

alors la suite générée par

$$x_{n+1} = x_n - [1 - \lambda D'(x_n)] [x_n - \lambda D(x_n) - y],$$

$n = 0, 1, \dots$ converge vers la solution $\bar{x}$ de l'équation (1) et l'on a la délimitation :

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{(1 + |\lambda|b) d_0^n \rho_0}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \dots$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kantorovici L. V., O metodi Niutona Trudi Mat. Inst. V.A. Steklova 28, 104-144 (1949).
- [2] Diaconu A., Păvăloiu I., Sur quelques méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles, Revue d'Analyse Numérique et de la Théorie de l'Approximation, Tome 1, 45-61 (1972).
- [3] Păvăloiu I., Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence, Mathematica, Cluj, 12 (35) 1, 149-158 (1970).

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics

Research Seminars

Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods

Preprint Nr. 1, 1986, pp. 133 - 136.

SUR L'ESTIMATION DES ERREURS EN CONVERGENCE NUMÉRIQUE

DE CERTAINES MÉTHODES D'ITÉRATION

par

Ion Păvăloiu

Soit E un espace de Banach et

$$(1) \quad x = \lambda D(x) + y, \quad D(0) = 0,$$

une équation opératorielle, où $\lambda \in \mathbb{R}$, $D: E \rightarrow E$, $x, y \in E$ et 0 est l'élément neutre de l'espace E .

En vue de la résolution de l'équation (1) nous considérons le procédé itératif suivant :

$$(2) \quad x_{n+1} = \lambda D(x_n) + y, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = y.$$

Nous désignons par $S = \{x \in E; \|x\| \leq \rho\}$ la sphère de rayon ρ et centre 0 de l'espace E .

Concernant la convergence du procédé d'itération (2) nous nous servons du théorème suivant [4]

THEOREME 1. Si l'application D et l'élément y de l'équation (1) vérifient les conditions :

- i. $\|D(x_1) - D(x_2)\| \leq \sigma(\rho) \|x_1 - x_2\|$ pour tous les $x_1, x_2 \in S(0, \rho)$ où $\sigma: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ est une fonction nulle;
- ii. $\gamma = |\lambda| \sigma(\rho) < 1$;

$$\text{iii. } \|y\| \leq (1-\gamma)\rho.$$

alors l'équation (1) admet une seule solution $\bar{x} \in S(0, \rho)$.

Cette solution s'obtient comme limite de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ générée par la méthode (2) et on a l'estimation

$$(3) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\gamma^{n+1}}{1-\gamma} \|y\|; \quad n = 0, 1, \dots$$

Soit à présent $D_\varepsilon: E \rightarrow E$ une application qui vérifie les conditions:

$$\text{i}_1. \quad \|D(x) - D_\varepsilon(x)\| \leq \eta_1(\varepsilon, \rho) \text{ pour tout } x \in S(0, \rho) \text{ où}$$

$$\eta_1: [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_1(\varepsilon, \rho) = 0, \quad \forall \rho > 0$$

$$\text{ii}_1. \quad \|D_\varepsilon(x_1) - D_\varepsilon(x_2)\| \leq \theta_\varepsilon(\rho) \|x_1 - x_2\|, \text{ pour tout}$$

$$x_1, x_2 \in S(0, \rho) \text{ où } \theta_\varepsilon: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty);$$

$$\text{iii}_1. \quad |\theta(\rho) - \theta_\varepsilon(\rho)| < \eta_2(\varepsilon) \text{ où } \eta_2: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ et}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_2(\varepsilon) = 0;$$

iv₁. Nous considérons un élément pour lequel

$$\|y - y_\varepsilon\| \leq \eta_3(\varepsilon) \text{ où } \eta_3: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ et}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_3(\varepsilon) = 0.$$

En vue de la résolution de l'équation (1) nous considérerons, à la place du procédé itératif (2) le procédé itératif suivant:

$$(4) \quad \xi_{n+1} = \lambda D_\varepsilon(\xi_n) + y_\varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \xi_0 = y_\varepsilon.$$

Concernant la convergence du procédé (4) on a le théorème suivant:

