| \leq BK_1 \|f(x)\|^{p_1} (1 + \|I - Df(x)A\|) \cdot \sum_{k=0}^n \|I - Df(x)A\|^k$$

On remarque facilement que :

$$(2.44) \quad Q(x, A) = q_2(x) - S_n(x, A) f(q_2(x)) - [q_1(x), q_2(x); f]^{-1} \{I - [q_1(x), q_2(x); f] S_n(x, A)\} (f(q_2(x)) - f(q_1(x)))$$

d'où l'on déduit :

$$(2.45) \quad \|Q(x, A) - q_2(x)\| \leq BK_2 \|f(x)\|^{p_2} (1 + \|I - Df(x)A\|) \cdot \sum_{k=0}^n \|I - Df(x)A\|^k + B \|I - Df(x)A\|^{n+1} (K_1 \|f(x)\|^{p_1} + K_2 \|f(x)\|^{p_2})$$

Il résulte aussi la relation suivante :

$$(2.46) \quad \|f(q_1(x)) + [q_1(x), q_2(x); f](Q(x, A) - q_1(x))\| \leq \|I - [q_1(x), q_2(x); f] S_n(x, A)\| \cdot \|f(q_1(x))\| \leq K_1 \|I - Df(x)A\|^{n+1} \cdot \|f(x)\|^{p_1}$$

Du fait que :

$$\|f(Q(x,A))\| \leq \|f(Q(x,A)) - f(\varphi_1(x)) - [\varphi_1(x), \varphi_2(x); f](Q(x,A) - \varphi_1(x))\| + \|f(\varphi_1(x)) + [\varphi_1(x), \varphi_2(x); f](Q(x,A) - \varphi_1(x))\|$$

et en tenant compte des relations (2.37) - (2.46) nous déduisons la relation

$$(2.47) \quad \|f(Q(x,A))\| \leq MBK_1 \|f(x)\|^{p_1} (1 + \|I - Df(x)A\|) \cdot \sum_{k=0}^n \|I - Df(x)A\|^k \cdot \{BK_2 \|f(x)\|^{p_2} (1 + \|I - Df(x)A\|) \sum_{k=0}^n \|I - Df(x)A\|^k + B \|I - Df(x)A\|^{n+1} (K_1 \|f(x)\|^{p_1} + K_2 \|f(x)\|^{p_2})\} + K_1 \|I - Df(x)A\|^{n+1} \|f(x)\|^{p_1}$$

La relation (2.47) démontre que la condition a) de la définition 2.4 est remplie, les constantes ayant les valeurs précisées dans l'énoncé du théorème lequel est donc démontré.

Remarque 2.3 . De l'énoncé du théorème il résulte que $p \leq p_1 + p_2$ où l'égalité se réalise dans les cas :

$$(2.48) \quad r = \begin{cases} p_2 - 1 & \text{pour } p_2 \in \mathbb{N} \\ [p_2] & \text{pour } p_2 \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

$$(2.49) \quad s = \begin{cases} p_1 + p_2 - 1 & \text{pour } p_1 \in \mathbb{N} \text{ et } p_2 \in \mathbb{N} \\ [p_1 + p_2] & \text{au cas contraire} \end{cases}$$

Dans le cas où les nombres r et s prennent les valeurs précisées par les relations (2.48) et (2.49), le couple obtenu est le couple optimal.

Remarque 2.4 . Au cas où $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{I}_X(f)$ et ces opérateurs ont les ordres p_1 et p_2 respectivement, il est évident que le couple itératif (Q,R) , où ces applications sont définies par les relations

$$(2.50) \quad \begin{cases} Q(x,A) = \varphi_1(x) - A \left[\sum_{k=0}^n (I - [\varphi_1(x), (\varphi_1 \circ \varphi_2)(x); f]A)^k \right] f(\varphi_1(x)) \\ R(x,A) = A \left[\sum_{k=0}^n (I - [\varphi_1(x), (\varphi_1 \circ \varphi_2)(x); f]A)^k \right] \end{cases}$$

où

$$(2.51) \quad r = \begin{cases} p_1 p_2 - 1 & \text{si } p_1, p_2 \in \mathbb{N} \\ [p_1 p_2] & \text{autrement} \end{cases}$$

et

$$(2.52) \quad s = \begin{cases} p_1 + p_1 p_2 - 1 & \text{si } p_1, p_2 \in \mathbb{N} \\ [p_1 + p_1 p_2] & \text{autrement} \end{cases}$$

a l'ordre $p_1 + p_1 p_2$. De cette manière l'ordre du couple (Q,A) a augmenté considérablement sans augmentation essentielle du volume des calculs.

Remarque 2.5 . Considérons le couple qui provient de l'opérateur du Steffensen proprement dit, donc le cas $\varphi_1 = I$ et $\varphi_2 \in \mathcal{I}_X(f)$ l'opérateur φ_2 ayant l'ordre p . Il résulte en ce cas le couple défini par les relations :

$$(2.53) \quad \begin{cases} Q(x,A) = x - A \left[\sum_{k=0}^n (I - [x, \varphi(x); f]A)^k \right] f(x) \\ R(x,A) = A \sum_{k=0}^n (I - [x, \varphi(x); f]A)^k \end{cases}$$

où

$$(2.54) \quad r = \begin{cases} p - 1 & \text{pour } p \in \mathbb{N} \\ [p] & \text{pour } p \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

et

$$(2.55) \quad s = \begin{cases} p & \text{pour } p \in \mathbb{N} \\ [p+1] & \text{pour } p \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour ce couple on obtient l'ordre $p+1$.

