

"BABES-BOLYAI" University
 Faculty of Mathematics and Physics
 Research Seminars
 Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
 Preprint Nr. 1, 1987, pp.

SUR LA MANIÈRE D'OBTENIR ET SUR LA CONVERGENCE DE CERTAINES MÉTHODES ITÉRATIVES

Adrian Diaconu

Dans le travail [8] nous avons introduit la notion de couple itératif attaché à une équation opérationnelle non-linéaire, ainsi que la notion d'ordre d'un couple itératif. À l'aide de cette notion nous avons établi des théorèmes généraux de convergence pour les méthodes itératives fournies par des couples itératifs.

Dans ce travail nous continuerons l'étude des méthodes itératives fournies par des couples itératifs. Ainsi nous présenterons quelques modalités d'obtention des couples itératifs par la modification de certains opérateurs itératifs bien connus. Ensuite nous établirons des théorèmes de convergence pour les méthodes itératives fournies par les couples itératifs construits.

1. Introduction

Considérons l'équation opérationnelle

$$(1.1) \quad f(x) =$$

où $f: X \rightarrow Y$ est une application non-linéaire ; X et Y étant des espaces linéaires normés et 0 représentant l'élément nul de l'espace Y .

D'une manière similaire à celle utilisée dans les travaux [50], [9], [7], [8] nous introduisons la notion d'opérateur itératif attaché à l'équation (1.1).

Définition 1.1. L'opérateur non-linéaire $Q: X \rightarrow X$ s'appelle opérateur itératif à un seul pas, attaché à l'équation (1.1) si chaque solution de l'équation (1.1) vérifie aussi l'équation
 $Q(x) = x$.

On peut obtenir une classe importante d'opérateurs itératifs à un seul pas, si nous envisageons le polynôme abstrait d'interpolation de type Taylor [10] de la fonction $f^{-1}: Y \rightarrow X$ sur le noeud $f(x)$ ayant l'ordre de multiplicité r et considérons la valeur de ce polynôme sur l'élément $Q \in Y$. L'expression de l'opérateur itératif obtenue de cette manière est :

$$(1.2) \quad Q: X \rightarrow X ; \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(-1)^j}{j!} [f^{-1}(f(x))]^{(j)} (f(x))^j$$

L'application $[f^{-1}(f(x))]^{(j)} \in \mathcal{L}_j(Y, X)$ représente la dérivée de type Fréchet d'ordre j de l'application $f^{-1}: Y \rightarrow X$ sur le point $f(x)$.

Dans le travail [7] nous avons établi la relation suivante:

$$(1.3) \quad [f^{-1}(f(x))]^{(j)} (f(x))^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{(i_2, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_{k,k}} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_{k,k}} (-1)^{j+k-1} F([f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x), \dots, [f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x)) \{ [f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x) \}^j$$

Dans l'expression ci-dessus nous avons désigné par $\mathcal{J}_{k,k}^{(i_1, \dots, i_k)}$ l'ensemble des $[i_2, \dots, i_k]$ enchaînements des couplages fournis par :

$$\{ [f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x), \dots, [f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x) \}.$$

$$F([f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x), \dots, [f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x)) \in \mathcal{J}_{j,j}^{(i_1, \dots, i_j)} \quad \text{est donc}$$

un enchaînement calculé sur le point :

$$([f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x), \dots, [f^{-1}(f(x))]^{-1} f(x)) \in X^j.$$

Les notions utilisées ci-dessus ont été introduites en [6].

En outre par $\mathcal{J}_{j,k}$ nous avons désigné l'ensemble des solutions du système :

$$(1.4) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + 3i_4 + \dots + (j-1)i_j = j-1 \\ i_2 + i_3 + i_4 + \dots + i_j = j-k-1 \end{cases}$$

Dans la classe des opérateurs itératifs définis par les relations (1.2) - (1.4) sont contenus les opérateurs itératifs bien connus :

a) l'opérateur itératif qui fournit la méthode de Newton-Korovitch, $Q: X \rightarrow X$ défini par

$$(1.5) \quad Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x),$$

obtenu pour $r = 2$ du cas général ;

b) l'opérateur itératif qui fournit la méthode de Tchébycheff $Q: X \rightarrow X$ défini par

$$(1.6) \quad Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x) - \frac{1}{2} [f'(x)]^{-1} f(x) \{ [f'(x)]^{-1} f(x) \}^2$$

obtenu pour $r = 3$ du cas général.

Dans le cas général de l'opérateur défini par les relations (1.2) - (1.3) nous employons la dénomination d'opérateur de type Tchébycheff d'ordre r .

Une autre classe d'opérateurs itératifs est formée des opérateurs qui s'obtiennent par des modifications d'un opérateur itératif donné ; ces modifications ayant la mission de conférer

de nouvelles qualités à la convergence de la suite des approximations fournies.

Par exemple, soit $Q: X \rightarrow X$ un opérateur itératif donné. En supposant que l'application $f: X \rightarrow Y$ admet des dérivées de type Fréchet sur le point $x \in D \subset X$ nous pouvons considérer l'application

$$(1.7) \quad T: X \rightarrow X, \quad T(x) = Q(x) - [f'(x)]^{-1} f(Q(x)).$$

On obtient de cette manière un nouvel opérateur itératif dénommé l'opérateur itératif de Traub. Dans le cas particulier $Q = I_X$ (l'application identique de l'espace X) l'opérateur de Traub revient à l'opérateur de Newton.

On peut choisir aussi $Q: X \rightarrow X$ par $Q(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x)$ en ce cas l'opérateur de Traub correspondant sera défini par la relation suivante :

$$(1.8) \quad T(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x) - [f'(x)]^{-1} f(x - [f'(x)]^{-1} f(x)).$$

Une notion importante dans l'exposé qui suit est celle de différence divisée d'une application non-linéaire.

Definition 1.2. Considérons une application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$ et $D \subset X$. On appelle différence divisée de l'application f sur les points $x, y \in D$, une application linéaire marquée par $[x, y; f]$ qui vérifie les conditions :

- i) $[x, y; f](x - y) = f(x) - f(y)$,
- ii) si l'application $f: X \rightarrow Y$ admet une dérivée de type Fréchet du premier ordre sur le point $x \in D$, alors $[x, x; f] = f'(x)$.

Les différences divisées d'ordre supérieur s'introduisent par induction de la manière suivante :

Definition 1.3. En supposant que pour la fonction $f: X \rightarrow Y$ et pour chaque sous-ensemble de n points de l'ensemble

$\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ ont été définies les différences divisées d'ordre $n-1$, par la différence divisée d'ordre n de l'application $f: X \rightarrow Y$ sur les points $x_1, \dots, x_{n+1}$ on entendra l'application n -linéaire $[x_1, \dots, x_{n+1}; f]$ qui vérifie les conditions suivantes:

$$1) \quad [x_1, \dots, x_{n+1}; f](x_i - x_j) = [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}; f],$$

pour chaque $i \neq j$;

$$ii) \quad [x, x, \dots, x; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x), \text{ si la dérivée de type Fréchet d'ordre } n \text{ de l'application } f \text{ existe.}$$

Dans ce qui suit nous désignons par $\mathcal{L}_n(X, Y)$ l'ensemble des applications n -linéaires définies sur l'ensemble X et à valeurs dans l'espace Y . Pour $\mathcal{L}_1(X, Y)$ nous employons la notation $\mathcal{L}(X, Y)$.

À l'aide des différences divisées on peut construire l'opérateur itératif dénommé de type Aitken-Steffensen. Pour donner l'expression de cet opérateur considérons deux opérateurs itératifs $Q_1, Q_2: X \rightarrow X$ à l'aide desquels nous définissons l'opérateur $Q: X \rightarrow X$ par la relation suivante :

$$(1.9) \quad Q(x) = Q_1(x) - [Q_1(x), Q_2(x); f]^{-1} f(Q_1(x))$$

Nous remarquons que dans le cas où l'on prend $Q_1 = Q_2 = I_X$ l'opérateur de Aitken-Steffensen revient à l'opérateur de Newton-Kantorovich. Dans ce cas il est nécessaire de supposer que l'application $f: X \rightarrow Y$ admet une dérivée de type Fréchet sur le point x et que l'application $[f'(x)]^{-1}$ existe. Si on choisit $Q_1 = I_X$ et $Q_2 = \bar{Q}$ on obtient l'opérateur de Steffensen proprement dit :

$$(1.10) \quad Q(x) = x - [x, Q(x); f]^{-1} f(x).$$

L'importance des opérateurs itératifs réside dans le fait que à l'aide des ces opérateurs on construit des suites qui approximent la solution d'équation (1.1).

Définition 1.4. Désignons par $Q: X \rightarrow X$ un opérateur itératif attaché à l'équation (1.1) et par x_0 un élément arbitraire de X . La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui s'obtient à partir de l'élément initial x_0 en obtenant les autres termes par la relation de récurrence :

$$(1.11) \quad x_{n+1} = Q(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

s'appelle suite d'approximation fournie par l'opérateur Q .

À l'aide d'un opérateur itératif Q et d'un point initial x_0 on peut donc construire la suite d'approximations $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose maintenant le problème de déterminer les conditions dans lesquelles cette suite converge vers une solution $\bar{x}$ de l'équation (1.1). Il est également important de déterminer une borne supérieure de l'erreur avec laquelle après n itérations l'élément x_n approxime la solution $\bar{x}$. Du fait qu'il est évident qu'on obtiendra une certaine précision d'approximation après un certain nombre d'itérations nombre qui dépend de l'opérateur Q , le problème se pose d'introduire une grandeur qui caractérisent la vitesse de convergence de la suite définie par (1.11). Une telle grandeur est l'ordre de convergence.

Définition 1.5. Soit $p \in]0, +\infty[$ et $D \subset X$. L'opérateur itératif $Q: X \rightarrow X$ a l'ordre p sur l'ensemble D , s'il existe un nombre $K > 0$, tel que pour chaque $x \in D$ on ait l'inégalité suivante :

$$(1.12) \quad \|f(Q(x))\| \leq K \|f(x)\|^p.$$

Dans le travail [7] nous avons établi un théorème qui fournit des conditions suffisantes pour la convergence de la méthode itérative fournie par l'opérateur itératif défini par (1.2) + (1.3).

Ainsi qu'on la démontré (I. PAVALOIU, [10]) des conclusions du théorème il résulte que :

$$\|f(x_{n+1})\| \leq K \|f(x_n)\|^p$$

ou

$$\|f(Q(x_n))\| \leq K \|f(x_n)\|^p.$$

Cette dernière inégalité exprime le fait que l'opérateur Q a l'ordre p sur l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. La condition que cet opérateur ait l'ordre p sur un ensemble D est trop forte et n'est pas nécessaire pour assurer la convergence de la suite fournie par Q .

Dans les travaux [9], [10] I. PAVALOIU a établi un théorème qui fournit des conditions suffisantes pour assurer l'ordre $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ pour un opérateur itératif et en même temps la convergence de la suite fournie par cet opérateur vers la solution $\bar{x}$, l'existence de laquelle résulte aussi des conditions du théorème.

Nous pouvons constater maintenant que tous les opérateurs itératifs des exemples ci-dessus, contiennent des inverses de certaines applications linéaires. Pour l'obtention de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il faut résoudre à chaque pas d'itération d'une équation opérationnelle linéaire. Ce fait soulève des problèmes spéciaux quand on passe à l'utilisation effective d'une de ces méthodes à la résolution des équations opérationnelles.

On peut éliminer l'impasse ci-dessus mentionné par des modifications effectuées sur l'opérateur itératif considéré, modifications qui conduisent à la notion de couple itératif.

La notion de couple itératif a été introduite dans le travail [8]. L'introduction de cette notion a été inspirée par la méthode itérative obtenue par S. UL'M [12] en partant de la méthode de Newton-Kantorovich. Cette méthode consiste dans la construction de deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(I, I)$, en partant de

l'élément initial $x_0 \in X$ et de l'opérateur linéaire $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$, à l'aide des relations :

$$(1.13) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n f(x_n) \\ A_{n+1} = A_n (2I - f'(x_{n+1}) A_n) \end{cases} \quad n=0, 1, 2, \dots ;$$

I étant l'opérateur unitaire de l'espace linéaire normé Y .