THEOREME 2. Si les conditions du théorème 1 sont remplies, l'opérateur D_ε et l'élément y_ε vérifient les conditions i₁ - iv₁

et si

$$(5) \quad \delta = (1-\gamma)\rho + \|y\| > 0,$$

alors il existe un $\bar{\varepsilon} > 0$, tel que pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ on a

$$(6) \quad \tau_\varepsilon = |\lambda| \theta_\varepsilon(\rho) \leq \gamma + |\lambda| \eta_2(\varepsilon) < 1;$$

et

$$(7) \quad \|y_\varepsilon\| \leq (1 - \tau_\varepsilon)\rho$$

Démonstration. En effet, du fait que $\gamma = |\lambda| \theta(\rho) < 1$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_2(\varepsilon) = 0$ il s'ensuit qu'il existe un nombre $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ tel que pour $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_1$ on ait

$$\tau_\varepsilon = |\lambda| \theta_\varepsilon(\rho) \leq |\lambda| \theta(\rho) + |\lambda| \eta_2(\varepsilon) < 1$$

et

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon\| &\leq \|y\| + \eta_3(\varepsilon) \leq (1-\gamma)\rho - \delta + \eta_3(\varepsilon) \leq \\ &(1 - \tau_\varepsilon)\rho + |\lambda| \eta_2(\varepsilon)\rho + \eta_3(\varepsilon) - \delta \leq (1 - \tau_\varepsilon)\rho \end{aligned}$$

pour $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_2$ parce que $\eta_3(\varepsilon) \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\eta_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si l'on prend maintenant

$$\bar{\varepsilon} = \min \{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$$

alors le théorème est démontré. Les relations (6) et (7) assurent la convergence de la suite $(\xi_n)_{n=0}^\infty$ déterminée à l'aide du procédé (4).

Nous montrons à présent que dans les conditions du théorème 2 on a l'estimation suivante:

$$(8) \quad \|\bar{x} - \xi_n\| \leq \frac{|\lambda| \theta(\rho) \|\xi_n - \xi_{n-1}\| + |\lambda| \eta_1(\varepsilon, \rho) + \eta_3(\varepsilon)}{1 - \gamma}$$

En effet, nous avons

$$\|\bar{x} - \bar{f}_n\| \leq |\lambda| \|D(\bar{x}) - D(\bar{f}_{n-1})\| + \|\bar{y} - \bar{y}_n\| \leq$$

$$|\lambda| \alpha(\rho) \|\bar{x} - \bar{f}_n\| + |\lambda| \alpha(\rho) \|\bar{f}_n - \bar{f}_{n-1}\| + |\lambda| \tau_1(\varepsilon, \rho) + \tau_3(\varepsilon)$$

et l'inégalité (8) en résulte. Il résulte de (8) pour $n \rightarrow \infty$

$$\|\bar{x} - \bar{f}\| \leq \frac{|\lambda| \tau_1(\varepsilon, \rho) + \tau_3(\varepsilon)}{1 - \tau}$$

$$\text{où } \bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Babici, D.M., Ivanov, V.N., Otzena polnoi progresnosti pri reshenia nelineinykh operatornykh uravnenii metodov prestoi iteratsii. Jurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki 7, 5, 988-1000 (1967).
- [2]. Păvăloiu, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor. Editura DACIA Cluj-Napoca 1976.
- [3]. Urabe, M., Error Estimation in Numerical Solution of Equations by Iteration Process, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 26, 77-91 (1962).

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 137 - 174.

SUR LA LONGUEUR DE CERTAINS INTERVALLES D'INTERPOLATION POUR DES CLASSES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

Dumitru Ripeanu

§ 1. L'objet de cette note est le même qu'en [1]. On considère des classes d'équations différentielles linéaires du second ordre, déterminées par le fait que les maximums des valeurs des coefficients sont des nombres donnés, qui déterminent la classe respective, les mêmes pour toutes les équations de la classe et on étudie la manière dont varie la longueur d'un certain intervalle d'interpolation de la classe, alors que les nombres respectifs prennent toutes les valeurs positives, compatibles avec une relation entre eux, donnée d'avance.

L'instrument d'investigation est une méthode comprise dans les relations (8) - (11).

On considère l'équation

$$(1) \quad (E) \quad y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$$

dans laquelle les coefficients $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont des fonctions

- (1) continues, non identiquement nulles dans un intervalle $[0, L]$ de la variable avec $L > 0$ donné d'avance.

On écrit

$$(2) \quad \begin{cases} M_s = \max_{x \in [0, L]} |p_s(x)| > 0 \quad (s = 1, 2) \\ B_1(p) = \frac{2}{\sqrt{1-4p}} \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \quad (0 < p < \frac{1}{4}) \\ B_2(p) = \frac{2}{\sqrt{1+4p}} \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \quad (p > \frac{1}{4}) \end{cases}$$