Remarque 2.6. Considérons l'opérateur $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$. Comme nous avons vu (voir l'exemple b) de la notion d'opérateur itératif) l'opérateur $\varphi \in \mathcal{I}_X(\mathcal{L})$ défini par $\varphi(x) = x - A_0 f(x)$ a l'ordre $p = 1$. Donc si nous tenons compte de la remarque 2.5, nous déduisons que le couple (Q, R) où les applications Q et R sont définies par les relations :

$$(2.56) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x - A f(x) \\ R(x, A) = A(2I - [x, x - A_0 f(x); f]A) \end{cases}$$

a l'ordre $p = 2$.

3. Théorèmes de convergence pour les procédés itératifs fournis par des couples itératifs.

Dans ce qui suit nous adoptons les notations suivantes :

a) par $\text{Lip}_{L, \Omega}(X, Y)$ nous désignons l'ensemble des fonctions $f: X \rightarrow Y$ qui vérifient sur le domaine $\Omega \subset X$ et avec la constante L la condition de Lipschitz, c'est-à-dire que pour chaque $x, y \in \Omega$ on a l'inégalité $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$;

b) par $S(a, \xi) \subset Z$ nous désignons la sphère dont le centre est dans le point $a \in Z$ et qui a le rayon $\xi > 0$, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in Z / \|x - a\| < \xi\}$, Z étant un espace linéaire et normé ;

c) au cas où pour chaque $x \in \Omega$ il existe une pseudodérivée du premier ordre, $Df(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$, nous désignerons par $\bar{D}f$ l'application définie sur X à valeurs en $\mathcal{L}(X, Y)$. Cette application attache à chaque $x \in \Omega$ l'application linéaire $Df(x)$.

Considérons maintenant un couple itératif (Q, R) attaché à l'équation $f(x) = 0$. Supposons qu'il existe les ensembles $\Omega \subset X$ et $\Omega_1 \subset \mathcal{L}(Y, X)$ tels que le couple considéré a l'ordre $p > 1$ sur $\Omega \times \Omega_1$, et qu'il existe les nombres $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ et K_1, γ_1 .

$\beta_1 \in [0, +\infty[$ pour $i = \overline{1, m_1}$ et $L_1, \delta_i, \delta_i \in [0, +\infty[$ pour $i = \overline{1, m_2}$ tels que $\min \{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{m_1} + \beta_{m_1}, \gamma_1 + \delta_1, \dots, \gamma_{m_2} + \delta_{m_2}\} = p$ et que les conditions a) et b) de la définition 2.4 sont remplies.

La relation entre l'ordre d'un couple itératif et la convergence du procédé itératif fourni par ce couple est exprimée par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. Considérons les espaces de Banach X et Y , les ensembles $\Omega \subset X$ et $\Omega_1 \subset \mathcal{L}(Y, X)$, la fonction $f: X \rightarrow Y$ et un couple itératif décrit ci-dessus. Si les hypothèses suivantes sont remplies :

i) pour chaque $x \in \Omega$ et $A \in \Omega_1$ on a :

$$(3.1) \quad \|Q(x, A) - x\| \leq \eta_1 \|f(x)\|$$

et

$$(3.2) \quad \|R(x, A) - A\| \leq \eta_2 \|I - Df(x)A\|$$

ii) il existe une pseudodérivée du premier ordre de l'application f pour chaque $x \in \Omega$ et $\bar{D}f \in \text{Lip}_{L, \Omega}(X, \mathcal{L}(X, Y))$

iii) le point initial $x_0 \in X$ et l'application $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ vérifient les inégalités $\|f(x_0)\| < c_1$, $\|I - Df(x_0)A_0\| < c_2$ où les nombres $c_1, c_2 > 0$ vérifient les inégalités :

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^{m_1} K_i c_1^{\alpha_i} c_2^{\beta_i} \leq c_1$$

et

$$(3.4) \quad \sum_{i=1}^{m_2} L_i c_1^{\gamma_i} q^{\delta_i} \leq c_2 \quad \text{où} \quad q = c_2 + L \eta_1 c_1 \left(\|A_0\| + \frac{\eta_2 c_2 d}{1 - d^{p-1}} \right) \cdot \exp \frac{L \eta_1 c_1 d}{1 - d^{p-1}}$$

iv) on a les inclusions :

$$(3.5) \quad S(x_0, \frac{\eta_1 c_1 d}{1 - d^{p-1}}) \subset \Omega \quad \text{et} \quad S(A_0, \frac{\eta_2 q d}{1 - d^{p-1}}) \subset \Omega_1$$

$$\text{où } d = \max \left\{ \frac{\|f(x_0)\|}{c_1}, \frac{\|I - Df(x_0)A_0\|}{c_2} \right\}$$

alors on peut faire les affirmations suivantes :

j) les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations (2.15) sont convergentes ;

jj) l'équation $f(x) = 0$ admet la solution $\bar{x} \in S(x_0, \frac{\eta_1 c_1 d}{1-d^{p-1}})$

et $\bar{x} = \lim x_n$;

jjj) la dérivée $f'(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe, cette dérivée est inversable, l'application $\bar{I} = [f'(\bar{x})]^{-1}$

et $\bar{I} = \lim A_n$;

iv) pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a les inégalités suivantes :

$$(3.6) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \eta_1 c_1 d^{p^n}$$

$$(3.7) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq \eta_2 q d^{p^n}$$

$$(3.8) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \eta_1 c_1 \frac{d^{p^n}}{1-d^{p^n(p-1)}}$$

$$(3.9) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq \eta_2 q \frac{d^{p^n}}{1-d^{p^n(p-1)}}$$