Ainsi qu'il est facile de le remarquer, on obtient la méthode décrite par les relations (1.13), par le remplacement de l'application $[f'(x_n)]^{-1}$, application qui intervient dans la relation qui définit la méthode de Newton-Kantorovich, par l'opérateur $A_n \in \mathcal{L}(Y, X)$ et l'on obtient cet opérateur par récurrence à l'aide de la deuxième relation (1.13). On peut ainsi affirmer que la méthode décrite par les relations (1.13) approxime d'une certaine manière la méthode de Newton-Kantorovich.

Nous mentionnons que des recherches semblables à celles présentées ci-dessus, mais visant la méthode de la corde et la méthode de Steffensen, ont été effectuées dans les travaux [2], [3].

A cause de la diversité des méthodes qu'on peut obtenir de la manière ci-dessus il est nécessaire de présenter étude unitaire des celles-ci. Cette étude peut s'effectuer à l'aide de la notion de couple itératif, notion qui a été introduite dans le travail [8] par la définition suivante :

Définition 1.6. Considérons deux espaces linéaires et normés X et Y . La paire d'applications (Q, R) , où $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ et $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ s'appelle couple itératif attaché à l'équation $f(x) = \theta$, si pour chaque solution $\bar{x} \in X$ de cette équation les conditions suivantes sont remplies :

a) $Q(\bar{x}, A) = \bar{x}$, pour chaque $A \in \mathcal{L}(Y, X)$

b) si il existe $[f'(\bar{x})]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, alors

$$R(\bar{x}, [f'(\bar{x})]^{-1}) = [f'(\bar{x})]^{-1}.$$

La définition 1.6 montre que la mission de l'application Q est l'approximation de la solution $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ et celle de l'application R est l'approximation de $[f'(\bar{x})]^{-1}$.

L'essence de la notion de couple itératif consiste en l'élimination des inverses des applications linéaires et dans le remplacement de ces inverses par des opérateurs d'approximation, qui se calculent par une relation de récurrence.

Dans les paragraphes qui vont suivre nous présenterons quelques méthodes d'obtention des couples itératifs en partant des opérateurs itératifs.

§ 2. Méthodes d'obtention des couples itératifs. Couples itératifs généralisés. Procédés itératifs fournis par des couples itératifs.

Considérons d'abord la méthode bien connue de Schultz [1], employée pour l'approximation de l'inverse d'une application linéaire.

La méthode de Schultz consiste dans la construction d'une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $B_n \in \mathcal{L}(Y, X)$, à l'aide de la relation de récurrence:

$$(2.1) \quad B_{n+1} = B_n (2I - B B_n).$$

Dans cette relation $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ est l'application qu'il faut inverser et $B_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$, l'élément initial de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application arbitraire. Supposons qu'a lieu l'inégalité $\|I - B B_0\| < 1$. On démontre facilement que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers B^{-1} et que

$$(2.2) \quad \|B^{-1} - B_n\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|I - BB_0\|^{2^n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

La convergence de B_n vers B^{-1} est donc quadratique.

Remplaçons maintenant la relation (2.1) par la relation plus générale suivante :

$$(2.2') \quad B_{n+1} = B_n \sum_{k=0}^r (I - BB_n)^k; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dans le travail [8] on a démontré que l'inégalité suivante est remplie :

$$(2.3) \quad \|B^{-1} - B_n\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|I - BB_0\|^{(r+1)^n}; \quad n \in \mathbb{N}$$

Cette relation exprime la fait que l'ordre de convergence est $r+1$.

Les résultats présentés ci-dessus justifient la définition suivante :

DÉFINITION 2.1. Soient X et Y deux espaces linéaires et normés et l'application $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle qu'il existe l'application $B^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. L'application $S_{r+1}(B, \tilde{B}) \in \mathcal{L}(Y, X)$ définie par la relation suivante :

$$(2.4) \quad S_{r+1}(B, \tilde{B}) = \tilde{B} \sum_{k=0}^r (I - B\tilde{B})^k,$$

où $\tilde{B} \in \mathcal{L}(Y, X)$ est une application arbitraire, s'appelle $r+1$ -approximante de B^{-1} .

Si nous envisageons la définition 2.1 nous pouvons proposer la méthode suivante pour éliminer les inverses des applications linéaires qui sont comprises dans l'expression d'un opérateur itératif :

Supposons que l'opérateur itératif $Q_0 : X \rightarrow X$ contient dans son expression les inverses des opérateurs linéaires distincts

$B_1, \dots, B_q \in \mathcal{L}(X, Y)$ qui peuvent être des fonctions de $x \in X$ ou non. Supposons que l'application $B_i \in \mathcal{L}(X, Y)$ se présente m_i fois ; $i = \overline{1, q}$. Nous remplacerons l'application B_i à la j -ième parution par $S_{r_{ij}+1}(B_i, \tilde{B}_i)$, $j = \overline{1, m_i}$, $i = \overline{1, q}$, où $\tilde{B}_i$ est une application arbitraire. Dans le cas où

$$(2.5) \quad Q_0(x) = Q(x, \underbrace{B_1(x), \dots, B_1(x)}_{m_1}, \dots, \underbrace{B_q(x), \dots, B_q(x)}_{m_q})$$

nous obtenons l'application $Q : X \times (\mathcal{L}(Y, X))^q \rightarrow X$ définie par

$$(2.6) \quad Q(x, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_q) = \\ = \tilde{Q}(x, S_{r_{11}+1}(B_1(x), \tilde{B}_1), \dots, S_{r_{1m_1}+1}(B_1(x), \tilde{B}_1), \dots, S_{r_{iq}+1}(B_q(x), \tilde{B}_q), \dots, S_{r_{iqm_q}+1}(B_q(x), \tilde{B}_q))$$

Il est nécessaire de considérer auprès de l'application Q les applications $R_i : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ qui se définissent par les relations

$$(2.7) \quad R_i(x, \tilde{B}_i) = S_{s_i+1}(B_i(x), \tilde{B}_i); \quad i = \overline{1, q}.$$

Les nombres naturels r_{ij} , $j = \overline{1, m_i}$, $i = \overline{1, q}$ et s_i ; $i = \overline{1, q}$ seront choisis convenablement.

On obtient de cette façon l'ensemble ordonné d'applications $(Q, R_1, \dots, R_q)$. Dans le cas $q = 1$ si nous supposons que $B_1(\bar{x}) = f'(\bar{x})$, pour chaque solution $\bar{x}$ de l'équation (1.1), (biensur en cas d'existence de $f'(\bar{x})$), cet ensemble représente un couple itératif. A cause de ce fait nous employons pour l'ensemble ordonné $(Q, R_1, \dots, R_q)$ la dénomination de système itératif.

Dans ce qui suit nous présentons quelques exemples d'obtention des systèmes itératifs et en particulier des couples itératifs.

A) Considérons pour commencer l'opérateur de Tchébycheff

du r -ième ordre défini par les relations (1.2)-(1.3). Ainsi qu'il résulte de ces relations nous remarquons que dans ce cas on a une seule application linéaire à approximer ; l'application $[f'(x)]^{-1}$. Donc $q = 1$ et $B_1(x) = f'(x)$ pour chaque $x \in X$ et évidemment si nous appliquons la méthode décrite ci-dessus nous obtenons un couple itératif.

Ainsi que nous l'avons mentionné, par

$$F([f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(j)}(x)) \in \mathcal{J}_{j,k}^{[i_2, \dots, i_j]}$$

nous avons désigné un enchaînement de couplages (l'ensemble $\mathcal{J}_{j,k}^{[i_2, \dots, i_j]}$, inclut tous ces enchaînements) qui contient l'application $[f'(x)]^{-1}f''(x)$ i_2 fois, ..., $[f'(x)]^{-1}f^{(j)}(x)$ i_j fois.

Lorsque nous passons au remplacement de $[f'(x)]^{-1}$ par une approximante, l'ordre de cette approximante peut différer à chaque position de $[f'(x)]^{-1}$. Par conséquent l'application $[f'(x)]^{-1}f^{(p)}(x)$ sera remplacée par $S_{r_{pk}+1}^{j_k}(f'(x), A)f^{(p)}(x)$ dans la première position, ..., par $S_{r_{pk}+1}^{j_k}(f'(x), A)f^{(p)}(x)$ dans la i_p -ième position, pour chaque $p = 2, 3, \dots, j$. Dans les approximantes qui interviennent ci-dessus, $A \in \mathcal{L}(Y, X)$ représente une application arbitraire. De cette façon la $[i_2, \dots, i_j]$ enchaînement de couplages qui a été considéré sera un $[1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1]$ enchaînement de couplages fourni par l'ensemble :

$$\left\{ S_{r_{1k}+1}^{j_k}(f'(x), A)f''(x), \dots, S_{r_{1k}+1}^{j_k}(f'(x), A)f''(x), \dots, S_{r_{jk}+1}^{j_k}(f'(x), A)f^{(j)}(x), \dots, S_{r_{jk}+1}^{j_k}(f'(x), A)f^{(j)}(x) \right\}$$

Ce nouvel enchaînement contient donc $i_2 + i_3 + \dots + i_j = j - k - 1$ applications qui peuvent être distinctes. Désignons par $\mathcal{K}_{j,k}^{[i_2, \dots, i_j]}$ l'ensemble de tous ces enchaînements.

Du fait que les enchaînements de (1.3) ont été calculés sur l'élément $([f'(x)]^{-1}f(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f(x)) \in X^j$ on déduit que ces nouveaux enchaînements de $\mathcal{K}_{j,k}^{[i_2, \dots, i_j]}$ seront calculés sur l'élément :

$$(S_{r_{1k}+1}^{j_k}(f'(x), A)f(x), \dots, S_{r_{jk}+1}^{j_k}(f'(x), A)f(x)) \in X^j$$

Dans ces expressions $j \geq 2$, $k \leq j$. Les termes qui correspondent aux valeurs $j = 0$ et $j = 1$ de (1.2) s'obtiennent séparément avec facilité. En effet, pour $j = 0$ le terme de la somme de (1.2) est x et reste x dans la nouvelle application. Pour $j = 1$ le terme de la somme de (1.2) est $-[f'(x)]^{-1}f(x)$ et sera remplacé par $-S_{r+1}^{(1)}(f'(x), A)f(x)$.

De cette manière nous avons transformé l'opérateur itératif (1.2)-(1.3) dans un couple itératif (Q, R) , où $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ et $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$, les applications Q et R étant définies par les relations :

$$(2.8) \quad Q(x, A) = x - S_{r+1}^{(1)}(f'(x), A)f(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{(i_2, \dots, i_j) \in \mathcal{K}_{j,k}} \sum_{\Phi \in \mathcal{K}_{j,k}^{[i_2, \dots, i_j]}} \frac{(-1)^{k-1}}{j!} T_{j,k,\Phi}^{(i_2, \dots, i_j)}(f(x), f'(x), \dots, f^{(j)}(x), A)$$

$$\text{où : } T_{j,k,\Phi}^{(i_2, \dots, i_j)}(f(x), f'(x), \dots, f^{(j)}(x), A) =$$

$$= \Phi(S_{r_{1k}+1}^{j_k}(f'(x), A)f''(x), \dots, S_{r_{1k}+1}^{j_k}(f'(x), A)f''(x), \dots,$$

$$\dots, S_{r_{jk}+1}^{j_k}(f'(x), A)f^{(j)}(x), \dots, S_{r_{jk}+1}^{j_k}(f'(x), A)f^{(j)}(x)).$$

$$(S_{j+1}^{jk}(f'(x), A)f(x), \dots, S_{j+1}^{jk}(f'(x), A)f(x))$$

et

$$(2.9) \quad R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A)$$

Dans les relations (2.8), (2.9) interviennent les nombres naturels r , $(r_{ht}^{jk}; t = 1, i_s, h = 2, j)$, $(s_h^{jk}; h = 1, j)$, $(i_2, \dots, i_j) \in \mathcal{I}_{jk}$, $k = \overline{0, j-2}$, $j = \overline{2, p-1}$. Ces nombres sont arbitraires et seront choisis convenablement.

