

"BABES-POLYAI" University
 Faculty of Mathematics and Physics
 Research Seminars
 Seminar on Mathematical Analysis
 Preprint Nr. 7 , 1988 , pp. 131 - 150.

SUR QUELQUES PROCÉDÉS ITÉRATIFS DE TYPE

AITKEN - STEFFENSEN

Adrian Diaconu

Ce travail est une continuation du travail [9]. Les résultats de [9] et aussi ceux de ce travail sont basés sur la notion de couple itératif attaché à une équation opérationnelle non-linéaire, notion qui a été introduite dans le travail [8] et qui représente une extension de la notion d'opérateur itérative [10], [11], [12].

Ainsi qu'on l'indique dans [9], si nous considérons un opérateur itératifs et si nous remplaçons les inverses des applications linéaires qui interviennent par des applications approximantes de type Schulz [1], nous obtiendrons un couple itératif. Cette méthode peut être appliquée à tous les opérateurs itératifs qu'on obtient par l'interpolation inverse [5], [6], [7].

Les opérateurs itératifs aussi bien que les couples itératifs définissent des procédés itératifs pour l'approximation des solutions de certaines équations opérationnelles. Des cas particuliers des ces procédés itératifs ont été étudiés dans les travaux [2], [3], [4], [13].

Dans ce travail nous étudions la convergence d'un procédé itératif fourni par un couple itératif de type Aitken - Steffensen.

Considérons l'application non-linéaire $f: X \rightarrow Y$, où

X et Y sont des espaces linéaires normés. Nous désignerons par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de X à Y et par $\mathcal{I}_X(f)$ l'ensemble des opérateurs itératifs attachés à l'équation

$$(1) \quad f(x) = \theta$$

où θ représente l'élément nul de l'espace Y .

Supposons que l'application $f: X \rightarrow Y$ admet des différences divisées du premier et du deuxième ordre sur un ensemble quelconque. Désignons par $[x, y; f]$ la différence divisée du premier ordre de l'application f sur les points x et y ; et par $[x, y, z; f]$ celle du deuxième ordre sur les points x, y, z . On a évidemment $[x, y; f] \in \mathcal{L}(X, Y)$ et aussi $[x, y, z; f] \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) = \mathcal{L}_2(X, Y)$ pour chaque $x, y, z \in X$.

Considérons les opérateurs $Q_1, Q_2 \in \mathcal{I}_X(f)$ à l'aide desquels nous définissons un procédé itératif constitué par les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(Y, X)$ où les éléments $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ sont donnés. Les relations de récurrence des suites sont:

$$(2) \quad \begin{cases} x_{n+1} = Q_1(x_n) - A_n \sum_{k=0}^n (I - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); f] A_n)^k f(Q_1(x_n)); \\ A_{n+1} = -A_n \sum_{k=0}^n (I - [Q_1(x_{n+1}), Q_2(x_{n+1}); f] A_n)^k; \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Supposons remplies les conditions suivantes:

a) l'application $f: X \rightarrow Y$ admet sur l'ensemble $D \subset X$ des différences divisées du premier et du deuxième ordre et il existe $[x, y; f]^{-1}$ et les nombres $L, B > 0$ tels que $\|[x, y, z; f]\| \leq L$ pour chaque $x, y, z \in D$ et $\|[x, y; f]^{-1}\| \leq B$ pour chaque $x, y \in D$;

b) il existe les nombres $K_1, K_2, M_1, M_2 > 0$; $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tels que:

$$(3) \quad \begin{aligned} \|f(Q_1(x))\| &\leq r_1 \|f(x)\|^{p_1}, \quad \|f(Q_2(x))\| \leq K_2 \|f(x)\|^{p_2} \\ \|Q_1(x) - x\| &\leq M_1 \|f(x)\|, \quad \|Q_2(x) - x\| \leq M_2 \|f(x)\| \end{aligned}$$

c) les nombres $L, B, K_1, K_2, M_1, M_2, p_1, p_2$ étant ceux de a) et b) et les nombres $r, q \in \mathbb{N}$ étant ceux de (2), il existe une solution (c_1, c_2) du système:

$$(4) \quad \begin{cases} L[B^2(1+c_2)^2 K_1 K_2 c_1^{p_1+1} c_2^{p_2-1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} + B^2(1+c_2) K_1 c_1^{p_1} c_2^{p_2-1} c_2^r \cdot \\ \cdot (K_1 c_1^{p_1} + K_2 c_2^{p_2}) + K_1 c_1^{p_1} c_2^{p_2} \leq 1 \\ [c_2 + 2Lc_1(M_1 + M_2) + 2L(Mc_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2})]^{q+1} \leq c_2; \end{cases}$$

où $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Nous désirons en conclure les propositions suivantes:

j) les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations (2) sont convergentes;

jj) l'équation (1) admet la solution $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

jjj) s'il existe l'application $f'(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ alors cette application admet une inverse et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bar{A} = [f'(\bar{x})]^{-1}$. On a le théorème suivant:

THEOREME 1. Si X et Y sont des espaces de Banach, les conditions a)-c) sont choisis tels que:

$$d = \max \left\{ \frac{1}{c_1} \|f(x_0)\|, \frac{1}{c_2} \|I - [Q_1(x_0), Q_2(x_0); f] A_0\| \right\} < 1$$

et la boule $S(x_0, R)$ avec le rayon:

$$R = (M_1 + 2M_2)c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \frac{d}{1-d^{q+1}}$$

est incluse dans D , (c_1, c_2) étant une solution convenable du système (4), alors on a les conclusions j)-jjj) et les évaluations de l'erreur suivantes:

$$(5) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \left[M_2 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \right] d^{\alpha^n}$$

$$(6) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \left[M_2 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \right] \frac{d^{\alpha^n}}{1-d^{\alpha^n(\alpha-1)}}$$

$$(7) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq B(1+c_2) \frac{\beta d^{\alpha^n} - (\beta d^{\alpha^n})^{q+1}}{1 - \beta d^{\alpha^n}}$$

$$(8) \quad \|\bar{A} - A_n\| \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^q \frac{(\beta d^{\alpha^n})^k}{1 - \beta d^{\alpha^n(\alpha-1)}}$$

$$\text{où } \beta = c_2 + 2Lc_1(M_1 + M_2) + \beta(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \quad \text{et}$$

$$\alpha = \min \{p_1 + p_2, p_1 + r, q + 1\}.$$

Démonstration . En employant l'induction mathématique nous démontrerons que les propositions suivantes sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

$$a) \quad x_n \in S(x_0, R)$$

$$b) \quad \rho_n = \|f(x_n)\| \leq c_1 d^{\alpha^n}$$

$$\delta_n = \|I - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); f]A_n\| \leq c_2 d^{\alpha^n}$$

$$c) \quad \|A_n\| \leq B(1+c_2)$$

Les propositions sont évidemment vraies pour $n=0$. Nous les supposons vraies pour chaque $n \leq m$ et nous établirons qu'elles sont vraies également pour $n=m+1$.

Des hypothèses il résulte que :

$$(9) \quad \|x_{i+1} - x_i\| \leq \|Q_1(x_i) - x_i\| + \|A_i\| \|f(Q_1(x_i))\|$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \|I - [Q_1(x_k), Q_2(x_k); f]A_k\|^k \leq \\ & \leq M_1 \|f(x_1)\| + B(1+c_2)K_1 \|f(x_1)\|^{p_1} \sum_{k=0}^n \|I - [Q_1(x_k), Q_2(x_k); f]A_k\|^k \\ & \leq M_1 c_1 d^{\alpha^1} + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} d^{p_1 \alpha^1} [1 + c_2 d^{\alpha^1} + \dots + (c_2 d^{\alpha^1})^n] \leq \\ & \leq \left[M_1 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{n+1}}{1-c_2} \right] d^{\alpha^1}; \quad i=0,1,\dots,m \end{aligned}$$

De (9) on déduit que :

$$(10) \quad \|x_{m+1} - x_0\| \leq \left[M_1 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \right] \frac{d}{1-d^{\alpha-1}} \leq R$$

donc $x_{m+1} \in S(x_0, R)$.

Montrons maintenant que $Q_1(x_m), Q_2(x_m) \in S(x_0, R)$

En effet :

$$\|Q_1(x_m) - x_0\| \leq \|Q_1(x_m) - x_m\| + \|x_m - x_0\| \leq \|f(x_m)\| + \|x_m - x_0\| \leq$$

$$\leq M_1 c_1 d^{\alpha^m} + \left[M_2 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \right] \frac{d}{1-d^{\alpha-1}}$$

$$(M_1 + M_2)c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{p_1} \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} \frac{d}{1-d^{\alpha-1}} \leq R$$

donc $Q_1(x_m) \in S(x_0, R)$.

Du fait que $Q_1(x_m), Q_2(x_m), x_{m+1} \in D$ et en employant la formule d'interpolation de Newton et aussi l'hypothèse il résulte que :

$$(11) \quad \|f(x_{m+1}) - f(Q_1(x_m)) - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f](x_{m+1} - Q_1(x_m))\| \leq$$

$$\leq \| [Q_1(x_m), Q_2(x_m), x_{m+1}; f] \| \cdot \|x_{m+1} - Q_1(x_m)\| \cdot \|x_{m+1} - Q_2(x_m)\| \leq$$

$$\leq L \|x_{m+1} - Q_1(x_m)\| \cdot \|x_{m+1} - Q_2(x_m)\|$$

Mais :

$$(12) \quad \|x_{m+1} - Q_1(x_m)\| \leq \|A_m\| \cdot \|f(Q_1(x_m))\| \sum_{k=0}^n \|I - [Q_1(x_k), Q_2(x_k); f]A_k\|^k \leq$$

$$\leq B(1+c_2)K_1 \|f(x_m)\|^{p_1} \sum_{k=0}^n \|I - [Q_1(x_k), Q_2(x_k); f]A_k\|^k$$

Dans le travail [9] nous avons défini le $r+1$ -approximante de $B^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ pour une application $B \in \mathcal{L}(X, Y)$. Cette approximante désignée par $S_{r+1}(B, \tilde{B}) \in \mathcal{L}(Y, X)$ a l'expression suivante :

$$S_{r+1}(B, \tilde{B}) = \tilde{B} \sum_{k=0}^r (I - B \tilde{B}^{-1})^k$$

où $\tilde{B} \in \mathcal{L}(Y, X)$ est une application arbitraire.

Adoptons pour abréger l'écriture la notation

$$S_{r,m} = S_{r+1}([Q_1(x_m), Q_2(x_m); f], A_m).$$

Du fait que :

$$x_{m+1} = Q_2(x_m) - S_{r,m}(x_m, A_m)f(Q_2(x_m)) -$$

$$-[Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]^{-1}(I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]S_{r,m})$$

$$(f(Q_2(x_m)) - f(Q_1(x_m))) ;$$

il résulte que :

$$(13) \quad \|x_{m+1} - Q_2(x_m)\| \leq \|f(Q_2(x_m))\| \cdot \|S_{r,m}\| + \\ + \|[Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]^{-1}\| \cdot \|I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]S_{r,m}\|.$$

$$\cdot (\|f(Q_2(x_m))\| + \|f(Q_1(x_m))\|) \leq \\ \leq B(1+c_2)K_2\|f(x_m)\|^{p_2} \sum_{k=0}^k \|I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]A_m\|^k + \\ + B\|I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]A_m\|^{r+1} (K_1\|f(x_m)\|^{p_1} + K_2\|f(x_m)\|^{p_2}).$$