Démonstration. En employant la méthode de l'induction mathématique nous démontrerons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a les propriétés suivantes :

$$a) \quad x_n \in S(x_0, \frac{\eta_1 c_1 d}{1-d^{p-1}})$$

$$b) \quad A_n \in S(A_0, \frac{\eta_2 q d}{1-d^{p-1}})$$

$$c) \quad \|f(x_n)\| \leq c_1 d^{p^n} \quad \text{et} \quad \|I - Df(x_n)A_n\| \leq c_2 d^{p^n}$$

$$d) \quad \|A_n\| \leq (\|A_0\| + \frac{\eta_2 c_2 d}{1-d^{p-1}}) \exp \frac{L \eta_1 c_1 d}{1-d^{p-1}}$$

Des hypothèses du théorème il résulte que les affirmations a) - d) sont vraies pour $n = 0$. Supposons que ces affirmations sont vraies pour chaque $n \leq k$. De cette hypothèse et de l'ensemble des hypothèses du théorème nous déduisons que :

$$(3.10) \quad \|x_{k+1} - x_k\| \leq \|Q(x_k, A_k) - x_k\| \leq \eta_1 c_1 d^{p^k}; \quad i = \overline{0, k}$$

d'où il résulte :

$$(3.11) \quad \|x_{k+1} - x_0\| \leq \frac{\eta_1 c_1 d}{1-d^{p-1}}$$

L'inégalité (3.11) refléchit le fait que $x_{k+1} \in S(x_0, \frac{\eta_1 c_1 d}{1-d^{p-1}})$
En outre on a :

$$(3.12) \quad \|A_{k+1} - A_k\| = \|R(x_{k+1}, A_k) - A_k\| \leq \eta_2 \|I - Df(x_{k+1})A_k\| \leq \eta_2 (\|I - Df(x_k)A_k\| + L \|x_{k+1} - x_k\| \cdot \|A_k\|) \leq \eta_2 [c_2 d^{p^k} + L \eta_1 c_1 d^{p^k} (\|A_0\| + \frac{\eta_2 c_2 d}{1-d^{p-1}}) \exp \frac{L \eta_1 c_1 d}{1-d^{p-1}}] = \eta_2 q d^{p^k}$$

$$(3.13) \quad \|A_{k+1} - A_0\| \leq \frac{\eta_2 q d}{1-d^{p-1}}$$

et de (3.13) il résulte immédiatement que $A_{k+1} \in S(A_0, \frac{\eta_2 q d}{1-d^{p-1}})$

Des hypothèses du théorème on déduit aussi que :

$$(3.14) \quad \|f(x_{k+1})\| = \|f(Q(x_k, A_k))\| \leq \sum_{i=1}^{m_1} K_i c_i \zeta_i d^{(\alpha_i + \beta_i)p^k}$$

De fait que $\alpha_i + \beta_i \geq p$ et en tenant compte de l'hypothèse $d < 1$ il résulte que : $d^{(\alpha_i + \beta_i)p^k} \leq d^{p \cdot p^k} = d^{p^{k+1}}$

et ainsi de (3.14) on déduit l'inégalité

$$(3.15) \quad \|f(x_{k+1})\| \leq c_1 d^{p^{k+1}}$$

On déduit comme en (3.12)

$$(3.16) \quad \|I - Df(x_{k+1})A_k\| \leq q d^{p^{k+1}}$$

En tenant compte des inégalités (3.14) et (3.15) et en utilisant les hypothèses du théorème on déduit que :

$$(3.17) \quad \|I - Df(x_{kH}) A_{kH}\| = \|I - Df(x_{kH}) R(x_{kH}, A_k)\| \leq \sum_{i=1}^{m_2} L_i \|f(x_{kH})\|^{\tilde{\sigma}_i} \|I - Df(x_{kH}) A_k\|^{\tilde{\sigma}_i} \leq \sum_{i=1}^{m_2} L_i c_1^{\tilde{\sigma}_i} q^{\tilde{\sigma}_i} d^{(p\tilde{\sigma}_i + \tilde{\sigma}_i)p^k}$$

Des inégalités $\tilde{\sigma}_i + \tilde{\sigma}_i \geq p > 1$, $d < 1$ et (3.17) nous déduisons l'inégalité :

$$(3.18) \quad \|I - Df(x_{kH}) A_{k+1}\| \leq c_2 d^{p^{k+1}}$$

Les relations (3.11), (3.13), (3.15) et (3.18) montrent que les affirmations a) - c) sont vraies pour $n = k+1$.

