

- (N2) NEMETH, A. B., On the subdifferentiability of convex operators, to appear in Journal of London Math. Soc.
- (N3) - " - , On some universal subdifferentiability properties of ordered vector spaces, "Babes-Bolyai" Univ. Faculty of Math. Research Seminars, Preprint nr. 1, 1985, 93 - 116.
- (N4) - " - , Known and new equivalent forms of the Archimedean property of ordered vector spaces, this volume.
- (P) PERESSINI, A. L., Ordered Topological Vector Spaces, Harper & Row, New York, 1967.
- (V) VALADIER, M., Sous-différentiabilité de fonctions convexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné, Math. Scand., 30 (1972), 65 - 74.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 127 - 132.

LA CONVERGENCE DE CERTAINES METHODES ITERATIVES POUR RESOUDRE CERTAINES EQUATIONS OPERATORIELLES

Ion Păvăloiu

Désignons par E un espace de Banach et considérons une équation opératorielle

$$(1) \quad x = \lambda D(x) + y$$

où $D : E \rightarrow E$ est une application nonlinéaire.

Dans ce qui suit et pour résoudre l'équation (1), nous considérons le procédé itératif suivant:

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n - A(x_n) [x_n - \lambda D(x_n) - y], \quad n = 0, 1, \dots, x_0 \in E$$

où $A(x) : E \rightarrow E$ est une application linéaire pour chaque $x \in E$.

Nous désignerons, pour fixer les idées, par $P : E \rightarrow E$ l'application $P(x) = x - \lambda D(x) - y$.

Si nous supposons que l'application D admet des dérivées jusqu'au second ordre inclusivement sur l'espace E , alors $P'(x) = I - \lambda D'(x)$ et $P''(x) = -\lambda D''(x)$. Si $r \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, nous

écrivons $S(x_0, r) = \{x \in E; \|x - x_0\| \leq r\}$.

En ce qui concerne la convergence du procédé (2) nous avons le théorème suivant :

THEOREME 1. Si les applications D et A(x), l'élément initial x_0 et le nombre réel $r > 0$ remplissent les conditions :

- i. L'application D admet des dérivées Frechet jusqu'au second ordre inclusivement sur $S(x_0, r)$;
- ii. $\|A(x)\| \leq \beta$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$, où $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$;
- iii. $\|I - P'(x) A(x)\| \leq \alpha$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$;
- iv. $\|D''(x)\| \leq M/\lambda$, pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$;
- v. $(\beta \varphi_0) / (1 - d_0) \leq r$ où $\varphi_0 = \|P(x_0)\|$, $d_0 = \frac{M\beta^2 \varphi_0}{2}$
- vi. $d_0 < 1$,

alors la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ générée par (2) est convergente et si nous écrivons $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, alors $P(\bar{x}) = 0$. Nous avons la dé-

limitation suivante :

$$(3) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta d_0^n \varphi_0}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Démonstration. Nous montrerons par induction que les propriétés suivantes ont lieu :

- a) $x_n \in S(x_0, r)$ pour chaque $n = 0, 1, \dots$;
- b) $\|P(x_n)\| \leq d_0^n \varphi_0$, $n = 0, 1, \dots$.

En effet, nous déduisons de (2) pour $n = 0$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|A(x_0)\| \cdot \|P(x_0)\| \leq \beta \varphi_0 \leq \beta \varphi_0 / (1 - d_0) \leq r$$

d'où il s'ensuit que $x_1 \in S(x_0, r)$.

Nous supposons que $x_i \in S(x_0, r)$ pour chaque $i = 0, 1, \dots, k$. Nous avons alors

$$(4) \quad \|P(x_i)\| \leq \|P(x_i) - P(x_{i-1}) - P'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| + \\ + \|P(x_{i-1}) + P'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| \leq \frac{M\beta^2}{2} \|P(x_{i-1})\|^2 + \\ + \alpha \|P(x_{i-1})\|, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

d'où en écrivant $d_{i-1} = \frac{M\beta^2}{2} \|P(x_{i-1})\| + \alpha$, $i = 1, 2, \dots$ et en tenant compte de vi. on déduit immédiatement les inégalités suivantes:

$$(5) \quad d_0 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k.$$

Il résulte de (4) et (5)

$$(6) \quad \|P(x_i)\| \leq d_0 \|P(x_{i-1})\|, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Il s'ensuit

$$\|P(x_i)\| \leq d_0^i \varphi_0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Nous montrerons à présent que $x_{k+1} \in S(x_0, r)$. En effet, nous avons

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^k \|x_{i+1} - x_i\| \leq \beta \sum_{i=0}^k \|P(x_i)\| \leq \\ \leq \beta \varphi_0 \sum_{i=0}^k d_0^i \leq \frac{\beta \varphi_0}{1 - d_0} \leq r.$$

Supposons que $n, p \in \mathbb{N}$, nous avons alors

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=1}^p \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq \beta \sum_{i=1}^p \|x_{n+i-1}\| \leq \\ \leq \beta \rho_0 \sum_{i=1}^p d_0^{n+i-1} \leq \frac{\beta \rho_0 d_0^n}{1 - d_0},$$

d'où il s'ensuit que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par (2) est convergente. Si nous écrivons $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et passons à la limite dans l'inégalité (7) quand $p \rightarrow \infty$, alors nous avons

$$(8) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta \rho_0 d_0^n}{1 - d_0}.$$

On déduit immédiatement de (8) pour $n = 0$ que $\bar{x} \in S(x_0, r)$. Si nous tenons compte que P est une application continue, il résulte de b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = P(\bar{x}) = 0,$$

c'est-à-dire que $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1).