Par conséquent, de (11), (12) et (13) nous déduisons que :

$$(14) \quad \|f(x_{m+1}) - f(Q_1(x_m)) - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f](x_{m+1} - Q_1(x_m))\| \leq \\ \leq L[B(1+c_2)K_1\delta_m^{p_1} \sum_{k=0}^k \delta_m^k \cdot [B(1+c_2)K_2\delta_m^{p_2} \sum_{k=0}^k \delta_m^k + B\delta_m^r(K_1\delta_m^{p_1} + K_2\delta_m^{p_2})]$$

En outre on a :

$$f(Q_1(x_m)) + [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f](x_{m+1} - Q_1(x_m)) = \\ = \{I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]S_{r,m}\}f(Q(x_m)) = \\ = \{I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]A_m^{r+1}\}f(Q(x_m)),$$

d'où

$$(15) \quad \|f(Q(x_m)) + [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f](x_{m+1} - Q_1(x_m))\| \leq \\ \leq \|I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]A_m^{r+1}\| \|f(Q(x_m))\| \leq K_1\delta_m^{r+1}\delta_m^{p_1}.$$

Du fait que :

$$\|f(x_{m+1})\| \leq \|f(x_{m+1}) - f(Q_1(x_m)) - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f](x_{m+1} - Q_1(x_m))\| \\ + \|f(Q_1(x_m)) + [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f](x_{m+1} - Q_1(x_m))\|.$$

et de (14) et (15) on déduit que :

$$(16) \quad \|f(x_{m+1})\| \leq L[B(1+c_2)K_1\delta_m^{p_1} \sum_{k=0}^k \delta_m^k] \cdot \\ \cdot [B(1+c_2)K_2\delta_m^{p_2} \sum_{k=0}^k \delta_m^k + B\delta_m^r(K_1\delta_m^{p_1} + K_2\delta_m^{p_2})] + K_1\delta_m^{r+1}\delta_m^{p_1}$$

D'une manière similaire à celle utilisée pour démontrer que $Q_1(x_m), Q_2(x_m) \in S(x_0, R)$ on démontre que $Q_1(x_{m+1}), Q_2(x_{m+1}) \in S(x_0, R)$. Ensuite on a l'égalité :

$$(17) \quad [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f] - [Q_1(x_{m+1}), Q_2(x_{m+1}); f] = \\ = [Q_1(x_m), Q_2(x_m), Q_2(x_{m+1}); f](Q_2(x_m) - Q_2(x_{m+1})) + \\ + [Q_1(x_m), Q_1(x_{m+1}), Q_2(x_{m+1}); f](Q_1(x_m) - Q_1(x_{m+1}))$$

et ensuite les inégalités suivantes :

$$(18) \quad \|Q_1(x_m) - Q_1(x_{m+1})\| \leq \|Q_1(x_m) - x_m\| + \|Q_1(x_{m+1}) - x_{m+1}\| + \\ + \|x_{m+1} - x_m\| \leq M_1\|f(x_m)\| + M_1\|f(x_{m+1})\| + \|x_{m+1} - x_m\|,$$

et

$$(19) \quad \|Q_2(x_m) - Q_2(x_{m+1})\| \leq M_2\|f(x_m)\| + M_2\|f(x_{m+1})\| + \|x_{m+1} - x_m\|$$

De (17), (18) et (19) nous déduisons que :

$$(20) \quad \|I - [Q_1(x_{m+1}), Q_2(x_{m+1}); f]A_{m+1}\| \leq \\ \leq \|I - [Q_1(x_{m+1}), Q_2(x_{m+1}); f]A_m\|^{q+1} \leq (\|I - [Q_1(x_m), Q_2(x_m); f]A_m\| + \\ + \|[Q_1(x_m), Q_2(x_m); f] - [Q_1(x_{m+1}), Q_2(x_{m+1}); f]\| \cdot \|A_m\|)^{q+1}$$

De (16), (19), (20) nous déduisons que les suites $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\rho_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vérifient le système d'inégalités récurrentes :

$$(21) \quad \begin{cases} \rho_{m+1} \leq L[B^2(1+c_2)^2K_1K_2\delta_m^{p_1+p_2}(\sum_{k=0}^k \delta_m^k)^2 + \\ + B^2(1+c_2)K_1\delta_m^{p_1}\delta_m^{r+1}(K_1\delta_m^{p_1} + K_2\delta_m^{p_2}) + K_1\delta_m^{r+1}\delta_m^{p_1} \\ \delta_{m+1} \leq [\delta_m + L(M_1 + M_2)(\rho_m + \rho_{m+1}) + \\ + 2L(M\rho_m + B(1+c_2)K_1\delta_m^{p_1} \sum_{k=0}^k \delta_m^k)]^{q+1} \end{cases}$$

De (21), des hypothèses de l'induction, du fait que les nombres c_1 et c_2 vérifient le système (4) et aussi par ce que

$\alpha = \min\{p_1 + p_2, p_1 + r + 1, q + 1\}$ il résulte que :

$$\rho_{mn} \leq c_1 d^{\alpha m+1}, \quad \rho_{mn} \leq c_2 d^{\alpha m+1}.$$

La relation c) est évidente.

Ainsi du principe de l'induction mathématique il résulte que les propositions a)-c) sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Nous démontrerons maintenant la convergence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les espaces X et Y étant des espaces de Banach, donc pour démontrer la convergence de suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il suffit de démontrer le fait qu'elles sont fondamentales.