De l'affirmation d) il résulte immédiatement que :

$$(3.19) \quad \|A_{k+1} - A_k\| \leq \eta_2 (c_2 + L\eta_1 c_1 \|A_k\|) d^{p^k}$$

d'où l'on conclut

$$(3.20) \quad \|A_{k+1}\| \leq \|A_k\| + \|A_{k+1} - A_k\| \leq \eta_2 c_1 d^{p^k} + (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^k}) \|A_k\|$$

En appliquant successivement l'inégalité (3.20) on déduit que :

$$(3.21) \quad \|A_{k+1}\| \leq u_{k+1} + \|A_0\| (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^1}) \dots (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^k})$$

où

$$(3.22) \quad u_{k+1} = \eta_2 c_2 \sum_{i=0}^k d^{p^i} (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^{i+1}}) \dots (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^k})$$

De (3.22) on déduit que :

$$(3.23) \quad u_{k+1} \leq \eta_2 c_2 (1 + L\eta_1 c_1 d) \dots (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^k}) \sum_{i=0}^k d^{p^i} \leq \eta_2 c_2 (1 + L\eta_1 c_1 d) \dots (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^k}) \frac{d}{1 - d^{p-1}}$$

De (3.21) et (3.23) on déduit

$$(3.24) \quad \|A_{k+1}\| \leq (1 + L\eta_1 c_1 d) \dots (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^k}) (\|A_0\| + \frac{\eta_2 c_2 d}{1 - d^{p-1}})$$

En utilisant l'inégalité des moyens on déduit :

$$(3.25) \quad (1 + L\eta_1 c_1 d) \dots (1 + L\eta_1 c_1 d^{p^k}) \leq (1 + L\eta_1 c_1 \frac{d + d^p + \dots + d^{p^k}}{k+1})^{k+1} \leq \left(1 + \frac{L\eta_1 c_1 d}{(k+1)(1 - d^{p-1})}\right)^{k+1} \leq \exp \frac{L\eta_1 c_1 d}{1 - d^{p-1}}$$

De (3.24) et (3.25) il résulte que l'affirmation d) est vraie pour $n = k+1$.

En utilisant maintenant le principe de l'induction mathématique on déduit que les affirmations a) - d) sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Des affirmations a) - d) et des inégalités (3.10) et (3.12) résultent les inégalités (3.6) et (3.7). De ces inégalités on déduit à nouveau que

$$(3.26) \quad \|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \eta_1 c_1 d^p \sum_{i=0}^{n+m-1} d^{p^{n+i} - p^n}$$

Du fait que $p > 1$ il résulte que :

$$p^{n+i} - p^n = p^n (p-1) (p^{i-1} + \dots + 1) > i p^n (p-1)$$

et en tenant compte des inégalités $0 < d < 1$ on a :

$$\sum_{i=0}^{m-1} d^{p^{n+i} - p^n} < \frac{1}{p-1}$$

et ainsi on a

$$\sum_{i=0}^{m-1} d^{p^{n+i} - p^n} < \frac{1}{1 - d^{p^p(p-1)}}$$

Cette inégalité avec (3.26) fournit l'inégalité suivante :

$$(3.27) \quad \|x_{n+m} - x_n\| < \frac{\eta_1 c_1 d^{p^n}}{1 - d^{p^p(p-1)}}$$

pour chaque $m, n \in \mathbb{N}$, inégalité de laquelle on déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace de Banach X est fondamentale et donc elle est aussi convergente.

De la même manière il résulte que :

$$(3.28) \quad \|A_{n+m} - A_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_{i+1} - A_i\| \leq \eta_2 q \sum_{i=0}^{m-1} d^{p^{i+1} - p^n} < \frac{\eta_2 q d^{p^n}}{1 - d^{p^n(p-1)}}$$

pour chaque $m, n \in \mathbb{N}$. De l'inégalité (3.28) nous déduisons que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi fondamentale dans l'espace $\mathcal{L}(Y, X)$. Du fait que les espaces X et Y sont des espaces de Banach il résulte que l'espace $\mathcal{L}(Y, X)$ est aussi un espace de Banach et donc la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite fondamentale de cet espace, sera une suite convergente.

Désignons par $\bar{x}$ et $\bar{A}$ les limites des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement, ces limites étant considérées par rapport aux normes des espaces X et $\mathcal{L}(Y, X)$ respectivement. La complétude des espaces X et $\mathcal{L}(Y, X)$ implique que $\bar{x} \in X$ et $\bar{A} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Si dans les inégalités (3.26) et (3.28) nous faisons $m \rightarrow \infty$ nous obtenons les inégalités (3.8) et (3.9) et de ces inégalités nous déduisons pour $n = 0$ que $\bar{x} \in S(x_0, \frac{\eta_1 c_1 d}{1 - d^{p-1}})$ donc $\bar{x} \in \Omega$ et $\bar{A} \in S(A_0, \frac{\eta_2 q d}{1 - d^{p-1}})$, donc $\bar{A} \in \Omega_1$.

Si nous tenons compte que $Df \in \text{Lip}_{L, \Omega}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, $\bar{x} \in \Omega$ et $x_n \in \Omega$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et si nous rappelons la définition de Df , nous déduisons l'inégalité

$$(3.29) \quad \|Df(\bar{x}) - Df(x_n)\| \leq L \|\bar{x} - x_n\|$$

d'où il résulte que la limite de la suite $(Df(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $Df(\bar{x})$.