Dans cet ensemble de couples itératifs nous remarquerons les cas particuliers suivants :

a) Le cas $p = 2$. Nous obtenons ainsi le couple qui dérive de l'opérateur itératif de Newton, c'est pourquoi nous l'appelons le couple itératif de Newton. Les applications Q et R auront dans ce cas les expressions :

$$(2.10) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x - S_{r+1}(f'(x), A)f(x) \\ R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A) \end{cases}$$

b) Le cas $p = 3$. En ce cas nous obtenons le couple itératif qui dérive de l'opérateur itératif classique de Tchébycheff, c'est pourquoi nous l'appelons le couple itératif de Tchébycheff. On a donc :

$$(2.11) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x - S_{r+1}(f'(x), A)f(x) - \\ - \frac{1}{2} S_{r+1}(f'(x), A)f''(x)(S_{s_1+1}(f'(x), A)f(x), S_{s_2+1}(f'(x), A)f(x)) \\ R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A) \end{cases}$$

c) Le cas $p = 4$. L'opérateur itératif qui s'obtient de

(1.2) - (1.3) a l'expression :

$$(2.12) \quad Q(x) = x - [f'(x)]^{-1}f(x) - \frac{1}{2}[f'(x)]^{-1}f''(x)([f'(x)]^{-1}f(x))^2 - \\ - (1/2)[f'(x)]^{-1}f''(x)([f'(x)]^{-1}f(x), [f'(x)]^{-1}f''(x)([f'(x)]^{-1}f(x))^2 + \\ + \frac{1}{6}[f'(x)]^{-1}f'''(x)([f'(x)]^{-1}f(x))^3.$$

Le couple itératif qui s'obtient dans ce cas est défini par les relations :

$$(2.13) \quad Q(x, A) = x - S_{r+1}(f'(x), A)f(x) - \\ - \frac{1}{2} S_{r+1}(f'(x), A)f''(x)(S_{s_1+1}(f'(x), A)f(x), S_{s_2+1}(f'(x), A)f(x)) - \\ - \frac{1}{2} S_{r+1}(f'(x), A)f''(x)(S_{s_1+1}(f'(x), A)f(x), S_{r+1}(f'(x), A)f''(x) \\ (S_{s_2+1}(f'(x), A)f(x), S_{s_3+1}(f'(x), A)f(x)) + \\ + \frac{1}{6} S_{r+1}(f'(x), A)f'''(x)(S_{s_1+1}(f'(x), A)f(x), S_{s_2+1}(f'(x), A), S_{s_3+1}(f'(x), A))$$

$$(2.14) \quad R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A).$$

Au cas où l'on considère des valeurs de p plus grandes que 4, on obtient des couples itératifs à expressions de plus en plus compliquées.

B) Considérons maintenant l'opérateur itératif de Traub (1.7). Par la transformation de cet opérateur nous obtenons un couple itératif. Ce couple sera appelé, le couple itératif de Traub. Ainsi si nous supposons que l'opérateur de Traub $T^*: X \rightarrow X$ est défini à l'aide de $Q: X \rightarrow X$ qui ne contient pas des inversions d'applications linéaires, nous obtenons le couple (T, R) où les applications $T: X \times \mathcal{L}(X, X) \rightarrow X$ et $R: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ sont définies par les relations suivantes :

$$(2.14) \quad \begin{cases} T(x, A) = Q(x) - S_{r+1}(f'(x), A)f(Q(x)) \\ R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A) \end{cases} \quad (2.1) - (2.1)$$

Dans le cas où $Q = I$ (l'opérateur unitaire de X), il est évident que le couple itératif de Traub revient à celui de Newton. On peut choisir $Q(x) = x - A_0 f(x)$ où $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ est un opérateur fixé pour toute la durée du procédé itératif d'approximation, nous obtenons un autre cas particulier qui rentre dans le cas des couples itératifs définis par (2.14).

Nous pouvons considérer aussi le cas plus compliqué de l'opérateur de Traub où l'opérateur composant Q contient lui-même des inversions de certaines applications linéaires. Un exemple de ce cas est constitué par l'opérateur défini par la relation (1.8).

Supposons donc que l'opérateur itératif Q contient les inversions des applications linéaires $B_1(x), \dots, B_m(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors l'opérateur Q considéré au système itératif $(\bar{Q}, E_1, \dots, E_m)$ où $\bar{Q} : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ s'obtient de Q par le remplacement des applications $[B_i(x)]^{-1}$ par $S_{r_i+1}(B_i(x), A) : i = \overline{1, m}$ et $E_i(x, A) = S_{q_i+1}(B_i(x), A), i = \overline{1, m}$. Dans l'opérateur itératif de Traub $T : X \rightarrow X$ intervient aussi l'application $[f'(x)]^{-1}$ qui se remplacera par $S_{q+1}(f'(x), A)$ et on ajoutera au système itératif l'application $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ définie par $R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A)$ pour chaque $x \in X, A \in \mathcal{L}(Y, X)$. On obtiendra alors le système itératif $(\bar{T}, E_1, \dots, E_m, R)$, où les applications sont définies par les relations suivantes :

$$(2.15) \quad \begin{cases} \bar{T}(x, A) = \bar{Q}(x, A) - S_{r+1}(f'(x), A)f(\bar{Q}(x, A)) \\ R_k(x, A) = S_{q_k+1}(B_k(x), A) ; k = \overline{1, m} \\ R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A) \end{cases}$$

Dans le cas particulier où Q contient lui-même seulement l'application $[f'(x)]^{-1}$, les applications $E_1, \dots, E_m$ n'ont plus de sens, de sorte que le système itératif revient à un couple itératif proprement dit $(\bar{T}, R)$ où :

$$(2.16) \quad \begin{cases} \bar{T}(x, A) = \bar{Q}(x, A) - S_{r+1}(f'(x), A)f(\bar{Q}(x, A)) \\ R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A) \end{cases}$$

Par exemple si nous considérons l'opérateur itératif défini par la relation (1.8), la seule inversion d'application linéaire qui intervient est $[f'(x)]^{-1}$, mais cette inversion se retrouve aussi dans l'expression de Q . En fait on a $Q(x) = x - [f'(x)]^{-1}f(x)$. Donc $\bar{Q}(x, A) = x - S_{s+1}(f'(x), A)f(x)$. Nous obtenons ainsi le couple itératif $(\bar{T}, R)$ défini par les relations suivantes :

$$(2.17) \quad \begin{cases} \bar{T}(x, A) = x - S_{s+1}(f'(x), A)f(x) - S_{r+1}(f'(x), A)f(x - S_{s+1}(f'(x), A)f(x)) \\ R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A) \end{cases}$$

À titre d'exemplification du cas général (2.15) nous construisons le système itératif qui dérive de l'opérateur défini par la relation

$$(2.18) \quad T(x) = x - [x, x - A_0 f(x); f]^{-1} f(x) - [f'(x)]^{-1} f(x - [x, x - A_0 f(x); f]^{-1} f(x))$$

En ce cas $Q(x) = x - [x, x - A_0 f(x); f]^{-1} f(x)$ donc : $Q(x, A) = x - S_{s+1}([x, x - A_0 f(x); f], A)f(x)$ en on obtiendra la système itératif (T, R_1, R) défini par les relations suivantes :

$$(2.19) \quad \begin{cases} \bar{T}(x, A) = x - S_{s+1}([x, x - A_0 f(x); f], A)f(x) - S_{r+1}(f'(x), A)f(x - S_{s+1}([x, x - A_0 f(x); f], A)f(x)) \\ R_1(x, A) = S_{q_1+1}([x, x - A_0 f(x); f], A) \\ R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A) \end{cases}$$

$$R(x, A) = S_{q+1}(f'(x), A)$$

C) Considérons maintenant l'opérateur itératif du type Aitken-Steffensen défini par la relation (2.9). Si nous supposons que dans les expressions des opérateurs itératifs les inverses de certaines applications linéaires ne figurent pas alors si nous utilisons un procédé analog à celui utilisé dans les cas antérieurs nous obtenons un couple itératif appelé le couple itératif du type Aitken-Steffensen. Dans ce cas l'application linéaire dont on approxime l'inverse est $[Q_1(x), Q_2(x); f] \in \mathcal{L}(X, Y)$. Nous obtenons de cette façon le couple itératif (Q, R) où $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ et $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ et ces applications se définissent par les relations suivantes :

$$(2.20) \quad \begin{cases} Q(x, A) = Q_1(x) - S_{r+1}([Q_1(x), Q_2(x); f], A) f(Q_1(x)) \\ R(x, A) = S_{q+1}([Q_1(x), Q_2(x); f], A) \end{cases}$$

Dans le cas particulier $Q_1 = I$ (l'opérateur unitaire de l'espace X) et $Q_2 = \bar{Q}$ on obtient le couple itératif qui dérive de l'opérateur classique de Steffensen. Ce couple s'appellera le couple itératif de Steffensen. Les expressions des applications $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ et $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ seront :

$$(2.21) \quad \begin{cases} Q(x, A) = x - S_{r+1}([x, \bar{Q}(x); f], A) f(x) \\ R(x, A) = S_{q+1}([x, \bar{Q}(x); f], A) \end{cases}$$

Au où l'on a aussi $Q = I$ le couple défini par les relations (2.21) revient au couple itératif de Newton.

Considérons maintenant le cas plus compliqué où les expressions des opérateurs itératifs Q_1 et Q_2 contiennent des inversions d'applications linéaires. En ce cas l'opérateur de Steffensen conduira à des systèmes itératifs.

Supposons donc que l'opérateur Q_1 contient les inversions des applications linéaires $B_1^{(1)}(x), \dots, B_{m_1}^{(1)}(x)$ cependant que l'opérateur Q_2 contient les inversions des applications linéaires $B_1^{(2)}(x), \dots, B_{m_2}^{(2)}(x)$. Nous supposons que toutes ces applications linéaires sont distinctes. Alors l'opérateur Q_1 conduira au système itératif $(\bar{Q}_1, R_1^{(1)}, \dots, R_{m_1}^{(1)})$, où l'on obtiendra $\bar{Q}_1$ de Q_1 par le remplacement des applications $[B_i^{(1)}(x)]^{-1}$ par $S_{r_i+1}(B_i^{(1)}(x), A)$; $i = \overline{1, m_1}$, cependant que $R_i^{(1)}(x, A) = S_{q_i+1}(B_i^{(1)}(x), A)$; $i = \overline{1, m_1}$. L'opérateur Q_2 considèrera au système itératif $(\bar{Q}_2, R_1^{(2)}, \dots, R_{m_2}^{(2)})$, où l'on obtiendra $\bar{Q}_2$ de Q_2 par le remplacement des applications $[B_i^{(2)}(x)]^{-1}$ par $S_{r_i+1}(B_i^{(2)}(x), A)$; $i = \overline{1, m_2}$. L'application $[Q_1(x), Q_2(x); f]^{-1}$ sera remplacée par $S_{r+1}([\bar{Q}_1(x, A), \bar{Q}_2(x, A); f], A)$ et on devra ajouter au système itératif l'application définie par $R(x, A) = S_{q+1}([\bar{Q}_1(x, A), \bar{Q}_2(x, A); f], A)$. Ainsi l'opérateur itératif de type Aitken-Steffensen conduira-t-il au système itératif $(Q, R_1^{(1)}, \dots, R_{m_1}^{(1)}, R_1^{(2)}, \dots, R_{m_2}^{(2)}, R)$

$$(2.21) \quad \begin{cases} \bar{Q}(x, A) = \bar{Q}_1(x, A) - S_{r+1}([\bar{Q}_1(x, A), \bar{Q}_2(x, A); f], A) f(\bar{Q}_1(x, A)) \\ R_i^{(k)}(x, A) = S_{q_i+1}(B_i^{(k)}(x), A); i = \overline{1, m_k}; k = \overline{1, 2} \\ R(x, A) = S_{q+1}([\bar{Q}_1(x, A), \bar{Q}_2(x, A); f], A) \end{cases}$$

A titre d'exemple du système itératif (2.21) considérons l'opérateur itératif $Q : X \rightarrow X$ défini par la relation (1.9) dans laquelle les applications Q_1 et Q_2 sont définies par les

relations

$$(2.22) \begin{cases} \bar{Q}(x, A) = \bar{Q}_1(x, A) - S_{x,1}([\bar{Q}_1(x, A), \bar{Q}_2(x, A); f], A) f(\bar{Q}_1(x, A)) \\ R_1(x, A) = S_{Q_1+1}([x, x - A_0 f(x); f], A) \\ R_2(x, A) = S_{Q_2+1}([x, x - A_0 f(x); f], A) \\ R(x, A) = S_{Q+1}([\bar{Q}_1(x, A), \bar{Q}_2(x, A); f], A) . \end{cases}$$

Dans les relations (2.22) les applications $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2 : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ sont définies par les relations suivantes :

$$\bar{Q}_1(x, A) = x - S_{x,1}([x, x - A_0 f(x); f], A) f(x) \quad \text{et}$$

$$\bar{Q}_2(x, A) = x - S_{x,2+1}([x, x - A_0 f(x); f], A) f(x) .$$

Les couples itératifs de même les systèmes itératifs sont importants par les suites qu'ils fournissent. En ce sens nous définissons la notion de procédé itératif fourni par un couple itératif.