Des relations A)-C) on déduit que :

$$(22) \quad \|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq [M_2 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{\frac{p_1-1-c_2^{n+1}}{1-c_2}}] < \\ < [M_2 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{\frac{p_1-1-c_2^{n+1}}{1-c_2}}] \frac{d^{\alpha n}}{1-d^{\alpha(n+1)-1}}$$

et

$$(23) \quad \|A_{i+1} - A_i\| \leq \|A_i\| \sum_{k=1}^2 \|I - [Q_1(x_{i+1}), Q_2(x_{i+1}); f] A_i\|^k \leq \\ \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^2 \{ \|I - [Q_1(x_i), Q_2(x_i); f] A_i\|^k + \\ + \| [Q_1(x_i), Q_2(x_i); f] - [Q_1(x_{i+1}), Q_2(x_{i+1}); f] \| \cdot \|A_i\|^k \} \leq \\ \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^2 \{ \|I - [Q_1(x_i), Q_2(x_i); f] A_i\|^k + \\ + L(M_1 + M_2) \cdot (\|f(x_i)\| + \|f(x_{i+1})\|) + 2L\|x_{i+1} - x_i\| \}^k \leq \\ \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^2 \{ c_2 d^{\alpha i} + L(M_1 + M_2) \cdot (c_1 d^{\alpha i} + c_1 d^{\alpha i+1}) + \\ + M_2 c_1 + B(1+c_2)K_1 c_1^{\frac{p_1-1-c_2^{i+1}}{1-c_2}} d^{\alpha i} \}^k \leq \\ \leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^2 \beta^k d^{\alpha i} = B(1+c_2) \frac{\beta^{q+1} d^{(q+1)\alpha i} - \beta d^{\alpha i}}{\beta d^{\alpha i} - 1}.$$

Ainsi :

$$(24) \quad \|A_{n+m} - A_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_{i+1} - A_i\| \leq$$

$$\leq B(1+c_2) \sum_{k=1}^q \frac{(d^{\alpha n})^k}{1-d^{\alpha n}(-1)}.$$

Les relations (22) et (24) expriment le fait que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ sont fondamentales, donc elles sont convergentes.

Des relations (22) et (24) en y faisant $m \rightarrow \infty$ nous obtenons les relations (6) et (8). De (6) pour $n=0$ on déduit que $\bar{x} = \lim x_n \in S(x_0, R)$.

Ainsi de la relation $\|I - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); f] A_n\| \leq c_2 d^{\alpha n}$ il résulte l'inverseabilité de l'application $[f(\bar{x})]^{-1} = \bar{A}$. Le théorème est donc démontré.

Du fait que $\alpha = \min\{p_1 + p_2, p_1 + r + 1, q + 1\}$ et par ce que les nombres p_1 et p_2 , qui sont les ordres des opérateurs Q_1 et Q_2 de $\mathcal{J}_X(f)$, sont fixés, il résulte que la valeur maximale du nombre α sera $p_1 + p_2$. Cette valeur sera atteinte si on choisira $r = p_2 - 1$ et $q = p_1 + p_2 - 1$. En ce cas les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seront obtenues à partir de $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ à l'aide des relations de récurrence suivantes :

$$(24) \quad \begin{cases} x_{n+1} = Q_1(x_n) - A_n \left\{ \sum_{k=0}^{p_2-1} (I - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); f] A_n)^k \right\} f(Q_1(x_n)) \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^{p_1+p_2-1} (I - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); f] A_n)^k \end{cases}$$

Donc en ce cas la vitesse de convergence de procédé est l'ordre $p_1 + p_2$.

Nous remarquerons qu'on peut améliorer la vitesse de convergence du procédé, si nous remplacerons l'opérateur Q_2 par l'opérateur $Q_1 \circ Q_2 \in \mathcal{J}_X(f)$, où nous avons désigné par "o" l'opération de composition. Du fait que :

$$\|f(Q_1 \circ Q_2)(x)\| \leq \|f(Q_1(Q_2(x)))\| \leq K_1 \|f(Q_2(x))\|^{p_1} \leq \\ \leq K_1 K_2^{p_1} \|f(x)\|^{p_1 p_2}$$

il résulte que la vitesse de convergence deviendra $p_1 + p_1 p_2$ et sera donc sensiblement plus grande. En ce cas le procédé itératif sera exprimé par les relations de récurrence suivantes:

$$(25) \quad \begin{cases} y_n = Q_1(x_n); \\ z_n = Q_2(y_n); \\ x_{n+1} = y_n - A_n \sum_{k=0}^{p_1 p_2 - 1} (I - y_n, z_n; f A_n)^k \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^{p_1 + p_2 - 1} (I - y_n, z_n; f A_n)^k \end{cases}$$

Si on choisit $Q_1 = I$ nous obtenons le cas particulier des suites fournies par le couple qui dérive de l'opérateur de Steffensen proprement dit. Il est évident que dans ce cas l'ordre de l'opérateur $Q_1 = Q \in \mathcal{J}_X(f)$ étant p la vitesse de convergence sera $p+1$.

Considérons maintenant le cas plus général, dans lequel les opérateurs $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}_X(f)$ sont remplacés par les applications $Q_1, Q_2: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$, d'une manière similaire à celle du cas des suites fournies par les relations (4.24) de [9].

Entre le cas que nous voulons présenter ici et le cas décrit par les relations (4.24) de [9] il y a une différence essentielle. Pendant que dans le cas des couples itératifs de type Traub l'inverse pour laquelle nous voulons construire une approximation est $[f'(x)]^{-1}$, le fait que l'application Q contienne elle aussi des approximations de $[f'(x)]^{-1}$ étant donc naturel, dans le cas des couples itératifs de type Aitken - Steffensen nous construisons des approximations pour $[Q_1(x), Q_2(x); f]^{-1}$. Il est donc possible que les nouvelles applications $Q_1, Q_2: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ contiennent par exemple des applications linéaires de type de la différence divisée. Pour préciser les notions nous adopterons la définition suivante.