De l'existence d'une pseudodérivée du premier ordre de l'application f sur l'ensemble Ω il résulte qu'il existe un nombre $M > 0$ et les opérateurs $T_0, T_1 \in \mathcal{I}_X(f)$ tels que pour chaque $x, y \in \Omega$ on a :

$$(3.30) \quad \|f(x) - f(T_0 y) - Df(T_0 y)(x - T_0 y)\| \leq M \|x - T_0 y\| \cdot \|x - T_1 y\|$$

Choisissons $x = \bar{x}$ et $T_0 y = x_n$, alors de (3.30) nous déduisons l'inégalité :

$$(3.31) \quad \|f(\bar{x}) - f(x_n) - Df(x_n)(\bar{x} - x_n)\| \leq M \|\bar{x} - x_n\| \cdot \|\bar{x} - T_1 y\|$$

et donc

$$(3.32) \quad \|f(\bar{x}) - f(x_n)\| \leq M \|\bar{x} - x_n\| \cdot \|\bar{x} - T_1 y\| + \|Df(x_n)\| \cdot \|\bar{x} - x_n\|$$

De l'inégalité (3.32), en utilisant la continuité de la norme et de l'opérateur T_1 , nous déduisons que :

$$(3.33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\bar{x})$$

De l'affirmation c), en utilisant de nouveau la continuité de la norme nous déduisons que $f(\bar{x}) = \theta$, donc l'élément $\bar{x}$ de X est la solution de l'équation considérée, et que $\|I - Df(x)\bar{A}\| = 0$, donc $\bar{A} = [Df(\bar{x})]^{-1} = [f'(\bar{x})]^{-1}$. Le théorème est donc démontré.

Ainsi qu'on peut le remarquer de la définition 2.4, la mise en œuvre de l'application R d'un couple itératif (Q, R) est d'approcher l'inverse d'une pseudodérivée. A cause de ce fait nous choisirons

$$(3.34) \quad R(x, A) = S_{x+1}(Df(x), A).$$

D'une manière analogue à celle employée à la démonstration

de la relation (2.4) nous déduisons l'égalité :

$$(3.35) \quad \bar{I} - Df(x)R(x, A) = (\bar{I} - Df(x)A)^{k+1}$$

d'où l'on conclut que la condition b) de la définition 2.4 est remplie avec $m_2 = 1$, $L_1 = 1$, $\tau_1 = 0$, $\delta_1 = r+1$.

Nous remarquons maintenant la mission spéciale du nombre $L > 0$ et des opérateurs itératifs $T_0, T_1, \dots, T_n$ dans la définition des pseudodérivées d'ordre k , $k = \overline{1, n}$. Pour ce motif les applications introduits par la définition 2.3 lesquelles correspondent aux éléments $L, T_0, T_1, \dots, T_n$ fixes s'appelleront $(L; T_0, T_1, \dots, T_n)$ pseudodérivées.

Dans ce qui suit nous donnerons un théorème des hypothèses duquel on peut déduire outre la convergence du procédé itératif fourni par un couple itératif, aussi le fait que ce couple ait un ordre $p > 1$.

On a donc la théorème suivant :

THÉOREME 3.2. Considérons les espaces de Banach X et Y , les sousensembles $\Omega \subseteq X$ et $\Omega_1 \subseteq \mathcal{L}(Y, X)$, une fonction $f : X \rightarrow Y$ et un nombre $p > 1$. Si les conditions suivantes sont remplies :

i) pour chaque $x \in \Omega$ il existe les $(L, T_0, \dots, T_n)$ pseudodérivées $D^k f(x) \in \mathcal{L}_k(X, Y)$; $k = \overline{1, p-1}$ et

$\bar{D}f \in \text{Lip}_{L, \Omega}(X, \mathcal{L}(X, Y))$;

ii) on a les inégalités suivantes :

$$(3.36) \quad \|f(x) + \sum_{k=1}^{p-1} D^k f(T_0 x) (Q(x, A) - T_0 x) \dots (Q(x, A) - T_{k-1} x)\| \leq \sum_{\lambda=0}^p K_\lambda \|f(x)\|^\lambda \|\bar{I} - Df(x)A\|^{p-\lambda}$$

$$(3.37) \quad \|x - T_1 x\| \leq \eta \|f(x)\|, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad x \in \Omega$$

et

$$(3.38) \quad \|Q(x, A) - x\| \leq \eta \|f(x)\| \quad \text{pour chaque } x \in \Omega \text{ et}$$

$A \in \Omega_1$;

iii) il existe les nombres $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que :

$$(3.39) \quad \begin{cases} \|f(x_0)\| \leq C_1, \quad \|\bar{I} - Df(x_0)A_0\| < C_2, \quad \|A_0\| < \frac{1-C_2}{\eta C_1} \\ L(\eta + \tau_0)(\eta + \tau_1) \dots (\eta + \tau_{p-1}) C_1^p + \sum_{\lambda=0}^p K_\lambda C_1^\lambda C_2^{p-\lambda} \leq C_1 \\ [C_2 + L\eta C_1 B(1+C_1)]^p \leq C_1 \\ d(L + d^{p-2}) < 1 \end{cases}$$