DÉFINITION 2.2. On appelle procédé itératif fourni par un couple itératif (Q, R) la paire de suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $x_0 \in X$ est un élément arbitraire et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ est une application arbitraire et

$$(2.23) \begin{cases} x_{n+1} = Q(x_n, A_n) \\ A_{n+1} = R(x_{n+1}, A_n) \quad n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Dans le cas d'un système itératif on a une définition similaire.

DÉFINITION 2.3. Considérons le système itératif $(Q, R_1, \dots, R_m, R)$ où $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$; $R_i : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X) \quad i=1, m$; $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$. On appelle procédé itératif fourni par ce système itératif, l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $(B_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $k=1, m$; $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations à récurrence :

$$(2.24) \begin{cases} x_{n+1} = Q(x_n, A_n) \\ B_{k,n} = R_k(x_{n+1}, A_n) \\ A_{n+1} = R(x_{n+1}, A_n) \end{cases}$$

où $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ sont arbitraires.

Il résulte des relations (2.24) que le rôle le plus important revient aux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendamment du fait qu'elles sont fournies par un couple ou par un système itératif.

En ce qui va suivre on posera le problème de déterminer des conditions suffisantes pour que les suites composantes d'un procédé itératif fourni par un couple itératif ou par un système itératif soient convergentes. Une telle étude effectuée dans le cas général fait l'objet du travail [].

Les paragraphes qu'il suivra, contiennent des théorèmes relatifs à la convergence de quelques-uns des procédés itératifs construits ci-dessus.

Dans ce qui va suivre nous adopterons les notations suivantes :

- par $\text{Lip}_{L, \Omega}(X, Y)$ nous désignons l'ensemble des applications non-linéaires $g : X \rightarrow Y$ qui vérifient sur l'ensemble $\Omega \subseteq X$ la condition de Lipschitz avec la constante L ; c'est-à-dire que pour chaque x et $y \in X$ on a l'inégalité :

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\|$$

- au cas où Z représente un espace linéaire normé, nous désignons par $S(a, \varepsilon) \subseteq Z$ la boule dont la centre est en $a \in Z$ et le rayon ε , $\varepsilon > 0$; c'est-à-dire :

$$S(a, \varepsilon) = \{x \in Z \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$$

- par $\mathcal{T}_X(\mathcal{F})$ nous désignons l'ensemble des opérateurs itéra-

tifs rattachés à l'application $f: X \rightarrow Y$; c'est-à-dire à l'équation (1.1).

§ 3. La convergence des procédés itératifs fournis par le couple itératif de Newton.

Ainsi qu'on l'a vu ci-dessus le couple itératif de Newton est constitué des applications $Q: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ et $R: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ qui se définissent par les expressions (2.10).

Le procédé itératif fourni par ce couple est donc composé par les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où :

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n \left[\sum_{k=0}^n (I - f(x_k) A_k)^k \right] f(x_n) \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^n (I - f(x_{n+k}) A_n)^k \end{cases}$$

En ce qui concerne la convergence de ces suites nous établissons le théorème suivant.

THEOREME 3.1. Si les conditions suivantes sont remplies :

i) les ensembles X et Y sont organisés comme des espaces de Banach, la fonction $f: X \rightarrow Y$ admet une dérivée du type Fréchet du premier ordre $f' \in \text{Lip}_{L,D}(X, \mathcal{L}(Y, X))$, où $D \subset X$; il existe un nombre $B > 0$ tel que pour chaque $x \in D$ il existe l'application $[f'(x)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ et $\|[f'(x)]^{-1}\| \leq B$;

ii) le point initial $x_0 \in D$ et l'application initiale $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ sont choisis tels que le nombre donné par l'égalité

$$d = \max \left\{ \frac{LB^2(1+c_2)^2}{c_1} \|f(x_0)\|, \frac{1}{c_2} \|I - f(x_0)A_0\| \right\}$$

est inférieur à l'unité, et la boule $S(x_0, R)$ de rayon $R = \frac{c_1(1+c_2^{n+1})d}{(LB(1-c_2^2)(1-d))}$ est incluse en D ; les nombres $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ étant choisis tels qu'ils vérifient

le système :

$$(3.2) \quad \begin{cases} c_1(1+c_2+\dots+c_2^n)^2 + c_2^{n+1} \leq 1 \\ [c_2 + c_1(1+c_2+\dots+c_2^n)]^{n+1} \leq c_2 \end{cases}$$

alors :

j) les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations (3.1) avec $r \geq 0$ et $q \geq 1$ sont convergentes ;

jj) l'équation (1.1) admet une solution $\bar{x} \in S(x_0, R)$ et $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

jjj) il existe l'application $\bar{A} = [f'(\bar{x})]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ et $\bar{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$;

iv) on a les inégalités suivantes :

$$(3.3) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{c_1(c_2^{n+1}-1)}{LB(c_2^2-1)} d^{2^n}$$

$$(3.4) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq B(1+c_2) \frac{\alpha^{q+1} d^{(q+1)2^n} - \alpha d^{2^n}}{\alpha d^{2^n} - 1}; \quad \alpha = c_2 + c_1 \frac{c_2^{n+1}-1}{c_2-1}$$

$$(3.5) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{c_1(c_2^{n+1}-1) d^{2^n}}{LB(c_2^2-1)(1-d^{2^n})}$$

$$(3.6) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha d^{2^k})^k}{1-(d^{2^k})^k}$$

Démonstration. Nous démontrerons en employant la méthode de l'induction mathématique que les propositions suivantes sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$a) \quad x_n \in S(x_0, R) ;$$

$$b) \quad \rho_n = LB^2(1+c_2)^2 \|f(x_n)\| \leq c_1 d^{2^n} ;$$

$$\delta_n = \|I - f'(x_n)A_n\| \leq c_2 d^{2^n} ;$$

$$c) \quad \|A_n\| \leq B(1+c_2) .$$

En effet des hypothèses du théorème il résulte évidemment que les propositions a) et b) sont vraies pour $n = 0$. En ce qui concerne la proposition c) on a :

$$\|A_0\| = \|[f'(x_0)]^{-1} - [f'(x_0)]^{-1}(I - f'(x_0)A_0)\| \leq$$

$$\leq \|[f'(x_0)]^{-1}\| (1 + \|I - f'(x_0)A_0\|) \leq B(1 + C_2 d)$$

et du fait que $d < 1$ on a $\|A_0\| \leq B(1 + C_2)$, donc la proposition c) est vraie pour $n = 0$.

Supposons maintenant que ces propositions sont vraies pour $n = m$, hypothèse de laquelle nous déduirons leur vérité pour $n = m+1$.

Pour la proposition a) on a :

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^m \|x_{i+1} - x_i\| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^m \|A_i\| \|f(x_i)\| \sum_{k=0}^i \|I - f'(x_k)A_k\|^k \end{aligned}$$

En employant l'hypothèse de l'induction (les propositions b) et c) on déduit :

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^m B(1 + C_2) \frac{c_1 d^{2^i}}{LB^{2(1+C_2)}} \sum_{k=0}^i c_2^k d^{2^k} < \\ &< \frac{c_1(1 + C_2 + \dots + C_2^m)}{LB(1 + C_2)} \sum_{i=0}^m d^{2^i} < \frac{c_1(C_2^{2^{m+1}} - 1)d}{LB(C_2^2 - 1)(1 - d)} = R \end{aligned}$$

d'où il résulte que $x_{m+1} \in S(x_0, R)$, donc la proposition a) est vraie pour $n = m+1$.

Pour établir les inégalités de b) on a :

$$\begin{aligned} (3.7) \quad \|f(x_{m+1})\| &\leq \|f(x_{m+1}) - f(x_m) - f'(x_m)(x_{m+1} - x_m)\| + \\ &+ \|f(x_m) + f'(x_m)(x_{m+1} - x_m)\|. \end{aligned}$$

Du fait que f admet une dérivée du type Fréchet sur chaque $x \in D$ et du fait de l'appartenance de f' à $\text{Lip}_{L,D}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ il résulte que :

$$(3.8) \quad \|f(x_{m+1}) - f(x_m) - f'(x_m)(x_{m+1} - x_m)\| \leq$$

$$\leq \|f'(\xi_m) - f'(x_m)\| \|x_{m+1} - x_m\|$$

où $\xi_m = x_m + \theta(x_{m+1} - x_m)$; $\theta \in (0, 1)$. Du fait que la boule $S(x_0, R)$ est un ensemble convexe et de l'appartenance de x_m, x_{m+1} à cette boule il résulte que $\xi_m \in S(x_0, R)$, donc que $\xi_m \in D$. Ainsi

$$\begin{aligned} (3.9) \quad \|f'(\xi_m) - f'(x_m)\| &\leq L \|\xi_m - x_m\| = L \theta \|x_{m+1} - x_m\| \leq \\ &\leq L \|x_{m+1} - x_m\| \end{aligned}$$

On déduit donc de (3.8) et de (3.9) que :

$$\begin{aligned} (3.10) \quad \|f(x_{m+1}) - f(x_m) - f'(x_m)(x_{m+1} - x_m)\| &\leq L \|x_{m+1} - x_m\|^2 \leq \\ &\leq L \|A_m\|^2 \|f(x_m)\|^2 \left(\sum_{k=0}^i \|I - f'(x_k)A_k\| \right)^2 \end{aligned}$$

En outre on remarque que :

$$\begin{aligned} f(x_m) + f'(x_m)(x_{m+1} - x_m) &= f(x_m) - f'(x_m)A_m \sum_{k=0}^i (I - f'(x_k)A_k)^k f(x_m) \\ &= [I - f'(x_m)A_m \sum_{k=0}^i (I - f'(x_k)A_k)^k] f(x_m) \end{aligned}$$

On démontre facilement que :

$$I - f'(x_m)A_m \sum_{k=0}^i (I - f'(x_k)A_k)^k = (I - f'(x_m)A_m)^{i+1}$$

et ainsi :

$$(3.11) \quad \|f(x_m) + f'(x_m)(x_{m+1} - x_m)\| \leq \|I - f'(x_m)A_m\|^{i+1} \|f(x_m)\|$$

De (3.7), (3.9) et (3.10) on déduit que :

$$\begin{aligned} (3.12) \quad \|f(x_{m+1})\| &\leq L \|A_m\|^2 \|f(x_m)\|^2 \sum_{k=0}^i \|I - f'(x_k)A_k\|^k + \\ &+ \|I - f'(x_m)A_m\|^{i+1} \|f(x_m)\| \end{aligned}$$

On a aussi :

$$I - f'(x_{m+1})A_{m+1} = I - f'(x_{m+1})A_m \sum_{k=0}^q (I - f'(x_{m+1})A_m)^k = \\ = (I - f'(x_{m+1})A_m)^{q+1}$$

d'où l'on déduit que :

$$\|I - f'(x_{m+1})A_{m+1}\| \leq \|I - f'(x_{m+1})A_m\|^{q+1} \leq \\ \leq (\|I - f'(x_m)A_m\| + \|f'(x_{m+1}) - f'(x_m)\| \cdot \|A_m\|)^{q+1},$$

et du fait que $\|f'(x_{m+1}) - f'(x_m)\| \leq L \|x_{m+1} - x_m\|$ il résulte

$$(3.13) \quad \|I - f'(x_{m+1})A_{m+1}\| \leq \\ \leq [\|I - f'(x_m)A_m\| + L \|A_m\|^2 \sum_{k=0}^q \|I - f'(x_m)A_m\|]^{q+1}$$

De (3.12) et (3.13) et en employant les notations introduites nous déduisons que les suites $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient le système d'inégalités récurrentes suivant :

$$(3.14) \quad \begin{cases} \rho_{m+1} \leq \rho_m^2 \left(\sum_{k=0}^q \delta_m^k \right)^2 + \rho_m \delta_m^{q+1} \\ \delta_{m+1} \leq [\delta_m + \rho_m \sum_{k=0}^q \delta_m^k]^{q+1} \end{cases}$$

En employant les hypothèses b) de l'induction nous déduisons :

$$\rho_{m+1} \leq c_1^2 d^{2^{m+1}} (1 + c_1 d + \dots + c_1^q d^{q \cdot 2^m})^2 + c_1 c_2^{q+1} d^{(q+1)2^m}$$

$$\delta_{m+1} \leq [c_2 + c_1(1 + c_2 d^{2^m} + \dots + c_1^q d^{q \cdot 2^m})]^{q+1} d^{(q+1)2^m}$$

d'où en tenant compte des inégalités $d < 1$, $r \geq 0$ et $q \geq 1$ nous déduisons que :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \rho_{m+1} \leq c_1 [c_1(1 + c_1 + \dots + c_1^q)^2 + c_2^{q+1}] d^{2^{m+1}} \\ \delta_{m+1} \leq [c_2 + c_1(1 + c_1 + \dots + c_1^q)]^{q+1} d^{2^{m+1}} \end{cases}$$

Les nombres C_1 et C_2 vérifient le système (3.2). On déduit donc de (3.15) que :

$$(3.16) \quad \begin{cases} \rho_{m+1} \leq C_1 d^{2^{m+1}} \\ \delta_{m+1} \leq C_2 d^{2^{m+1}} \end{cases}$$

Les inégalités (3.16) indiquent que les propositions c) sont vraies pour $n = m+1$.