Nous traitons à présent le cas où l'application $A(x)$ est donnée par l'égalité

$$A(x) = I + \lambda D'(x).$$

Nous avons alors

$$I - P'(x) A(x) = I - (I - \lambda D'(x)) (I + \lambda D'(x)) = \lambda^2 (D'(x))^2.$$

Si nous supposons que

$$\|D'(x)\| \leq b,$$

il s'ensuit alors

$$\|I - P'(x) A(x)\| \leq \lambda^2 b^2, \text{ pour chaque } x \in S(x_0, r).$$

Nous avons

$$\|A(x)\| \leq 1 + |\lambda| \cdot b,$$

pour chaque $x \in S(x_0, r)$. En ce cas la condition VI du théorème 1. devient pour $\alpha = \lambda^2 b^2$ et $\beta = 1 + |\lambda| \cdot b$

$$M(1 + |\lambda|b)^2 \cdot \rho_0 + 2 \lambda^2 b^2 - 2 < 0$$

ce qui, en supposant $2 - M \rho_0 > 0$, conduit à l'inégalité

$$|\lambda| < \frac{b(2 - M \rho_0)}{2 + M \rho_0}.$$

En tenant compte de ce qui précède, il résulte du théorème 1 le théorème suivant :

THEOREME 2. Si l'application D , l'élément initial x_0 et le nombre réel $r > 0$ remplissent les conditions suivantes:

i. L'application D admet des dérivées Fréchet jusqu'au second ordre inclusivement pour chaque $x \in S(x_0, r)$;

ii. $\|D'(x)\| \leq b$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$;

iii. $\|D''(x)\| \leq M/|\lambda|$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$;

iv. $2 - M \rho_0 > 0$ où $\rho_0 = \|x_0 - \lambda D(x_0) - y\|$;

v.

$$\frac{\rho_0(1 + |\lambda|b)}{1 - d_0} \leq r \text{ où } d_0 = M[(1 + |\lambda|b)^2/2] \cdot \rho_0 +$$

$$+ \lambda^2 b^2 ;$$

vi. $|\lambda| \leq b(2 - M \rho_0)/(2 + M \rho_0)$,

alors la suite générée par

$$x_{n+1} = x_n - [I - \lambda D'(x_n)] [x_n - \lambda D(x_n) - y],$$

$n = 0, 1, \dots$ converge vers la solution $\bar{x}$ de l'équation (1) et l'on a la délimitation :

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{(1 + |\lambda|b) d_0^n \rho}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \dots$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kanterovici L. V., O metodî Niutona Trudî Mat. Inst. V.A. Steklova 28, 104-144 (1949).
- [2] Diaconu A., Păvăleiu I., Sur quelques méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles, Revue d'Analyse Numérique et de la Théorie de l'Approximation, Tome 1, 45-61 (1972).
- [3] Păvăleiu I., Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence, Mathematica, Cluj, 12 (35) 1, 149-158 (1970).

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 133 - 136.

SUR L'ESTIMATION DES ERREURS EN CONVERGENCE NUMÉRIQUE DE CERTAINES MÉTHODES D'ITÉRATION

par

Ion Păvăleiu

Soit E un espace de Banach et

$$(1) \quad x = \lambda D(x) + y, \quad D(0) = 0,$$

une équation opératorielle, où $\lambda \in \mathbb{R}$, $D: E \rightarrow E$, $x, y \in E$ et 0 est l'élément neutre de l'espace E .

En vue de la résolution de l'équation (1) nous considérons le procédé itératif suivant :

$$(2) \quad x_{n+1} = \lambda D(x_n) + y, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = y.$$

Nous désignons par $S = \{x \in E; \|x\| \leq \rho\}$ la sphère de rayon ρ et centre 0 de l'espace E .

Concernant la convergence du procédé d'itération (2) nous nous servons du théorème suivant [4]

THEOREME 1. Si l'application D et l'élément y de l'équation (1) vérifient les conditions :

1. $\|D(x_1) - D(x_2)\| \leq \phi(\rho) \|x_1 - x_2\|$ pour tous les $x_1, x_2 \in S(0, \rho)$ où $\phi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ est une fonctionnelle;

$$11. \quad \gamma = |\lambda| \phi(\rho) < 1;$$