

**„BABEŞ—BOLYAI” UNIVERSITY
FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS
RESEARCH SEMINARS**

602
133/S-44-45

SEMINAR ON
FUNCTIONAL ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

Preprint Nr.1 , 1989

**CLUJ-NAPOCA
ROMANIA**

Col. 133 / S-44-45

Cluj-Napoca, 1993

INSTITUTUL "MATEI - BRAS"
FACULTATEA DE MATEMATICA SI FIZICA
Jurnalul de Matematica

CONTENTS

- ✓ 1. Mira - Cristiana Anisiu, Fixed point theorems for retractible mappings..... 1
- ✓ 2. D. Brădeanu, P. Brădeanu, On the application of a variational method to the study of small oscillations of a fluid in moving tanks..... 11
3. Adrian Diaconu, Sur quelques propriétés des opérateurs itératifs..... 23
4. Adrian Diaconu, Sur la convergence des certaines méthodes itératives utilisées pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires..... 39
5. C. I. Gheorghiu, On a linear singularly perturbed two-point boundary value problem..... 67
6. Costică Mustăța, An application of a theorem of Mc Shane..... 75
7. A. B. Németh, Ordered Fréchet spaces with universal subdifferentiability properties..... 85
8. Ion Păvăloiu, Sur l'approximation des racines des équations dans un espace métrique..... 95
9. Ion Păvăloiu, Sur une méthode de type Steffensen utilisée pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires..... 105
10. Ion Șerb, Banach spaces containing finite dimensional strongly proximinal subspaces..... 111

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PAVALOIU, I., SERB, I., Sur des méthodes itératives optimales,
Research Seminars, Seminar on Functional Analysis
and Numerical Methods, Preprint Nr.1 (1983), 175-182.
- [2] RUS, A.I., An iterative method for the solution of the equation
 $x = f(x, x, \dots, x)$, L'Analyse Num. et la Théorie de
l'Approx. 10 (1981), 95 - 100.
- [3] WEINISCHKE, J.H., Über eine Klasse von Iterationsverfahren,
Numerische Mathematik 6 (1964), 395 - 404.

Institutul de Calcul
Oficiul Postal 1
C.P. 68
3400 Cluj-Napoca
Romania

This paper is in final form and no version of it is or will be
submitted for publication elsewhere.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY

Faculty of Mathematics and Physics

Research Seminars

Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods

Preprint Nr.1, 1989, pp. 105 - 110.

SUR UNE MÉTHODE DE TYPE STEFFENSEN UTILISÉE POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES

par

Ion Păvăloiu

Soit X un espace de Banach et Y un espace linéaire normé.
Pour la résolution de l'équation

$$(1) \quad P(x) = 0,$$

où $P: X \rightarrow Y$ est un opérateur, et 0 est l'élément nul de l'es-
pace Y , nous considérons les méthodes itératives suivantes :

$$(2) \quad x_{n+1} = Q_1(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); P]^{-1} P(Q_1(x_n))$$

ou

$$(3) \quad x_{n+1} = Q_2(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); P]^{-1} P(Q_2(x_n))$$

Dans les relations (2) et (3) Q_1 et Q_2 sont deux opéra-
teurs itératifs attachés à l'équation (1) et par $[x, y; P]$ nous
avons désigné la différence divisée de l'opérateur P sur les
noeuds $x, y \in X$, [2], [3].

Pour préciser nous imposerons aux opérateurs Q_1 et Q_2 les
conditions suivantes :

a) Si $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1) alors on a
 $\bar{x} = Q_1(\bar{x})$ et $\bar{x} = Q_2(\bar{x})$ et réciproquement, si $\bar{x}$ est un point
fixe pour les opérateurs Q_1 et Q_2 alors $\bar{x}$ est une solution
de l'équation (1) ;

b) il existe les nombres $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ tels que pour chaque $x \in X$ on a les inégalités suivantes :

$$\|Q_1(x) - x\| \leq \beta_1 \|P(x)\|, \quad \|Q_2(x) - x\| \leq \beta_2 \|P(x)\|;$$

c) il existe les nombres réels et positifs α_1 , α_2 et aussi les nombres naturels k_1 , k_2 tels que pour chaque $x \in X$ on a les inégalités suivantes :

$$\|P(Q_1(x))\| \leq \alpha_1 \|P(x)\|^{k_1}, \quad \|P(Q_2(x))\| \leq \alpha_2 \|P(x)\|^{k_2}$$

On constate facilement que dans le cas où l'on part du même élément initial $x_0 \in X$, les méthodes itératives (2) et (3) fournissent la même suite d'approximations de la solution de l'équation (1).