Pour démontrer la vérité de la proposition c) pour $n = m+1$ il suffit d'utiliser les relations immédiates

$$\|A_{m+1}\| \leq \| [f'(x_{m+1})]^{-1} + A_{m+1} - [f'(x_{m+1})]^{-1} \| \leq \\ \leq \| [f'(x_{m+1})]^{-1} \| (1 + \|I - f'(x_{m+1})A_{m+1}\|) \leq B(1 + c_2 d^{2^{m+1}}) <$$

qui démontrent que la proposition c) est vraie. $< B(1 + c_2)$

Le principe de l'induction mathématique atteste alors que les propositions a) - c) sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Des ces relations on déduit que :

$$(3.17) \quad \|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \\ \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_i\| \|f(x_i)\| \sum_{k=0}^q \|I - f'(x_i)A_i\|^k < \frac{C_1(1 + c_2 + \dots + c_2^q)^{n+m-1}}{LB(1 + c_2)} \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{2^i} < \\ < \frac{C_1(c_2^{q+1} - 1)d^{2^n}}{LB(c_2^{q+1} - 1)(1 - d^{2^n})}$$

$$(3.18) \quad \|A_{i+1} - A_i\| \leq \|A_i\| \sum_{k=1}^q \|I - f'(x_{i+1})A_i\|^k \leq \\ \leq \|A_i\| \sum_{k=1}^q [\|I - f'(x_i)A_i\| + L \|A_i\|^2 \|f(x_i)\| \sum_{k=1}^q \|I - f'(x_i)A_i\|^k] \leq \\ \leq B(1 + c_2) \sum_{k=1}^q \alpha^k d^{k \cdot 2^i} = B(1 + c_2) \frac{\alpha^{q+1} d^{(q+1)2^i} - \alpha d^{2^i}}{\alpha d^{2^i} - 1}$$

$$\text{oh} \quad \alpha = c_2 + c_1(1 + c_2 + \dots + c_2^q) = c_2 + c_1 \frac{c_2^{q+1} - 1}{c_2 - 1}$$

$$(3.19) \quad \|A_{n+m} - A_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_{i+1} - A_i\| \leq \\ \leq B(1 + c_2) \sum_{i=n}^{n+m-1} \sum_{k=1}^q (\alpha d^{2^i})^k = B(1 + c_2) \sum_{k=1}^q \alpha^k \sum_{i=n}^{n+m-1} (d^{2^i})^k$$

Du fait que $\sum_{i=0}^{n+m-1} (d^{2^i})^k < \frac{d^{k \cdot 2^n}}{1 - d^{k \cdot 2^n}}$, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$

il résulte que

$$(3.20) \quad \|A_{n+m} - A_n\| \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^2 \frac{(\alpha d^{2^n})^k}{1 - (d^{2^n})^k}$$

Les relations (3.19) et (3.20) expriment le fait que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(Y, X)$ sont fondamentales. De la complétude des espaces X et $\mathcal{L}(Y, X)$ il résulte que ces suites sont convergentes. Si nous désignons par $\bar{x}$, respectivement par $\bar{A}$ les limites de ces suites et si nous tenons compte de la continuité de la norme et de la continuité des applications f et f' , nous déduisons des relations b) que :

$$LB^2(1+c_2)^2 \|f(\bar{x})\| = 0$$

$$\|I - f'(\bar{x})\bar{A}\| = 0$$

La première des ces relations implique que $f(\bar{x}) = 0$, donc le fait que $\bar{x} = \lim x_n$ représente une solution pour l'équation (1.1). La deuxième relation exprime le fait que l'application $f'(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ est inversable et $[f'(x)]^{-1} = \bar{A} = \lim A_n$. Si dans les relations (3.17) et (3.19) nous faisons $m \rightarrow \infty$ nous obtenons les relations (3.5) et (3.6). Le théorème est donc démontré.

Parmi les conditions du théorème 3.1, la plus incommode est l'inversabilité de la dérivée du type Fréchet du premier ordre de l'application f , pour chaque $x \in D$ et le fait que cette dérivée est bornée sur D , c'est-à-dire le fait qu'il est nécessaire qu'il existe une constante $B > 0$ telle que pour chaque $x \in D$ on ait $\|[f'(x)]^{-1}\| \leq B$. Cette dernière condition est difficile à vérifier. On peut modifier l'énoncé du théorème 3.1 par l'élimination de la condition incommode au détriment des conditions imposées aux éléments initiaux qui deviendront plus fortes. On a ainsi le théorème

suisant :

THEOREME 3.2. Si l'application $f: X \rightarrow Y$; X et Y étant des espaces de Banach, admet sur l'ensemble DCX une dérivée dy type Fréchet du premier ordre et $f' \in \text{Lip}_{L,D}(X, \mathcal{L}(Y, X))$ et les éléments initiaux $x_0 \in DCX$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ sont choisis de telle manière que :

$$1) \quad d = \max \left\{ \frac{L \|A_0\|^2}{c_1} \|f(x_0)\|, \frac{1}{c_2} \|I - f'(x_0)A_0\| \right\} < 1$$

$$11) \quad \text{la boule } B(x_0, R) \text{ D où } R = \frac{c_1(1-c_2^{n+1})d}{L(1-c_2)\|A_0\|(1-d)}$$

111) les nombres $c_1 > 0, c_2 > 0$ vérifient le système :

$$(3.21) \quad \begin{cases} [c_1(1+c_2+\dots+c_2^n)^2 + c_2^{n+1}](1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{2^n}) \leq 1 \\ [c_2+c_1(1+c_2+\dots+c_2^n)]^{2^{n+1}} \leq c_2 \\ \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2^n} \leq 1 \end{cases}$$

où $\alpha = c_1 + c_2$;

alors il résulte les conditions j) - jjj) du théorème 3.1 où les inégalités (3.3) - (3.6) sont remplacées par les inégalités suivantes :

$$(3.22) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{c_1(1-c_2^{n+1})}{L(1-c_2)\|A_0\|} g_{1,2}(\alpha, d) d^{2^n}$$

$$(3.23) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq \|A_0\| \frac{(\beta d^{2^n})^{2^{n+1}} - \beta d^{2^n}}{\beta d^{2^n} - 1} g_{2,2}(\alpha, d)$$

$$\text{où } \beta = c_2 + c_1 \frac{c_2^{2^{n+1}} - 1}{c_2 - 1}$$

$$(3.24) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{c_1(1-c_2^{n+1})d^{2^n}}{L\|A_0\|(1-c_2)(1-d^{2^n})} g_{1,2}(\alpha, d)$$

$$(3.25) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq \|A_0\| g_{2,q}(\alpha, d) \sum_{k=1}^q \frac{(\beta d^{2^n})^k}{1 - d^{2^k}}$$

Dans l'énoncé ci-dessus nous avons écrit :

$$g_{1,q}(\alpha, d) = \exp \left[\left(\sum_{k=1}^q \frac{(\alpha d)^k}{1 - d^{2^k}} \right) / \left(1 - \sum_{k=1}^q (\alpha d)^k \right) \right]$$

$$g_{2,q}(\alpha, d) = \exp \sum_{k=1}^q \frac{(\alpha d)^k}{1 - d^{2^k}}$$

Démonstration. On démontrera que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ sont vraies les propositions suivantes :

a) $x_n \in S$;

b) $\rho_n = L \|A_n\|^2 \|f(x_n)\| \leq c_1 d^{2^n}$

$$\delta_n = \|I - f'(x_n)A_n\| \leq c_2 d^{2^n}$$

$$c) \|A_n\| \in \left[\frac{\|A_0\|}{g_{1,q}(\alpha, d)}, \|A_0\| g_{2,q}(\alpha, d) \right]$$

Des hypothèses du théorème il résulte immédiatement que les propositions a) - c) sont vraies pour $n = 0$. Supposons donc que ces propositions sont vraies pour chaque $n \leq m$ et nous en déduisons leur vérité pour $n = m+1$.

Pour a) on a :

$$(3.26) \quad \|x_{m+1} - x_m\| \leq \|A_m\| \|f(x_m)\| \sum_{k=0}^m \|I - f(x_k)A_k\|^k \leq \frac{c_1 d^{p^i}}{L \|A_i\|} (1 + c_2 + \dots + c_2^m) \leq \frac{c_1 (1 - c_2^{m+1})}{L (1 - c_2) \|A_0\|} g_{1,q}(\alpha, d) d^{p^i}$$

De (3.26) il résulte que :

$$\|x_{m+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^m \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{c_1 (1 - c_2^{m+1})}{L (1 - c_2) \|A_0\|} g_{1,q}(\alpha, d) \sum_{i=0}^m d^{p^i}$$

$$\leq \frac{c_1 (1 - c_2^{m+1}) \cdot d \cdot g_{1,q}(\alpha, d)}{L (1 - c_2) \|A_0\| (1 - d)} = R$$

donc $x_{m+1} \in S(x_0, R)$.

La manière dont s'établissent les relations b) est absolument analogue à celle utilisée au cas du théorème 3.1.

Pour établir c) on a :

$$\|A_{m+1}\| \leq \|A_m\| \sum_{k=0}^q (\|I - f'(x_m)A_m\| + L \|A_m\|^2 \|f(x_m)\|)^k \leq \|A_m\| \sum_{k=0}^q [(c_1 + c_2) d^{2^m}]^k = \|A_m\| \sum_{k=0}^m (\alpha d^{2^m})^k$$

d'où l'on déduit aussi :

$$(3.27) \quad \|A_{m+1}\| \leq \|A_0\| \prod_{i=0}^m \sum_{k=0}^q (\alpha d^{2^i})^k$$

On a évidemment la relation suivante :

$$\|A_{m+1}\| \geq \|A_m\| \left[1 - \sum_{k=1}^q (\|I - f'(x_m)A_m\| + L \|A_m\|^2 \|f(x_m)\|)^k \right] \geq \|A_m\| \left[1 - \sum_{k=1}^q (\alpha d^{2^i})^k \right]$$

d'où l'on déduit que :

$$(3.28) \quad \|A_{m+1}\| \geq \|A_0\| \prod_{i=0}^m \left[1 - \sum_{k=1}^q (\alpha d^{2^i})^k \right]$$

Des raisonnements et des calculs simples du domaine de l'analyse mathématique nous conduisent aux inégalités suivantes :

$$(3.29) \quad \prod_{i=0}^m \left[1 - \sum_{k=1}^q (\alpha d^{2^i})^k \right] \geq g_{1,q}(\alpha, d)$$

et

$$(3.30) \quad \prod_{i=0}^m \sum_{k=0}^q (\alpha d^{2^i})^k \leq g_{2,q}(\alpha, d)$$

Les relations (3.27) - (3.30) refléchissent le fait que la

propriété c) est aussi vraie pour $n = m+1$.

Le principe de l'induction mathématique assure la vérité des propriétés a) - c) pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

La suite de la démonstration est absolument similaire à celle du théorème 3.1. Il résulte ainsi les inégalités de l'énoncé.

Le théorème est donc démontré.

En examinant les énoncés de ces deux théorèmes on constate le fait que la convergence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est quadratique et que ce fait ne dépend pas des valeurs de $r \geq 0$ et $q \geq 1$. Ainsi on peut conclure que du point de vue de l'ordre de convergence, en tenant compte du volume des calculs, les méthodes obtenues pour $r = 0$ et $q = 1$ sont optimales.