DEFINITION 1. L'application $Df: X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ s'appelle pseudodérivée d'ordre k de l'application $f: X \rightarrow Y$ sur l'ensemble $D \subset X$ si les conditions suivantes sont remplies:

i) il exist un nombre $L > 0$ et un opérateur $T \in \mathcal{J}_X(f)$ tels que pour chaque $x, y \in D$ on ait la relation:

$$(26) \quad \|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| \leq L \|x - y\| \cdot \|x - Ty\|;$$

ii) pour chaque solution $\bar{x} \in D$ de l'équation $f(x) = \theta$, pour laquelle il existe $f'(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ on a:

$$(27) \quad Df(\bar{x}) = f'(\bar{x}).$$

Il est évident que les dérivées de type Fréchet ordinaire sont en même temps aussi des pseudodérivées, en ce cas la relation (26) résulte de la formule de Taylor en choisissant $T = I$. Toutefois l'application $[x, Q(x); f]$ avec $Q \in \mathcal{J}_X(f)$ est aussi une pseudodérivée. En ce cas la relation (26) se déduit de la formule de l'interpolation de Newton et se réalise avec $T = Q$ et la relation (27) est évidente.

Supposons à présent que les applications:

$Q_1, Q_2: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ vérifient sur $D \times D_1$ l'inégalité suivante:

$$(28) \quad \|f(Q_1(x, A))\| \leq \sum_{j=1}^{s_i} K_{i,j} \|f(x)\|^{p_{i,j}} \|I - D_{i,1} f(x) A\|^{q_{i,j}^{(1)}} \dots \|I - D_{i,s_i} f(x) A\|^{q_{i,j}^{(s_i)}}$$

où $D_{i,1} f, \dots, D_{i,s_i} f: X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ sont des pseudodérivées

et les nombres $K_{i,j}, p_{i,j}, q_{i,j}^{(l)} > 0$, $l = \overline{1, m_i}$, $i = \overline{1, 2}$ et

$$p_{i,j} + \sum_{l=1}^{m_i} q_{i,j}^{(l)} \geq 1; \quad j = \overline{1, m_i}; \quad i = \overline{1, 2}.$$

Nous considérerons un procédé itératif de type Aitken-Steffensen. Ce procédé est constitué des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$,

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n^{(i,j)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(Y, X)$, $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1, 2}$ avec les éléments initiaux $x_0 \in X$ et A_0 , $B_0^{(i,j)} \in \mathcal{L}(Y, X)$; $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1, 2}$ et construites par les relations de récurrence suivantes:

$$(29) \begin{cases} x_{n+1} = Q_1(x_n, A_n) - \\ - A_n \left[\sum_{k=0}^r (I - [Q_1(x_n, A_n), Q_2(x_n, A_n); \bar{f}] A_n)^k f(Q_1(x_n, A_n)) \right]; \\ A_{n+1} = A_n \sum_{k=0}^r (I - [Q_1(x_{n+1}, A_n), Q_2(x_{n+1}, A_n); \bar{f}] A_n)^k; \\ A_{n+1}^{(i,j)} = A_n^{(i,j)} \sum_{k=0}^{q_{ij}} (I - D_{i,j} f(x_{n+1}) A_n^{(i,j)})^k; \\ j = \overline{1, s_i}, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Les relations (29) montrent que la mission de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est celle de réaliser une approximation pour la solution $\bar{x}$ de l'équation $f(\bar{x}) = \theta$, la mission de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est celle de réaliser une approximation pour $[f'(\bar{x})]^{-1}$ (dans l'hypothèse de l'existence de la dérivée de type Fréchet) et que les suites $(B_n^{(i,j)})_{n \in \mathbb{N}}$ réalisent une approximation des inverses des applications $D_{i,j} f(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$, donc aussi de $[f'(\bar{x})]^{-1}$.

Supposons maintenant que les conditions suivantes sont remplies:

a) l'application $f: X \rightarrow Y$ admet sur l'ensemble $D \subset X$ des différences divisée du premier et du second ordre, la différence divisée du premier ordre admet une inverse et il existe les nombres $L, B > 0$ tels que $\| [x, y, \bar{f}] \| \leq L$ pour chaque $x, y, \bar{x} \in D$ et $\| [x, y, f]^{-1} \| \leq B$ pour chaque $x, y \in D$.

b) l'application $f: X \rightarrow Y$ admet sur l'ensemble $D \subset X$ les pseudodérivées $D_{i,j} f: X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$; $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1, 2}$,

pour chaque $x \in D$ les applications $D_{i,j} f(x)$ admettent des inverses et il existe les nombres $L_{ij}, B_{ij} > 0$; $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1, 2}$ tels que $D_{i,j} f \in \text{Lip}_{L_{ij}, D}(X, \mathcal{L}(X, Y))$; $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1, 2}$ et $\| [D_{i,j} f(x)]^{-1} \| \leq B_{ij}$ pour chaque $x \in D$; $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1, 2}$.

c) les applications $Q_1, Q_2: X \times \mathcal{L}(Y, X) \rightarrow X$ vérifient les relations (28) et de plus il existe les nombres $M_1, M_2 > 0$ tels que $\| Q_1(x, A) - x \| \leq M_1 \| f(x) \|$ et $\| Q_2(x, A) - x \| \leq M_2 \| f(x) \|$ pour chaque $x \in D$ et $A \in D_1$; D_1 étant un ensemble de $\mathcal{L}(Y, X)$;

d) le système

$$(30) \begin{cases} L [B^2(1+c_2)^2 \eta_1 \eta_2 \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2} + B^2(1+c_2) \eta_1 c_2^{r+1} (\eta_1 + \eta_2)] + c_2^{r+1} \eta_1 \leq c_1 \\ [c_2 + 2Lc_1(M_1+M_2) + 2L(M_1c_1 + B(1+c_2) \eta_1 \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2})]^{q+1} \leq c_2 \\ [c_{ij} + L_{ij} B_{ij} (1+c_{ij}) (M_1c_1 + B(1+c_2) \eta_1 \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2})]^{q_{ij}+1} \leq c_{ij} \\ j = \overline{1, s_i}; i = \overline{1, 2} \end{cases}$$

ou $\eta_i = \sum_{j=1}^{s_i} K_{ij} c_1^{p_{ij}} c_{i1}^{q_{ij}} \dots c_{is_i}^{q_{is_i}^{(1)}} \dots c_{is_i}^{q_{is_i}^{(s_i)}}$; $i = \overline{1, 2}$

admet des solutions $(c_1, c_2, c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1s_1}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2s_2})$ ayant des composants positifs.