Par la suite nous étudierons la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ obtenue à l'aide de la méthode (2) ou (3).

THEOREME 1. Soit $x_0 \in X$, $\delta > 0$ et $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$. Si on peut choisir l'élément initial x_0 , le nombre réel δ et les applications Q_1 et Q_2 tels que :

- i) les applications Q_1 et Q_2 remplissent la condition a);
- ii) $Q_1(S) \subseteq S$, $Q_2(S) \subseteq S$;
- iii) les applications Q_1 , Q_2 et P remplissent les conditions b) et c) pour chaque $x \in S$;
- iv) pour chaque $x, y \in S$ il existe $[x, y; P]^{-1}$ et il existe le nombre $B > 0$, tel que pour chaque $x, y \in S$ on ait $\|[x, y; P]^{-1}\| \leq B$;
- v) il existe le nombre $M > 0$, tel que pour chaque $x, y, z \in S$ on a $\|[x, y, z; P]\| \leq M$;
- vi) $\xi_0 = (MB^2 \alpha_1 \alpha_2)^{1/(q-1)} \cdot \|P(x_0)\| < 1$ où $q = k_1 + k_2$;
- vii) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q^{i-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_0^j (B \alpha_1 \frac{k_1-1}{q-1} \xi_0^{j-1} + \beta_1) \leq \delta$

où $\rho = MB^2 \alpha_1 \alpha_2$;

alors on a les propriétés suivantes :

j) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de la méthode (2) ou à l'aide de la méthode (3) est convergente et si nous désignons par $\bar{x}$ la limite de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$, alors on a $P(\bar{x}) = 0$;

jj) si nous désignons par ξ_n l'expression $\rho^{\frac{1}{q^{n-1}}} \|P(x_n)\|$, alors on a $\xi_n \leq \xi_0^{q^n}$ pour chaque $n = 0, 1, \dots$;

jjj) on a l'inégalité suivante :

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq B \cdot \xi_0^{q^n} \cdot \rho^{1/(1-q)}$$

pour chaque $n = 0, 1, 2, \dots$.

Démonstration. Prouvons d'abord que dans les hypothèses du théorème les éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à l'ensemble S .

En effet, de (2) nous déduisons :

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - Q_1(x_0)\| + \|Q_1(x_0) - x_0\| \leq$$

$$\beta_1 \|P(x_0)\| + B \cdot \|P(Q_1(x_0))\| \leq (\beta_1 + B \alpha_1 \|P(x_0)\|^{k_1-1}) \|P(x_0)\| =$$

$$\xi_0 \rho^{\frac{1}{q^{1-1}}} (\beta_1 + B \alpha_1 \xi_0^{k_1-1} \cdot \rho^{\frac{k_1-1}{q-1}}) \leq \delta$$

d'où il résulte que $x_1 \in S$.

En tenant compte de l'identité

$$P(x_1) = P(Q_1(x_0)) + [Q_1(x_0), Q_2(x_0); P](x_1 - Q_1(x_0)) +$$

$$[Q_1(x_0), Q_2(x_0), x; P](x_1 - Q_1(x_0))(x_1 - Q_2(x_0))$$

et de (2), il résulte :

$$\|P(x_1)\| \leq M \|x_1 - Q_1(x_0)\| \cdot \|x_1 - Q_2(x_0)\| \leq$$

$$M B^2 \alpha_1 \alpha_2 \cdot \|P(x_0)\|^q \leq \int_0^{\alpha/(1-q)} \cdot \varepsilon_0^q = \int_0^{1/(1-q)} \cdot \varepsilon_0^q$$

d'où il résulte :

$$\int_0^{1/(1-q)} \cdot \|P(x_1)\| \leq \varepsilon_0^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0^q$$

Supposons que les éléments $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$,

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0^q$$

et démontrons que $x_{n+1} \in S$ et $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_0^{q^{n+1}}$.