Il reste toutefois le problème du choix du point initial, choix conditionné par la paire de valeurs C_1 et C_2 , déterminée par le système (3.2) ou (3.21) respectivement. Une telle paire sera optimale au cas où le nombre C_1 a la valeur maximale.

Considérons le cas du théorème 3.1, donc le cas auquel on impose à l'opérateur $f'(x)$ son inversabilité et de plus l'existence d'une constante $B > 0$ telle que $\| [f'(x)]^{-1} \| \leq B$ pour chaque $x \in D$.

En ce cadre considérons d'abord le cas $r = 0$. Le système (3.2) devient :

$$(3.31) \quad \begin{cases} C_1 + C_2 \leq 1 \\ (C_1 + C_2)^{q+1} \leq C_2 \end{cases}$$

On déduit avec facilité, à l'aide des méthodes du calcul différentiel, que la paire de valeurs (C_1, C_2) dans laquelle C_1 est maximal est donnée par les relations suivantes :

$$C_1 = \frac{q}{(q+1)^{\frac{q+1}{2}}}, \quad C_2 = \frac{1}{(q+1)^{\frac{q+1}{2}}}$$

Nous remarquons que la suite ayant le terme général $\frac{q}{(q+1)^{\frac{q+1}{2}}}$ est

strictement croissante vers l'unité. Donc plus q est grand, plus C_1 est proche de l'unité, en restant toutefois inférieur à l'unité.

Considérons maintenant le cas auquel r est arbitraire. De la première relation de (3.2) nous déduisons que $C_1 < 1$ et $C_2 < 1$. Donc même dans ce cas il n'est pas possible d'obtenir pour C_1 des valeurs supérieures à l'unité. Ce fait indique qu'il est inutile de considérer des cas auxquels $r > 0$.

Pour $r = 0$ les relations (3.1) deviennent:

$$(3.32) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n f(x_n) \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^q (I - f'(x_n) A_n)^k \end{cases}$$

Du théorème 3.1 il résulte le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.3. Si les ensembles X et Y sont organisés comme des espaces de Banach et la fonction $f: X \rightarrow Y$ admet sur l'ensemble $D \subset X$ une dérivée du type Fréchet du premier ordre, cette dérivée est inversable $f' \in \text{Lip}_{L,D}(X, \mathcal{L}(Y, X))$ et il existe une constante $B > 0$ telle que $\| [f'(x)]^{-1} \| \leq B$; les éléments initiaux $x_0 \in D \subset X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ vérifient les conditions suivantes:

$$i) \quad d = \max \left\{ LB^2 \frac{[(q+1)^{\frac{q+1}{2}} + 1]^2}{q(q+1)^{\frac{q+1}{2}}} \| f'(x_0) \|, (q+1)^{\frac{q+1}{2}} \| I - f'(x_0) A_0 \| \right\} < 1$$

ii) la boule $S(x_0, R) \subset D$ où $R = (ad)/(LB(1-d)(1+(q+1)^{\frac{q+1}{2}}))$ alors il résulte les conclusions i)- iii) du théorème (3.1) et les évaluations des erreurs d'approximation suivantes:

$$(3.33) \quad \| x_{n+1} - x_n \| \leq \frac{q \cdot d^{2^n}}{LB[1 + (q+1)^{\frac{q+1}{2}}]}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(3.34) \|A_{n+1} - A_n\| \leq B \frac{1 + (q+1)^{\frac{q+1}{q}}}{(q+1)^{\frac{q+1}{q}}} \cdot \frac{q+1-d^{q+2}}{(q+1)^{\frac{1}{q}} - d^{2^q}} \cdot d^{2^n}; n \in \mathbb{N}$$

$$(3.35) \|\bar{z} - z_n\| \leq \frac{q d^{2^n}}{LB[1 + (q+1)^{\frac{q+1}{q}}](1-d^{2^n})}; n \in \mathbb{N}$$

$$(3.36) \|\bar{A} - A_n\| \leq \frac{1 + (q+1)^{\frac{q+1}{q}}}{(q+1)^{\frac{q+1}{q}}} \sum_{k=1}^q \frac{d^{k \cdot 2^n}}{(q+1)^{\frac{1}{q}} - d^{k \cdot 2^n}}$$

Dans le cas particulier $q = 1$, donc dans le cas de la méthode (1.13) il résulte que $C_1 = C_2 = 1/4$ et

$$d = \max \left\{ \frac{25LB^2}{4} \|f'(z_0)\|, 4 \|I - f'(z_0)A_0\| \right\} < 1$$

$$R = \frac{d}{5LB(1-d)}$$

et les évaluations des erreurs d'approximation sont données par les inégalités suivantes:

$$(3.37) \|z_{n+1} - z_n\| \leq \frac{d^{2^n}}{5LB}; n \in \mathbb{N}$$

$$(3.38) \|A_{n+1} - A_n\| \leq \frac{5B}{8} d^{2^n}; n \in \mathbb{N}$$

$$(3.39) \|\bar{z} - z_n\| \leq \frac{d^{2^n}}{5LB(1-d^{2^n})}; n \in \mathbb{N}$$

$$(3.40) \|\bar{A} - A_n\| \leq \frac{5Bd^{2^n}}{8(1-d^{2^n})}; n \in \mathbb{N}$$

Si nous nous plaçons dans le cas du théorème (3.2), donc dans le cas dans lequel nous ne supposons pas l'inversabilité de la dérivée du type Fréchet de l'application f en D , il est nécessaire que les constantes C_1 et C_2 vérifient le système d'inégalités (3.21). En ce système la condition $\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^q \leq 1$ introduit des restrictions plus fortes. Dans les travaux [4], [5] nous avons démontré que dans le cas $r = 0$ on obtient pour C_1 une valeur maximale pour $q = 2$. On obtient en ce cas $C_1 = 2(3\sqrt{3})$, $C_2 = 1(3\sqrt{3})$. Du fait que la troisième condition du système (3.21) ne dépend pas de la valeur de r , nous pouvons conclure que les valeurs des nombres C_1 et C_2 ne s'améliorent pas si on choisit pour r des valeurs supérieures à 0.

Donc dans les conditions du théorème 3.2 le cas optimal est ce qu'on obtiendra pour $r = 0$, $q = 2$, donc celui de la méthode définie par les relations suivantes:

$$(3.41) \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n f(x_n) \\ A_{n+1} = A_n [3I - 3f'(x_{n+1})A_n + (f'(x_{n+1})A_n)^2] \end{cases}$$

Ainsi on aura

$$C_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}, C_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \beta = \frac{15 + 449\sqrt{3}}{3202}$$

$$d = \max \left\{ \frac{3\sqrt{3}L\|A_0\|^2}{2} \|f'(z_0)\|, 3\sqrt{3} \|I - f'(z_0)A_0\| \right\} < 1$$

$$R = \frac{(364\sqrt{2} + 117)d}{1701L\|A_0\|(1-d)} \exp \frac{(\sqrt{3}-1)d^2 + \sqrt{3}d}{3-d^2-d\sqrt{3}}$$

Les évaluations des erreurs d'approximation sont exprimées par les inégalités suivantes :

$$(3.42) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{363\sqrt{3} + 117}{1701 L \|A_0\|} d^{2^n} \exp \frac{(\sqrt{3}-1)d^2 + \sqrt{3}d}{3 - d^2 - d\sqrt{3}}$$

$$(3.43) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq \|A_0\| \frac{15+449\sqrt{3}}{3202} d^{2^n} \left(1 + \frac{15+449\sqrt{3}}{3202} d^{2^n}\right) \cdot$$

$$\exp \frac{(\sqrt{3}-1)d^2 + d}{3(1-d^2)}$$

$$(3.44) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{(363\sqrt{3} + 117)d^{2^n}}{1701 L \|A_0\| (1-d^{2^n})} \exp \frac{(\sqrt{3}-1)d^2 + \sqrt{3}d}{3 - d^2 - d\sqrt{3}}$$

$$(3.45) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq \|A_0\| \left[\frac{(15+449\sqrt{3})d^{2^n}}{3202(1-d^{2^n})} + \left(\frac{15+449\sqrt{3}}{3202} \right)^2 \frac{d^{2^{n+1}}}{1-d^{2^{n+1}}} \right] \cdot$$

$$\exp \frac{(\sqrt{3}-1)d^2 + d}{3(1-d^2)}$$

§ 4. La convergence des procédés itératifs fournis

par des couples itératifs du type Traub.

Considérons l'opérateur $Q \in J_X(f)$, opérateur qui ne contient pas dans son expression l'inverse de certaines applications linéaires variables. Alors, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, à l'aide de l'opérateur Q nous pouvons construire la couple itératif de Traub (T, R) avec $T : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ et $R : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow (Y, X)$, ces deux applications étant définies par les relations (2.14).

Si nous envisageons les expressions des applications $E_{m+1}(f'(x), A)$, le procédé itératif fourni par ce couple sera constitué des suites

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où :

$$(4.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = Q(x_n) - A_n \left[\sum_{k=0}^F (I - f'(x_n)A_n)^k \right] f(Q(x_n)) \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^q (I - f'(x_{n+1})A_n)^k \end{cases}$$

En ce qui concerne la convergence de ces suites nous établissons le théorème suivant :

THEOREME 4.1. Considérons les espaces de Banach X et Y et la fonction $f : X \rightarrow Y$. Si sur l'ensemble $D \subseteq X$ la fonction f admet une dérivée du type Fréchet du premier ordre inversable, $f' \in \text{Lip}_{L,D}(X, \mathcal{L}(X, Y))$; il existe un nombre $B > 0$ tel que $\|f'(x)\|^{-1} \leq B$; par l'opérateur $Q \in J_X(f)$ il existe les nombres $K > 0$, $M > 0$, $p \in \mathbb{N}$ tels que $\|f(Q(x))\| \leq K \|f(x)\|^p$ et $\|Q(x) - x\| \leq M \|f(x)\|$ pour chaque $x \in D$; les éléments initiaux $x_0 \in D \subset X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ vérifient les conditions :

$$i) \quad d = \max \left\{ \frac{1}{c_1} \|f(x_0)\|, \frac{1}{c_2} \|I - f'(x_0)A_0\| \right\} < 1$$

ii) la boule au centre dans le point x_0 et de rayon

$$R = \left[2Mc_1 + B(1+c_2)Kc_1^p \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \right] \frac{d}{1-d^{q-1}},$$

boule désignée par $S(x_0, R)$ fait partie du domaine D où

$$\alpha = \min \{ 2p, r+p+1, p+1, q+1 \} ;$$

iii) les nombres $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ vérifient le système :

$$(4.2) \quad \begin{cases} LB^2(1+c_2)^2 K^2 c_1^{2p} \left(\sum_{k=0}^r c_2^k \right)^2 + Kc_1^p [c_2^{r+1} + LMB(1+c_2)c_1 \sum_{k=0}^r c_2^k] \leq c_1 \\ \left[c_2 + LMB(1+c_2)c_1 + LB^2(1+c_2)^2 Kc_1^p \sum_{k=1}^r c_2^k \right]^{q-1} \leq c_2 \end{cases}$$

alors résultent les conclusions j) - jjj) du théorème 3.1 et aussi résultent les évaluations suivantes de l'erreur d'approximation:

$$(4.3) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq [Mc_1 + B(1+c_2)Kc_1^p] \frac{1 - c_2^{n+1}}{1 - c_2} d^{\alpha^n}; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(4.4) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq B(1+c_2)\beta d^{\alpha^n} \frac{1 - (\beta d^{\alpha^n})^{q+1}}{1 - \beta d^{\alpha^n}}; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{où } \beta = c_1 + LB(1+c_2)c_1 + LB^2(1+c_2)^2Kc_1^p \sum_{k=1}^r c_2^k;$$

$$(4.5) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq [Mc_1 + B(1+c_2)Kc_1^p] \frac{1 - c_2^{n+1}}{1 - c_2} \frac{d^{\alpha^n}}{1 - d^{\alpha^n}(\alpha - 1)}; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(4.6) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq B(1+c_2) \sum_{k=2}^q \frac{(\beta d^{\alpha^n})^k}{1 - d^k \alpha^n (\alpha - 1)}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Comme dans le cas des autres théorèmes nous démontrerons à l'aide de l'induction mathématique que les propositions suivantes sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$a) \quad x_n \in S(x_0, R);$$

$$b) \quad \rho_n = \|f(x_n)\| \leq c_1 d^{\alpha^n}$$

$$\delta_n = \|I - f'(x_n)A_n\| \leq c_2 d^{\alpha^n}$$

$$c) \quad \|A_n\| \leq B(1+c_2).$$

Les propositions sont évidemment vraies pour $n = 0$; nous supposons qu'elles sont vraies pour chaque $n \leq m$ et nous en déduisons qu'elles sont vraies aussi pour $n = m+1$.