où

$$(3.40) \quad B = \frac{1-d^{p-1}}{\eta C_1 (1-Ld-d^{p-1})}$$

$$d = \max \left\{ \frac{1}{C_1} \|f(x_0)\|, \frac{1}{C_2} \|\bar{I} - Df(x_0)A_0\| \right\}$$

$$\text{iv) la sphère } S(x_0, \frac{\eta C_1 d}{1-d^{p-1}}) \subset \Omega$$

alors les affirmations suivantes sont vraies :

j) le couple itératif (Q, R) , où $R(x, A) = S_p(Df(x), A) =$
 $= A \sum_{k=0}^{p-1} (\bar{I} - DR(x)A)^k$ à l'ordre p sur l'ensemble $\Omega \times \Omega_1$

jj) les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations (2.15) sont convergentes ;

jjj) l'équation $f(x) = 0$ a la solution $\bar{x} \in S(x_0, \frac{\eta C_1 d}{1-d^{p-1}})$

et $\bar{x} = \lim x_n$;

jv) il existe l'opérateur $\bar{I} = [f'(\bar{x})]^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$

et $\bar{I} = \lim A_n$;

v) pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a les inégalités suivantes :

$$(3.41) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \eta c_1 d^{p^n}$$

$$(3.42) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq B(1+c_2) \cdot \frac{[c_2 + L\eta c_1 B(1+c_2)]d^{p^n} - [c_2 + L\eta c_1 B(1+c_2)]^p d^{p^{n+1}}}{1 - c_2 - L\eta c_1 B(1+c_2)}$$

$$(3.43) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\eta c_1 d^{p^n}}{1 - d^{p^n(p-1)}}$$

$$(3.44) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq \frac{B(1+c_2)}{1 - c_2 - L\eta c_1 B(1+c_2)} \left\{ [c_2 + L\eta c_1 B(1+c_2)] \frac{d^{p^n}}{1 - d^{p^n(p-1)}} - [c_2 + L\eta c_1 B(1+c_2)]^p \frac{d^{p^{n+1}}}{1 - d^{p^{n+1}(p-1)}} \right\}$$

Démonstration. Si nous envisageons la définition des $(L, T_0, \dots, \dots, T_{p-1})$ pseudodérivées d'ordre k ; $D^k f(x) \in \mathcal{L}_k(x, Y)$, $k = \overline{1, p-1}$, ainsi que l'inégalité (3.36), nous déduisons que pour chaque $x \in \Omega$ et $A \in \Omega_1$ on a l'inégalité suivante :

$$(3.45) \quad \|f(Q(x, A))\| \leq L \|Q(x, A) - T_0 x\| \dots \|Q(x, A) - T_{p-1} x\| + \sum_{\lambda=0}^p K_\lambda \|f(x)\|^\lambda \cdot \|I - Df(x)A\|^{p-\lambda}$$

De (3.37) et (3.38) il résulte que :

$$(3.46) \quad \|Q(x, A) - T_i x\| \leq \|Q(x, A) - x\| + \|x - T_i x\| \leq (\eta + \varepsilon_i) \|f(x)\|$$

pour chaque $i = \overline{0, p-1}$. Ainsi de (3.45) et (3.46) nous déduisons que :

$$(3.47) \quad \|f(Q(x, A))\| \leq L(\eta + \varepsilon_0)(\eta + \varepsilon_1) \dots (\eta + \varepsilon_{p-1}) \cdot \|f(x)\|^p + \sum_{\lambda=0}^p K_\lambda \|f(x)\|^\lambda \cdot \|I - Df(x)A\|^{p-\lambda} = \sum_{\lambda=0}^p \bar{K}_\lambda \|f(x)\|^\lambda \cdot \|I - Df(x)A\|^{p-\lambda}$$

où $\bar{K}_s = K_s$ pour $s = \overline{0, p-1}$ et $\bar{K}_p = L(\eta + \varepsilon_0)(\eta + \varepsilon_1) \dots (\eta + \varepsilon_{p-1}) + K_p$

En outre, de l'expression de l'application R nous déduisons :

$$(3.48) \quad \|I - Df(x)R(x, A)\| \leq \|I - Df(x)A\|^p$$

De (3.47) et (3.48) il résulte que les conditions a) et b) de la définition 2.4 sont remplies, donc l'ordre du couple itératif (Q, R) est égal à p en $\Omega \times \Omega_1$.

En utilisant la méthode de l'induction mathématique nous démontrerons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les affirmations suivantes sont vraies :

$$a) \quad x_n \in S(x_0, \frac{\eta c_1 d}{1 - d^{p-1}})$$

$$b) \quad \|f(x_n)\| \leq c_1 d^{p^n}, \quad \|I - Df(x_n)A_n\| \leq c_2 d^{p^n}$$

$$c) \quad \text{il existe les applications } [Df(x_n)]^{-1} \text{ et } \|[Df(x_n)]^{-1}\| \leq B$$

$$d) \quad \|A_n\| \leq B(1 + c_2) \quad \text{où la constante } B \text{ a la valeur exprimée par la relation (3.40).}$$

Des hypothèses du théorème il résulte que les propriétés a) et b) sont vraies pour $n = 0$.

Des inégalités (3.39) il résulte $c_2 < 1$. En effet au cas contraire il résulte $c_2 + L\eta c_1 B(1+c_1) > c_2 > 1$ et du fait que $p > 1$ $[c_2 + L\eta c_1 B(1+c_1)]^p > c_2^p > c_2$, or cette dernière inégalité contredit (3.39).