Designons par:

$$\begin{aligned} \beta &= c_2 + 2Lc_1(M_1+M_2) + B(1+c_2) \eta_1 \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2}; \\ \beta_{ij} &= c_{ij} + 2Lc_1(M_1+M_2) + B_{ij}(1+c_{ij}) \eta_1 \frac{1-c_2^{r+1}}{1-c_2}; \quad j = \overline{1, s_i}; i = \overline{1, 2} \\ \pi_i &= \max_{j=1, \dots, s_i} \left\{ p_{ij} + \sum_{k=1}^{s_i} q_{ij}^{(k)} \right\}; \quad i = \overline{1, 2}; \\ \alpha &= \min_{j=\overline{1, s_i}; i=\overline{1, 2}} \{ \pi_1 + \pi_2; \pi_1 + \alpha + 1; c + 1; q_{ij} + 1 \} \end{aligned}$$

Pour caractériser la convergence des suites fournies par les relations de récurrence (29) on a le théorème suivant :

THEOREME 2. Si nous supposons que les ensembles X et Y sont organisés comme des espaces de Banach, les conditions a) - d) sont remplies et les éléments initiaux $x_0 \in X$ et $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ et $A_j^{(i,j)} \in \mathcal{L}(Y, X)$; $j = \overline{1, s_1}$; $i = \overline{1, 2}$ remplissent les conditions suivantes :

$$i) \quad d = \max \left\{ \frac{1}{c_1} \|f(x_0)\|, \frac{1}{c_2} \|I - [Q_1(x_0, A_0), Q_2(x_0, A_0); f] A_0\|, \frac{1}{c_{ij}} \|I - D_{ij} f(x_0) A_0^{(i,j)}\| ; j = \overline{1, s_1} ; i = \overline{1, 2} \right\}$$

$$ii) \quad \text{la boule } S(x_0, R) \subset D \text{ où } R = \left[(M_1 + 2M_2) c_1 + B(1 + c_2) \eta_1 \frac{1 - c_2^{r+1}}{1 - c_2} \right].$$

$$\frac{d}{1 - d \alpha^{-1}} ; c_1 \text{ et } c_2, c_{ij} ; j = \overline{1, s_1} ; i = \overline{1, 2} \text{ étant une solution}$$

ou convenable du système (30), alors il résulte les conclusions j) - jj) du théorème 1 et de plus il résulte aussi la convergence des suites $(A_n^{(i,j)})_{n \in \mathbb{N}}$; $j = \overline{1, s_1}$; $i = \overline{1, 2}$. La conclusion jjj) aura l'énoncé suivant :

- s'il exist la dérivée de type Fréchet $f'(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors cette application admet une inverse et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bar{A} = [f'(\bar{x})]^{-1}$; $j = \overline{1, s_1}$; $i = \overline{1, 2}$.

Il résulte les évaluations suivantes de l'erreur d'approximation:

$$(31) \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \left[M c_1 + B(1 + c_2) \eta_1 \frac{1 - c_2^{r+1}}{1 - c_2} \right] d \alpha^n ;$$

$$(32) \quad \|x_n - \bar{x}\| \leq \left[M c_1 + B(1 + c_2) \eta_1 \frac{1 - c_2^{r+1}}{1 - c_2} \right] \frac{d \alpha^n}{1 - d \alpha^{n-1}} ;$$

$$(33) \quad \|A_{n+1} - A_n\| \leq B(1 + c_2) \beta d \alpha^n \frac{1 - (\beta d \alpha^n)^q}{1 - \beta d \alpha^n}$$

$$(34) \quad \|A_n - \bar{A}\| \leq B(1 + c_2) \sum_{k=1}^q \frac{(\beta d \alpha^n)^k}{1 - \beta d \alpha^{n-k}}$$

$$(35) \quad \|A_{n+1}^{(i,j)} - A_n^{(i,j)}\| \leq B_{ij}(1 + c_{ij}) \beta_{ij} d \alpha^n \frac{1 - (\beta_{ij} d \alpha^n)^{q_{ij}}}{1 - \beta_{ij} d \alpha^n} ;$$

$$(36) \quad \|A_n^{(i,j)} - \bar{A}\| \leq B_{ij}(1 + c_{ij}) \sum_{k=1}^{q_{ij}} \frac{\beta_{ij} d^n}{1 - d \alpha^{n-k} (\alpha - 1)} ;$$

Démonstration. D'une manière analogue à celle utilisée dans le cas du théorème antérieurs, nous établissons l'exactitude des propositions suivantes :

$$a) \quad x_n \in S(x_0, R)$$

$$b) \quad \rho_n = \|f(x_n)\| \leq c_1 d \alpha^n$$

$$\delta_n = \|I - [Q_1(x_n, A_n), Q_2(x_n, A_n); f] A_n\| \leq c_2 d \alpha^n$$

$$\delta_n^{(i,j)} = \|I - D_{ij} f(x_n) A_n^{(i,j)}\| \leq c_{ij} d \alpha^n$$

$$j = \overline{1, s_1} ; i = \overline{1, 2}$$

$$c) \quad \|A_n\| \leq B(1 + c_2)$$

$$\|A_n^{(i,j)}\| \leq B_{ij}(1 + c_{ij}) ; j = \overline{1, s_1} ; i = \overline{1, 2},$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Les relations sont évidemment vraies pour $n = 0$, car elles résultent des hypothèses du théorème. Nous supposons qu'elles sont vraies jusqu'à un nombre $n \in \mathbb{N}$ et de cette hypothèse nous déduirons qu'elles sont vraies pour $n+1$.

La démonstration de la proposition a) est similaire à la démonstration de la proposition a) au cas du théorème 1. En outre, d'une manière similaire à la démonstration du théorème 1, nous établissons que $\rho_n, \delta_n, \delta_n^{(i,j)}$ vérifient le système d'inégalités récurrentes :

$$\begin{aligned}
 \rho_{n+1} &\leq L B^2 (1+c_2)^2 \Delta_n^1 \Delta_n^2 \left(\sum_{k=0}^r \rho_n^k \right) + B^2 (1+c_2) \Delta_n^1 \rho_n^{r+1} (\Delta_n^1, \Delta_n^2) + \\
 &\quad + \rho_n^{r+1} \Delta_n^1 ; \\
 \Delta_n^i &= \sum_{j=1}^{m_i} \kappa_{i,j} \rho_{n,j}^{p_i,j} (\rho_n^{(i,1)}, \rho_n^{(i,2)}, \dots, \rho_n^{(i,s_i)}, \rho_n^{(s_i,j)}) ; \\
 i &= \overline{1,2} ; \\
 \rho_{n+1} &\leq \left[\rho_n + L(M_1 + M_2)(\rho_n + \rho_{n+1}) + 2L(M_1 \rho_n + B(1+c_2) \Delta_n^1 \sum_{k=0}^r \rho_n^k) \right]^{q+1} ; \\
 \rho_{n+1}^{(i,j)} &\leq \left[\rho_n^{(i,j)} + L_{i,j} \rho_{n,j}^{(1+c_{i,j})} (M_1 \rho_n + B(1+c_2) \Delta_n^1 \sum_{k=0}^r \rho_n^k) \right]^{q_{i,j}+1} ; \\
 j &= \overline{1, s_i} ; i = \overline{1,2} .
 \end{aligned}$$

Les relations qui ont trait aux suites $\rho_n^{(i,j)}$ se déduisent immédiatement par ce que :

$$\begin{aligned}
 \|I - D_{i,j} f(x_{n+1}) A_n^{(i,j)}\| &\leq \|I - D_{i,j} f(x_n) A_n^{(i,j)}\|^{q_{i,j}+1} \leq \\
 &\leq (\|I - D_{i,j} f(x_n) A_n^{(i,j)}\| + \|D_{i,j} f(x_n) - D_{i,j} f(x_{n+1})\| \cdot \|A_n^{(i,j)}\|)^{q_{i,j}+1} \\
 &\leq (\|I - D_{i,j} f(x_n) A_n^{(i,j)}\| + L_{i,j} \|x_{n+1} - x_n\|^{p_{i,j}(1+c_{i,j})})^{q_{i,j}+1} .
 \end{aligned}$$

Du système (37), du fait que $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_j$; $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1,2}$ vérifient le système (30) des hypothèses de l'induction et en tenant compte de la signification de α , il résulte immédiatement que

$$\rho_{n+1} \leq c_1 \alpha^{n+1}, \quad \rho_{n+1} \leq c_2 \alpha^{n+1} \quad \text{et en outre que } \rho_{n+1}^{(i,j)} \leq c_{i,j} \alpha^{n+1} ; j = \overline{1, s_i} ; i = \overline{1,2} .$$

Les relations c) sont évidentes.

En vertu de principe de l'induction les relations a)-c) sont donc vrais pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Les conclusions du théorème résultent dans une manière similaire à celle employées dans les démonstrations des théorèmes antérieurs.

D'une manière similaire à celles employées à la définition d'une application :

$Q: X \times \mathcal{X}(Y, X) \rightarrow X$, qui vérifie la relation (4.25) de [9] nous pouvons définir également l'ordre d'une application qui vérifie la relation (28). On a ainsi la définition suivante :

DEFINITION 2. L'application $Q: X \times \mathcal{X}(Y, X) \rightarrow X$ qui vérifie pour chaque $x \in D$ et $A \in D_1$ l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 (38) \quad &\|f(Q(x, A))\| \\
 &\leq \sum_{j=1}^s \kappa_j \|f(x) A^{p_j}\| \|I - D_1 f(x) A\|^{q_j^{(1)}} \dots \|I - D_s(f(x) A)\|^{q_j^{(s)}} \\
 \text{et } p &= \min_{j=1, \dots, s} (p_j + q_j^{(1)} + \dots + q_j^{(s)}) , \text{ à l'ordre } p \text{ sur } D \times D_1 .
 \end{aligned}$$

Du théorème 2 et à l'aide de la définition 2 il résulte ainsi le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. Si les applications $Q_1, Q_2: X \times \mathcal{X}(Y, X) \rightarrow X$ possèdent les ordres p_1 et p_2 respectivement sur $D \times D_1$ et si les conditions du théorème 2 sont remplies alors la valeur de la constante α , qui intervient dans la conclusion du théorème 2, est :

$$\alpha = \min \{ p_1 + p_2, r_1 + r + 1, q + 1, q_{i,j} + 1 ; j = \overline{1, s_i}, i = \overline{1,2} \} .$$

Si nous tenons compte du fait que les ordres p_1 et p_2 des opérateurs Q_1 et Q_2 sont fixés, nous déduisons que nous obtenons la valeur maximale pour α si nous choisissons $r = p_2 - 1$, $q = p_1 + p_2 - 1$, $q_{i,j} = p_1 + p_2 - 1$; $j = \overline{1, s_i}$; $i = \overline{1,2}$, cette valeur étant $\alpha = p_1 + p_2$.

Pour exemplifier prenons $Q \in \mathcal{I}_X(f)$, opérateur qui a l'ordre p . À l'aide de cet opérateur nous construisons l'application $Q_1: X \times \mathcal{X}(Y, X) \rightarrow X$ par la relation suivante :

$$Q_1(x, A) = x - A \sum_{k=0}^{p-1} (I - [x, Q(x); f] A)^k f(x)$$

Cette application a l'ordre $p+1$.

Choisissons $Q_2(x, A) = Q$. De cette façon les relations (29) deviendront :

$$\begin{aligned}
 (39) \quad \left\{ \begin{aligned}
 y_{n+1} &= x_n - A_n^{(1)} \sum_{k=0}^{p-1} (I - [x_n, Q(x_n); f] A_n^{(1)})^k f(x_n) ; \\
 x_{n+1} &= y_{n+1} - A_n \sum_{k=0}^{p-1} (I - [y_{n+1}, Q(x_n); f] A_n)^k f(y_{n+1}) ; \\
 A_{n+1}^{(1)} &= A_n^{(1)} \sum_{k=0}^{2p} (I - [x_{n+1}, Q(x_{n+1}); f] A_n^{(1)})^k ; \\
 z_{n+1} &= x_{n+1} - A_n^{(1)} \sum_{k=0}^{p-1} (I - [x_{n+1}, Q(x_{n+1}); f] A_n^{(1)})^k f(x_{n+1}) ; \\
 A_{n+1} &= A_n \sum_{k=0}^{2p} (I - [z_{n+1}, Q(x_{n+1}); f] A_n)^k .
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Si nous appliquons le corollaire 3, nous déduisons que la vitesse de convergence a l'ordre égal à $2p+1$.

Choisissons maintenant l'opérateur $Q \in \mathcal{T}_X(f)$ par $Q(x) = x - A_0 f(x)$ où l'application $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ est fixée. Cet opérateur a l'ordre égal à 1. Si nous remplaçons l'expression de l'opérateur Q et posons $p = 1$ dans les relations (39), nous obtenons un procédé itératif caractérisé par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 (40) \quad \left\{ \begin{aligned}
 y_{n+1} &= x_n - A_n^{(1)} (2I - [x_n, v_n; f] A_n^{(1)}) f(x_n) ; \\
 x_{n+1} &= y_{n+1} - A_n (2I - [y_{n+1}, v_n; f] A_n) f(y_{n+1}) ; \\
 v_{n+1} &= x_{n+1} - A_0 f(x_{n+1}) ; \\
 A_{n+1}^{(1)} &= A_n^{(1)} (3I - 3[x_{n+1}, v_{n+1}; f] A_n^{(1)} + ([x_{n+1}, v_{n+1}; f] A_n^{(1)})^2) ; \\
 z_{n+1} &= x_{n+1} - A_n^{(1)} (2I - [x_{n+1}, v_{n+1}; f] A_n^{(1)}) f(x_{n+1}) ; \\
 A_{n+1} &= A_n (3I - 3[z_{n+1}, v_{n+1}; f] A_n + ([z_{n+1}, v_{n+1}; f] A_n)^2) .
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Les éléments initiaux du procédé itératif décrit par les relations (40) sont $x_0 \in X$, A_0 , $A_0^{(1)} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Pour simplifier l'écriture nous avons considéré les suites auxiliaires $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et nous avons posé $v_0 = x_0 - A_0 f(x_0)$.

En ce cas la vitesse de convergence a l'ordre égal à 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Albrecht, J., Bemerkungen zum Iterationsverfahren von Schultz zum Matrizeninversion, ZAMM 41 (1961), 262-263.
- [2] Diaconu, A., Păvăloiu, I., Sur quelques méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles, Revue d'Analyse Num. et de la Théorie de l'Approximation 1 (1972) 45-61.
- [3] Diaconu, A., Păvăloiu, I., Asupra unor metode iterative pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare, Revista de Analiză Numerică și Teoria Aproximației 2, 1 (1973), 61-79.
- [4] Diaconu, A., Sur quelques méthodes itératives combinées, Mathematica 22 (45), 2 (1980), 247-261.
- [5] Diaconu, A., Sur quelques méthodes itératives combinées (II), "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research seminars, Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods, Preprint Nr. 1, 1980, 95-130.
- [6] Diaconu, A., Sur la dérivée de type Fréchet d'ordre n de l'application inverse, Idem, Preprint Nr. 1, 1983, 42-71.
- [7] Diaconu, A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opé-

- Idem, Preprint Nr. 1, 1985, 21-70.
- [9] Diaconu, A., Couples itératifs. Méthodes itératives obtenues à l'aide des couples itératifs, Idem, Preprint Nr. 1, 1986, 27-67.
- [9] Diaconu, A., Sur la manière d'obtenir et sur la convergence de certaines méthodes itératives, "Babeş - Bolyai" University, Faculty of Mathematics and Physics, Research Seminars, Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods, Preprint Nr. 1, 1987, pp.25-74.
- [10] Păvăloiu, I., Sur les procédés itératifs à une ordre élevé de convergence, *Mathematica*, 12 (35) 2 (1980), 309-324.
- [11] Păvăloiu, I., Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor, *Edilura Dacia, Cluj-Napoca*, 1976.
- [12] Păvăloiu, I., Asupra operatorilor iterativi, *Studii şi cercetări matematice*, 23(10) (1971), 1537-1544.
- [13] U'lm, S., Ob iterationonnih metodah s posledovatel'noi aproximacii obratnogo operatora, *Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR* 16, 4 (1967), 403-411.

Institutul de Matematică

Oficiul Poştal 1, C.P. 68

3400 Cluj-Napoca

Romania

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.