Pour la proposition a) on a:

$$(4.7) \quad \|x_{i+1} - x_i\| \leq \|Q(x_i) - x_i\| + \|A_i\| \|f(Q(x_i))\|.$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_i)A_i\|^k \leq \\ & \leq M \|f(x_i)\| + B(1+c_2)K \|f(x_i)\|^p \cdot \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_i)A_i\|^k \leq \\ & \leq Mc_1 d^{\alpha^i} + B(1+c_2)Kc_1^p d^{\alpha^i} [1 + c_2 d^{\alpha^i} + \dots + (c_2 d^{\alpha^i})^r] \leq \\ & \leq [Mc_1 + B(1+c_2)Kc_1^p] \frac{1 - c_2^{r+1}}{1 - c_2} d^{\alpha^i}; \quad i = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

Donc

$$(4.8) \quad \|x_{m+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^m \|x_{i+1} - x_i\| \leq [Mc_1 + B(1+c_2)Kc_1^p] \frac{1 - c_2^{r+1}}{1 - c_2} \cdot \frac{d}{1 - d^{\alpha-1}} \leq R.$$

La relation (4.8) démontre que $x_{m+1} \in S(x_0, R)$.

Ensuite on a:

$$(4.9) \quad \|f(x_{m+1})\| \leq \|f(x_{m+1}) - f(Q(x_m)) - f'(Q(x_m))(x_{m+1} - Q(x_m))\| + \|f(Q(x_m)) + f'(Q(x_m))(x_{m+1} - Q(x_m))\|.$$

D'une manière analogue à celle employée aux démonstrations des théorèmes précédents nous déduisons:

$$(4.10) \quad \|f(x_{m+1}) - f(Q(x_m)) - f'(Q(x_m))(x_{m+1} - Q(x_m))\| \leq L \|x_{m+1} - Q(x_m)\|^2$$

et aussi:

$$(4.11) \quad \|x_{m+1} - Q(x_m)\| \leq \|A_m\| \|f(Q(x_m))\| \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k \leq B(1+c_2)K \|f(x_m)\|^p \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k.$$

De (4.9) et (4.10) nous déduisons que:

$$(4.12) \quad \|f(x_{m+1}) - f(Q(x_m)) - f'(Q(x_m))(x_{m+1} - Q(x_m))\| \leq \\ \leq LB^2(1+c_2)^2 K^2 \|f(x_m)\|^{2p} \left(\sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k \right)^2.$$

En outre on a :

$$(4.13) \quad \|f(Q(x_m)) + f'(Q(x_m))(x_{m+1} - Q(x_m))\| \leq \\ \leq \|I - f'(Q(x_m))S_r(x_m, A_m)\| \|f(Q(x_m))\| \\ \leq (\|I - f'(x_m)S_r(x_m, A_m)\| + \|f'(Q(x_m)) - f'(x_m)\| \|S_r(x_m, A_m)\|) \|f(Q(x_m))\|$$

Mais

$$\|Q(x_m) - x_0\| \leq \|Q(x_m) - x_m\| + \|x_m - x_0\| \leq M\|f(x_m)\| + \|x_m - x_0\| \leq \\ \leq Mc_1 d^{\alpha_m} + [Mc_1 + B(1+c_2)Kc_1^p \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2}] \frac{d}{1-d} \alpha_{-1}$$

et parce que $d^{\alpha_m} \leq d \leq \frac{d}{1-d} \alpha_{-1}$ il résulte que :

$$\|Q(x_m) - x_0\| \leq [2Mc_1 + B(1+c_2)Kc_1^p \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2}] \frac{d}{1-d} \alpha_{-1} = E$$

et ainsi $Q(x_m) \in S(x_0, R) \subseteq D$.

Du fait que $f' \in \text{Lip}_{L,D}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ il résulte que :

$$(4.14) \quad \|f'(Q(x_m)) - f'(x_m)\| \leq L \|Q(x_m) - x_m\| \leq LM \|f(x_m)\|.$$

On a aussi :

$$(4.15) \quad \|I - f'(x_m)S_r(x_m, A_m)\| \leq \|I - f'(x_m)A_m\|^{r+1} \quad \text{et}$$

$$(4.16) \quad \|S_r(x_m, A_m)\| \leq \|A_m\| \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k \leq \\ \leq B(1+c_2) \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k.$$

De (4.13) - (4.16) nous déduisons

$$(4.17) \quad \|f(Q(x_m)) + f'(Q(x_m))(x_{m+1} - Q(x_m))\| \leq$$

$$\leq K(\|I - f'(x_m)A_m\|^{r+1} + LMB(1+c_2)) \|f(x_m)\| \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k \|f(x_m)\|^p.$$

De (4.9), (4.12) et (4.17) on déduit

$$(4.18) \quad \|f(x_m)\| \leq LB^2(1+c_2)^2 K^2 \|f(x_m)\|^{2p} \left(\sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k \right)^2 + \\ + K(\|I - f'(x_m)A_m\|^{r+1} + LMB(1+c_2)) \|f(x_m)\| \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k \|f(x_m)\|^p.$$

En outre on a :

$$\|I - f'(x_{m+1})A_{m+1}\| = \|I - f'(x_m)A_m\|^{q+1} \leq \\ \leq (\|I - f'(x_m)A_m\| + \|A_m\| \|f'(x_{m+1}) - f'(x_m)\|)^{q+1} \leq \\ \leq (\|I - f'(x_m)A_m\| + LB(1+c_2) \|x_{m+1} - x_m\|)^{q+1}$$

et par suite de la relation (4.7) nous déduisons que :

$$(4.19) \quad \|I - f'(x_{m+1})A_{m+1}\| \leq (\|I - f'(x_m)A_m\| + LMB(1+c_2) \|f(x_m)\| +$$

$$LB^2(1+c_2)^2 K \|f(x_m)\|^p \sum_{k=0}^r \|I - f'(x_m)A_m\|^k)^{q+1}.$$

Si nous envisageons les significations de ρ_m et de σ_m de la proposition b) nous obtenons le système d'inégalités récurrentes :

$$(4.20) \quad \rho_{m+1} \leq LB^2(1+c_2)^2 K^2 \rho_m^{2p} \left(\sum_{k=0}^r \sigma_m^k \right)^2 + K(\sigma_m^{r+1} + LMB(1+c_2) \rho_m \sum_{k=0}^r \sigma_m^k) \rho_m^p$$

$$\sigma_{m+1} \leq [\sigma_m + LMB(1+c_2) \rho_m + LB^2(1+c_2)^2 K \rho_m^p \sum_{k=1}^r \sigma_m^k]^{q+1}$$

En employant l'hypothèse de l'induction $\rho_m \leq c_1 d^{\alpha_m}$, $\sigma_m \leq c_1 d^{\alpha_m}$

le fait que c_1 et c_2 vérifient le système d'inégalités (4.2) et le fait que $\alpha = \min\{2p, r+p+1, p+1, q+1\}$ il résulte que :

$$(4.21) \quad \begin{cases} \delta_{m+1} \leq c_1 d^{\alpha m+1} \\ \delta_{m+1} \leq c_2 d^{\alpha m+1} \end{cases},$$

donc les relations b) sont vraies aussi au cas où $n = m+1$. Du principe de l'induction mathématique nous déduirons que ces relations sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

En ce qui concerne la proposition c), cette proposition se déduit d'une manière absolument analogue à celle employée à la démonstration du théorème 3.1.

Des propositions a), b), c), les conclusions j) - jjj) du théorème résultent comme dans la démonstration du théorème 3.1. Les inégalités (4.3) et (4.5) sont également évidentes.

Pour (4.4) on a :

$$\begin{aligned} \|A_{n+1} - A_n\| &\leq \|A_n\| \sum_{k=1}^q \|I - f'(x_{n+1})A_n\|^k \leq \\ &\leq \|A_n\| \sum_{k=1}^q [c_2 + LB(1+c_2)c_1 + LB^2(1+c_2)^2 Kc_1^p \sum_{i=1}^r c_2^i]^k d^{k\alpha n} \leq \\ &\leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^q (\beta d^{\alpha n})^k = B(1+c_2) \frac{\beta d^{\alpha n} - (\beta d^{\alpha n})^{q+1}}{1 - \beta d^{\alpha n}}. \end{aligned}$$

Pour (4.6) on a :

$$\begin{aligned} \|A_{n+m} - A_n\| &\leq B(1+c_2) \sum_{i=n}^{n+m-1} \sum_{k=1}^q (\beta d^{\alpha i})^k = \\ &= B(1+c_2) \sum_{k=1}^q \beta^k \sum_{i=n}^{n+m-1} d^{k\alpha i} \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^q \beta^k \frac{d^{k\alpha n}}{1 - d^{k\alpha n}(\alpha - 1)} \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré.

Ainsi qu'il résulte des inégalités (4.3) - (4.6) la vitesse de convergence du procédé itératif est $\alpha = \min\{2p, r+p+1, p+1, q+1\}$. Au cas où $p \in \mathbb{N}$ on remarque que la valeur de α ne peut pas dépasser $p+1$. Le choix optimal est donc $r = 0, q = p$, dans la construction des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par suite $\alpha = p+1$. Les relations (4.1) deviendront en ce cas :

$$(4.22) \quad \begin{cases} x_{n+1} = Q(x_n) - A_n f(Q(x_n)) \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^p (I - f'(x_{n+1})A_n)^k \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les suites fournies par ces relations ont la vitesse de convergence égale à $p+1$.

Considérons maintenant le cas au quel le procédé itératif est fourni par le couple itératif qui est constitué par les applications avec les expressions données par les relations (2.16). En ce cas la paire de suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fournie par les relations :

$$(4.24) \quad \begin{cases} x_{n+1} = Q(x_n, A_n) - A_n \left[\sum_{k=0}^r (I - f'(x_n)A_n)^k \right] f(Q(x_n, A_n)) \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^q (I - f'(x_{n+1})A_n)^k \end{cases}$$

où $Q : I \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow I$.

En ce qui concerne la convergence des suites fournies par les relations (4.24) on a le théorème suivant :

THEOREME 4.2. Si les hypothèses du théorème 3.1 relativement à I, Y ; $f : I \rightarrow Y$ et $f' : I \rightarrow \mathcal{L}(I, Y)$ sont vérifiées et si de plus, l'application $Q : I \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow I$ vérifie pour chaque $x \in D$ et $A \in D_1 \subset (Y, X)$ les conditions suivantes :

$$(4.25) \quad \|f(Q(x, A))\| \leq \sum_{i=1}^m K_i \|f(x)\|^{p_i} \|I - f'(x)A\|^{q_i};$$

où $p_i + q_i > 1$ pour chaque $i = \overline{1, m}$

$$(4.26) \quad \|Q(x, A) - x\| \leq M \|f(x)\|$$

si les éléments initiaux $x_0 \in D \subset X$ et $A_0 \in D_1 \subset \mathcal{L}(Y, X)$ vérifient les conditions suivantes :

$$i) \quad d = \max \left\{ \frac{1}{c_1} \|f(x_0)\|, \frac{1}{c_2} \|I - f'(x_0)A_0\| \right\} < 1$$

ii) la boule $S(x_0, R) \subset D$ avec :

$$R = \left[Mc_1 + B(1+c_2) \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \left(\sum_{j=0}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right) \right] \frac{d}{1-d^{\alpha-1}}$$

iii) les nombres $c_1 > 0, c_2 > 0$ vérifient le système :

$$(4.27) \quad LB^2(1+c_2)^2 \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right)^2 \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} + \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right) \cdot \left[c_2^{r+1} + LMB(1+c_2) c_1 \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \right] \leq c_1$$

$$\left[c_2 + LMB(1+c_2)c_1 + LB^2(1+c_2)^2 \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right) \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \right] \leq c_2$$

alors il s'ensuit les conclusions j) - jjj) du théorème 3.1 et les évaluations des erreurs d'approximation suivantes :

$$(4.28) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \left[Mc_1 + B(1+c_2) \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right) \right] d^{\alpha^n}$$

$$(4.29) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \left[Mc_1 + B(1+c_2) \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right) \right] \frac{d^{\alpha^n}}{1-d^{\alpha^n(p+1)}}$$

$$(4.30) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq B(1+c_2) \beta d^{\alpha^n} \frac{1-(\beta d^{\alpha^n})^q}{1-\beta d^{\alpha^n}}$$

$$(4.31) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^q \frac{(\beta d^{\alpha^n})^k}{1-d^{\alpha^n(\alpha-1)}}$$

où $\alpha = \min \{ 2(p_1+q_1), \dots, 2(p_m+q_m), p_1+q_1+1, \dots, p_m+q_m+1 \}$

$$\text{et } \beta = c_2 + LMB(1+c_2)c_1 + LB^2(1+c_2)^2 \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right) \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2}$$

Démonstration. Nous emploierons les propositions a)-c) de la démonstration du théorème 4.1. Nous démontrerons ces propositions en employant la méthode de l'induction mathématique.