En effet on a :

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i - x_{i-1}\|$$

Mais

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leq \|x_i - Q_1(x_{i-1})\| + \|Q_1(x_{i-1}) - x_{i-1}\| \leq$$

$$B \alpha_1 \|P(x_{i-1})\|^{k_1} + \beta_1 \|P(x_{i-1})\| \leq$$

$$\varepsilon_{i-1} \cdot \int_0^{1/(1-q)} (\beta_1 + B \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^{k_1-1} \cdot \int_0^{k_1-1} \frac{t^{k_1-2}}{1-t} dt) \leq$$

$$\varepsilon_0^{q^{i-1}} \cdot \int_0^{1/(1-q)} (\beta_1 + B \alpha_1 \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} \cdot \int_0^{k_1-1} \frac{t^{k_1-2}}{1-t} dt)$$

d'où nous déduisons que

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \delta$$

c'est-à-dire que $x_{n+1} \in S$.

Par suite on a :

$$\|P(x_{n+1})\| \leq M B^2 \alpha_1 \alpha_2 \|P(x_n)\|^q \leq \int_0^{\alpha/(1-q)} \cdot \varepsilon_n^q$$

d'où il résulte l'inégalité

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_0^{q^{n+1}}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous démontrerons maintenant que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par la relation (2) est fondamentale.

En effet pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \|x_i - x_{i-1}\| \leq \varepsilon_n^q \cdot \int_0^{1/(1-q)} \sum_{i=n+1}^{n+k} \varepsilon_0^{q^{i-1}-q^n} (B \alpha_1 \int_0^{k_1-1} \frac{t^{k_1-2}}{1-t} dt + \beta_1)$$

ce qui exprime que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est fondamentale.

Soit $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; alors de l'inégalité ci-dessus où nous posons $n = 0$ et faisons $k \rightarrow \infty$, il résulte que

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \delta$$

c'est-à-dire $\bar{x} \in S$.

De l'inégalité

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{q^n}$$

il résulte.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P(x_n)\| = 0$$

c'est-à-dire

$$P(\bar{x}) = 0$$

égalité qui exprime le fait que $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1).

De l'identité

$$P(\bar{x}) - P(x_n) = [\bar{x}, x_n; P](\bar{x} - x_n)$$

il résulte que

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq B \|P(x_n)\| \leq B \cdot \int_0^1 \varepsilon_0^{1-(1-q)} \varepsilon_0^{qn} d\alpha$$

Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. PAVALOIU, I., Asupra operatorilor iterativi, Studii și Cercetări Matematice, 23 (1971) 10, 1537 - 1544.
2. PAVALOIU, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor, Ed. Dacia, 1976.
3. UL'M, S., Ob oboboscennyh razdelennih raznostiak I, Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR 16 (1967) 1, 13 - 36.

Institutul de Calcul
Oficiul Poștal 1
C. P. 68
3400 Cluj-Napoca
Romania

This paper is in final form and no version of it is or will be submitted for publication elsewhere.

"BABES-BOLYAI" University

Faculty of Mathematics and Physics

Research Seminars

Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods

Preprint Nr. 1 1989, pp. 111 - 120

BANACH SPACES CONTAINING

FINITE DIMENSIONAL STRONGLY PROXIMAL SUBSPACES

Ioan Serb

Denote by X a real Banach space and by X^* its dual. Let $U(X)$ be the closed unit ball of X and for a non-void proper subset M of X denote by P_M the metric projection on M defined by :

$$P_M(x) = \{m \in M : \|x - m\| \leq \|x - m'\|, \forall m' \in M\}, \forall x \in X.$$

The subset M is said to be proximal if $P_M(x) \neq \emptyset$ for all $x \in X$ and strongly proximal (see [6]) if $\text{card } P_M(x) \geq 2$ for all $x \in X \setminus M$.

In this paper we consider the problem of the existence of finite dimensional strongly proximal subspaces in some Banach spaces. The case of $C(K)$ with K a Hausdorff compact space was considered by M.L. Ivanov [3], [4] and independently by A.L. Garkavi and S.V. Konyagin [2] who also discussed the existence of finite dimensional strongly proximal subspaces of $L(S, \Sigma, \mu)$.

This models are used in order to obtain some more general results.

Let X be, firstly, an n -dimensional Banach space. Suppose