Par conséquent $c_2 < 1$, d'où il résulte l'inégalité $\|I - Df(x_0)A_0\| < 1$, inégalité qui assure l'existence de $[Df(x_0)]^{-1}$. On a aussi l'inégalité suivante

$$(3.49) \quad \|[Df(x_0)]^{-1}\| = \|A_0\| + \|[Df(x_0)]^{-1}\| \cdot \|I - Df(x_0)A_0\| \leq \frac{1-c_2}{c_1} + c_2 \|[Df(x_0)]^{-1}\|$$

Du fait que $C_2 < 1$, de (3.49) nous déduisons l'inégalité

$$(3.50) \quad \| [Df(x_0)]^{-1} \| \leq \frac{1}{\eta c_1}$$

Evidemment $\frac{1-d^{p-1}}{1-Ld-d^{p-1}} > 1$; donc de (3.50) il résulte que

$$(3.51) \quad \| [Df(x_0)]^{-1} \| \leq \frac{1-d^{p-1}}{\eta c_1 (1-Ld-Ld^{p-1})} = B$$

De (3.51) nous déduisons que :

$$\| A_0 \| = \| [Df(x_0)]^{-1} \| (1 + \| I - Df(x_0) A_0 \|) \leq B(1+c_2)$$

donc les affirmations a) - d) sont vraies pour $n = 0$.

Supposons maintenant que ces affirmations sont vraies pour $n = k$. De cette hypothèse nous déduisons :

$$(3.52) \quad \| x_{i+1} - x_i \| = \| Q(x_i, A_i) - x_i \| \leq \eta \| f(x_i) \| \leq \eta c_1 d^{p^i}$$

pour chaque $i = 0, 1, \dots, k$;

d'où l'on déduit

$$(3.53) \quad \| x_{k+1} - x_0 \| \leq \sum_{i=0}^k \| x_{i+1} - x_i \| \leq \frac{\eta c_1 d}{1-d^{p-1}}$$

d'où il s'ensuit que $x_{k+1} \in S(x_0, \frac{\eta c_1 d}{1-d^{p-1}})$ donc a) est vraie aussi pour $n = k+1$.

Pour démontrer l'affirmation b) pour $n = k+1$ on remarquera que

$$(3.54) \quad \| f(x_{k+1}) \| \leq L \| Q(x_k, A_k) - T_0 x_k \| \dots \| Q(x_k, A_k) - T_{p-1} x_k \| + \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda \| f(x_k) \|^{\lambda} \| I - Df(x_k) A_k \|^{p-\lambda}$$

De (3.37) et (3.38) nous déduisons que :

$$(3.55) \quad \| Q(x_k, A_k) - T_i x_k \| \leq (\eta + \varepsilon_i) c_1 d^{p^k}$$

pour chaque $i = 0, p-1$ donc en employant les inégalités (3.39),

(3.54) et (3.55) nous déduisons l'inégalité

$$(3.56) \quad \| f(x_{k+1}) \| \leq [L(\eta + \varepsilon_0) - (\eta + \varepsilon_{p-1}) c_1^p + \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda c_1^\lambda c_2^{p-\lambda}] d^{p^{k+1}}$$

En outre, du fait que $A_{k+1} = R(x_{k+1}, A_k) = S_p(Df(x_{k+1}), A_k)$

et de l'inégalité (2.4) il résulte que :

$$(3.57) \quad \| I - Df(x_{k+1}) A_{k+1} \| = \| I - Df(x_{k+1}) A_k \|^{p^k}$$

On a aussi :

$$(3.58) \quad \| I - Df(x_{k+1}) A_k \| \leq \| I - Df(x_k) A_k \| + L \| x_{k+1} - x_k \| \| A_k \| \leq [c_2 + L \eta c_1 B(1+c_2)] d^{p^k}$$

Des inégalités (3.57) et (3.58) nous déduisons que :

$$(3.59) \quad \| I - Df(x_{k+1}) A_{k+1} \| \leq c_2 d^{p^{k+1}}$$

De $C_2 < 1$ et $d < 1$ il résulte $\| I - Df(x_{k+1}) A_{k+1} \| < 1$,

d'où il résulte que l'application $[Df(x_{k+1})]^{-1}$ existe.

Evaluons maintenant la norme de $[Df(x_{k+1})]^{-1}$.

Nous remarquerons que :

$$[Df(x_{k+1})]^{-1} - [Df(x_k)]^{-1} = -[Df(x_{k+1})]^{-1} (Df(x_{k+1}) - Df(x_k)) [Df(x_k)]^{-1}$$

d'où nous déduisons que :

$$(3.60) \quad \| [Df(x_{k+1})]^{-1} - [Df(x_k)]^{-1} \| \leq \| [Df(x_k)]^{-1} \| \cdot \| [Df(x_{k+1})]^{-1} \| \cdot L \eta c_1 d^{p^k}$$

d'où nous déduisons encore l'inégalité :

$$(3.61) \quad \| [Df(x_{kH})]^{-1} \| \leq \| [Df(x_k)]^{-1} \| (1 + L\eta c_1 d^{P^k} \| [Df(x_{kH})]^{-1} \|)$$

Cette dernière inégalité est équivalente à l'inégalité suivante :

$$(3.62) \quad \frac{1}{\| [Df(x_{kH})]^{-1} \|} + L\eta c_1 d^{P^k} \geq \frac{1}{\| [Df(x_k)]^{-1} \|}$$

d'où il résulte immédiatement que :

$$(3.63) \quad \frac{1}{\| [Df(x_{kH})]^{-1} \|} + L\eta c_1 \sum_{i=0}^k d^{P^i} \geq \frac{1}{\| [Df(x_0)]^{-1} \|}$$

Ainsi que nous l'avons déjà établi on a $\| [Df(x_0)]^{-1} \| \leq \frac{1}{\eta c_1}$ et

de la sorte, de (3.63) il résulte que :

$$(3.64) \quad \frac{1}{\| [Df(x_{kH})]^{-1} \|} \geq \eta c_1 \left(1 - \frac{Ld}{1-d^{P-1}} \right) = \eta c_1 \frac{1-Ld-d^{P-1}}{1-d^{P-1}}$$

De (3.39) on déduit $Ld + d^{P-1} < 1$ donc $1 - Ld - d^{P-1} > 0$ et comme $d < 1$ il résulte $(1 - Ld - d^{P-1}) / (1 - d^{P-1}) > 0$ et ainsi de (3.64) on déduit que :

$$(3.65) \quad \| [Df(x_{kH})]^{-1} \| \leq \frac{1-d^{P-1}}{\eta c_1 (1-Ld-d^{P-1})} = B$$

De l'affirmation d) nous déduisons que :

$$\| A_{kH} \| \leq \| [Df(x_{kH})]^{-1} \| (1 + \| I - Df(x_{kH}) A_{kH} \|) \leq B(1+c_2)$$

Donc les affirmations a) - d) sont vraies pour $n = k+1$ et en appliquant le principe de l'induction mathématique on déduit que les affirmations sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi les conclusions du théorème résultent de la même manière

qu'au cas du théorème 3.1. Nous remarquerons que

$$\begin{aligned} \| A_{nH} - A_n \| &\leq \| A_n \| \sum_{k=1}^n \| I - Df(x_{kH}) A_n \|^k \leq \\ &\leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^n \{ [c_2 + L\eta c_1 B(1+c_2) d^{P^k}]^k \} = \\ &= B(1+c_2) \frac{[c_2 + L\eta c_1 (1+c_2)] d^{P^n} - [c_2 + L\eta c_1 (1+c_2)]^P d^{P^{nH}}}{1 - c_2 - L\eta c_1 (1+c_2) B} \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré.

En appliquant les théorèmes de cet paragraphe aux cas particulier des couple présenter au deuxième paragraphe, on obtient des théorèmes de convergence pour les procédés itératifs fournis par les couples.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALBRECHT, J., Ermerkungen zum Iterationsverfahren von Schultz zum Matrizeninversion, ZAMM 41 (1961), 262 - 263.
- [2] DIACONU, A., PAVALOIU, I., Sur quelques méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles, Revue d'Analyse Num. et de la Théorie de l'Approx. 1 (1972), 45 - 61.
- [3] DIACONU, A., PAVALOIU, I., Asupra unor metode iterative pentru rezolvarea ecuatiilor operationale neliniare, Revista de Analiză Numerică și Teoria Aproximatiei, 2, 1 (1973), 61 - 79.
- [4] DIACONU, A., Sur quelques méthodes itératives combinées, Mathematica 22 (45), 2 (1980), 247 - 261.

- [5] DIACONU, A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenus par l'interpolation inverse. III., "Babes-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminars, Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods, Preprint Nr. 1, 1985, pp. 21 - 70.
- [6] PAVALOIU, I., Sur les procédés itératifs à une ordre élevé de convergence, *Mathematica*, 12 (35) 2 (1970), 309 - 324.
- [7] PAVALOIU, I., Interpolation dans les espaces linéaires normés et application, *Mathematica*, 12 (35) 1, (1970), 149 - 158.
- [8] PAVALOIU, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
- [9] PAVALOIU, I., Asupra operatorilor iterativi, *Studii și cercetări matematice*, 23 (10) (1971), 1537 - 1544.
- [10] UL'M, S., Ob obobsthsennih razdelennih raznostiah (I), *Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR* 16, 1 (1967), 13-26.
- [11] UL'M, S., Ob obobsthsennih razdelennih raznostiah (II), *Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR* 16, 2 (1967), 146-155.
- [12] UL'M, S., Ob iteratsionnih metodah s posledovatel'noi approximacii obratnovo operatora, *Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR* 16, 4 (1967), 403 - 411.

"BABES-POLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 67 - 82.

INVERSE INTERPOLATING SPLINES WITH APPLICATIONS TO THE EQUATION SOLVING

C. IANCU, T. OPROIU and I. PĂVĂLOIU

1. INTRODUCTION

Let f be the function:

$$(1) \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

and:

$$(2) \quad \Delta_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N},$$

a partition of the interval $[a, b]$.

We assume that the function f is twice derivable on the interval $[a, b]$, and $f'(x) \neq 0$ for all $x \in [a, b]$. We denote $F = f([a, b])$.

From the above assumption it results that the function f is a bijection; hence there exists $f^{-1}: F \rightarrow [a, b]$.

Since we have assumed that the function f is twice