Elles sont évidemment vraies pour $n = 0$. Ainsi nous supposons qu'elles sont vraies jusqu'à un nombre $n \in \mathbb{N}$ et nous désirons les déduire pour $n+1$.

Pour a) on a :

$$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \|Q(x_i, A_i) - x_i\| + \|A_i\| \|f(Q(x_i, A_i))\| \sum_{k=0}^k \|I - f'(x_i)A_i\|^k \leq$$

$$\leq M \|f(x_i)\| + B(1+c_2) \left(\sum_{j=0}^h \|I - f'(x_i)A_i\|^j \right) \left(\sum_{j=1}^m K_j \|f(x_i)\|^{p_j} \|I - f'(x_i)A_i\|^{q_j} \right)$$

$$\leq [Mc_1 + B(1+c_2) \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right)] d^{\alpha^i}, \quad i = \overline{0, n}$$

d'où

$$(4.32) \quad \|x_{n+1} - x_0\| \leq [Mc_1 + B(1+c_2) \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \left(\sum_{j=1}^m K_j c_1^{p_j} c_2^{q_j} \right)] \frac{d}{1-d^{\alpha-1}} \leq R$$

donc $x_{n+1} \in S(x_0, R)$.

De même que dans le cas de la démonstration du théorème 4.1, où nous avons démontré que $Q(x_n) \in S(x_0, R)$, nous démontrerons ici que $Q(x_n, A_n) \in S(x_0, R)$.

On a aussi

$$(4.33) \quad \|f(x_{n+1})\| \leq LB^2(1+c_2)^2 \left(\sum_{j=1}^m K_j \|f(x_n)\|^{p_j} \|I - f'(x_n)A_n\|^{q_j} \right)^2$$

$$\cdot \left(\sum_{j=0}^h \|I - f'(x_n)A_n\|^j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m K_j \|f(x_n)\|^{p_j} \|I - f'(x_n)A_n\|^{q_j} \right).$$

$$\cdot (\|I - f'(x_n)A_n\|^{p+1} + LMB(1+c_2)\|f(x_n)\|\sum_{j=0}^m \|I - f'(x_n)A_n\|^{q_j})$$

et

$$\|I - f'(x_{n+1})A_{n+1}\| \leq [\|I - f'(x_n)A_n\| + LMB(1+c_2)\|f(x_n)\| +$$

$$+ LB^2(1+c_2)^2(\sum_{j=1}^m K_j \|f(x_n)\|^{p_j} \|I - f'(x_n)A_n\|^{q_j}) \sum_{j=0}^m \|I - f'(x_n)A_n\|^{q_j}]^{q+1}$$

Si nous tenons compte que $\rho_n = \|f(x_n)\|$ et $\delta_n^0 = \|I - f'(x_n)A_n\|$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous obtenons le système d'inégalités récurrentes suivant :

$$(4.34) \begin{cases} \rho_{n+1} \leq LB^2(1+c_2)^2(\sum_{j=1}^m K_j \rho_n^{p_j} \delta_n^{q_j})^2 (\sum_{j=0}^m \delta_n^{q_j})^2 + \\ + (\sum_{j=1}^m K_j \rho_n^{p_j} \delta_n^{q_j})(\delta_n^{p+1} + LMB(1+c_2)\rho_n \sum_{j=0}^m \delta_n^{q_j}) \\ \delta_{n+1} \leq [\delta_n + LMB(1+c_2)\rho_n + LB^2(1+c_2)^2(\sum_{j=1}^m K_j \rho_n^{p_j} \delta_n^{q_j})(\sum_{j=0}^m \delta_n^{q_j})]^{q+1} \end{cases}$$

Si nous utilisons les hypothèses de l'induction $\rho_n \leq c_1 \delta_n^{p+1}$, $\delta_n \leq c_2 \delta_n^{q+1}$, le fait que c_1 et c_2 vérifient le système (4.34) et le fait que

$\alpha = \min\{2(p_1+q_1), \dots, 2(p_m+q_m), p_1+q_1+1, \dots, p_m+q_m+1, q+1\}$, il résulte que $\rho_{n+1} \leq c_1 \delta_{n+1}^{p+1}$, $\delta_{n+1} \leq c_2 \delta_{n+1}^{q+1}$ et ces dernières

littés achevent la démonstration des propositions a) - c). De même que dans le cas des autres théorèmes il s'ensuit les conclusions d) - fff). En outre, les évaluations de l'erreur d'approximation résultent de la même manière que dans le cas du théorème 4.1. Ainsi le théorème est démontré.

Définition 4.1. L'application $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ a l'ordre p en $D \times D_1$, $p \geq 0$, s'il existe les nombres $m \in \mathbb{N}$, $K_j > 0$, $p_j > 0$, $q_j > 0$, $j = \overline{1, m}$ tels que

$$p = \min\{p_1+q_1, \dots, p_m+q_m\}$$

et que l'inégalité (4.25) soit vérifiée pour chaque $x \in D \subset X$ et $A \in D_1 \subset \mathcal{L}(Y, X)$.

Si nous analysons les conclusions du théorème 4.2 en ce qui concerne la vitesse de convergence du procédé itératif défini par les relations (4.24), nous pouvons conclure que dans le cas où l'application $Q : Y \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ a l'ordre p et si les conditions du

théorème 4.2 sont vérifiées, la valeur du nombre α , qui figure en conclusion de ce théorème, est $\min\{p+1, q+1\}$. Pour obtenir une valeur maximale pour le nombre α , nombre qui représente la vitesse de convergence du procédé itératif, nous choisirons donc $q = p$, l'ordre devient en ce cas égal à $p+1$.

Considérons maintenant le cas particulier dans lequel l'application $Q : X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ est définie par la relation suivante :

$$(4.35) \quad Q(x, A) = x - B_t(x, A)f(x), \quad t \in \mathbb{N}.$$

Si nous considérons l'ensemble

$$D_1 = \{A \in \mathcal{L}(Y, A) / \|A\| \leq B_1\}, \text{ alors pour chaque } x \in D$$

et chaque $A \in D_1$ on a :

$$(4.36) \quad \|f(Q(x, A))\| \leq LB_1^2 \|f(x)\|^2 \sum_{k=0}^t \|I - f'(x)A\|^k + \\ + \|I - f'(x)A\|^{t+1} \|f(x)\|.$$

L'inégalité (4.36) est une inégalité du type (4.25) où l'on prendra $m=t+2$, $K_j = LB_1^2$, $p_j = 2$, $q_j = j-1$; $j = \overline{1, t+1}$, $K_{t+2} = 1$, $p_{t+2} = t+1$, $q_{t+2} = 1$, d'où il résulte immédiatement $p=2$, ce nombre ne dépendant pas de t .

Donc en (4.35) la valeur optimale de t est 0. Nous obtenons ainsi

$$(4.35)' \quad Q(x, A) = x - Af(x).$$

Considérons maintenant avec l'application Q définie par (4.35)' le procédé itératif (4.24).

Définissons l'ensemble D_1 . Pour ce faire nous choisissons $B_1 = B(1+c_2)$ et ainsi nous remarquons que D_1 représente l'ensemble des applications $A_n, n \in \mathbb{N}$ fournies par (4.24).

Il résulte de la remarque ci-dessus que la vitesse de convergence des suites fournies par les relations (4.24) sera $\min\{2, q+1\}$ et qu'on obtiendra le cas optimal pour $q=2$. En ce cas les relations (4.24) conduisent aux relations suivantes:

$$(4.37) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n f(x_n) - A_n f(x_n - A_n f(x_n)) \\ A_{n+1} = A_n [3I - 3f'(x_{n+1})A_n + (f'(x_{n+1})A_n)^2]. \end{cases}$$

Puisque l'application $Q(x, A)$ est donnée par (4.35) on a :

$$(4.36) \quad \|f(Q(x, A))\| \leq LB^2(1+c_2)^2 \|f(x)\|^2 + \|I - f'(x)A\| \|f(x)\|$$

donc $m=2$, $K_1 = LB(1+c_2)$, $K_2=1$, $p_1=2$, $q_1=0$, $p_2=1$, $q_2=1$.

On a évidemment $\alpha=3$ et $M = B(1+c_2)$. Le système (4.27) devient :

$$(4.39) \quad LB^2(1+c_2)^2 c_1 [LB(1+c_2)c_1+c_2]^2 + [LB(1+c_2)c_1+c_2] \cdot [c_2+LB_1B^2(1+c_2)^2] \leq 1$$

$$[c_2 + c_1LB^2(1+c_2)^3(1+LBc_1)]^3 \leq c_2.$$

On a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.3. Si les hypothèses du théorème 3.1 relativement

à $X, Y, f: X \rightarrow Y, f': X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ sont vérifiées et si les conditions
1) et ii) du théorème 4.2 relativement aux éléments initiaux $x_0 \in D$
et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ avec $R = Bc_1(1+c_2)(LBc_1+LBc_1c_2+c_2+2)d/(1-d^3)$ sont
vérifiées et si c_1, c_2 vérifient le système (4.39), alors il résulte
les conclusions i) - iii) du théorème 3.1 et les évaluations suivantes
de l'erreur d'approximation

$$(4.40) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq Bc_1(1+c_2)(1+LBc_1+LBc_1c_2+c_2)d^{3^n}$$

$$(4.41) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq Bc_1(1+c_2)(1+LBc_1+LBc_1c_2+c_2)d^{3^n}/(1-d^2 \cdot 3^n)$$

$$(4.42) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq B(1+c_2)(d^{3^n} + d^2 \cdot 3^n)$$

où $p = c_2 + LB^2c_1(1+c_2)^3(1+LBc_1)$

$$(4.43) \quad \|A - A_n\| \leq B\beta(1+c_2)(d^{3^n}/(1-d^2 \cdot 3^n) + \beta d^2 \cdot 3^n/(1-d^4 \cdot 3^n))$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 Albrecht, J., Bemerkungen zum Iterationsverfahren von Schultz zum Matrizeninversion, ZAMM 41 (1961), 262-263.
- 2 Diaconu, A., Păvăloiu, I., Sur quelques méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles, Revue d'analyse Num. et de la Théorie de l'Approx. 1 (1972), 45-61.
- 3 Diaconu, A., Păvăloiu, I., Asupra unor metode iterative pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare, Revista de Analiză Numerică și Teoria Aproximației 2, 1 (1973), 61-79.
- 4 Diaconu, A., Sur quelques méthodes itératives combinées, Mathematica 22 (45), 2 (1980), 247-261.
- 5 Diaconu, A., Sur quelques méthodes itératives combinées (II), "Babeș-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research seminars, Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods, Preprint Nr. 1, 1980, 95-130.
- 6 Diaconu, A., Sur la dérivée de type Fréchet d'ordre n de l'application inverse, Idem, Preprint Nr. 1, 1983, 42-71.
- 7 Diaconu, A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenues par l'interpolation inverse (III), Idem, Preprint Nr. 1, 1985, 21-70.
- 8 Diaconu, A., Couples itératifs. Méthodes itératives obtenues à l'aide des couples itératifs, Idem, Preprint Nr. 1, 1986, 27-67.
- 9 Păvăloiu, I., Sur les procédés itératifs à une ordre élevé de convergence, Mathematica, 12 (35) 2 (1980), 309-324.

- 10 Păvălcu, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
- 11 Păvălcu, I., Asupra operatorilor iterativi, Studii și cercetări matematice, 23 (10) (1971), 1537-1544.
- 12 U'ln, S., Ob iterationonnih metodah s posledovatel'noi approxima-cii obratnovo operatora, Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR 16, 4 (1967), 403-411.

Institutul de Matematică

Oficial Poștal 1, C.P. 68

3400 Cluj-Napoca

Romania

This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere