

des invariants affines d'une ou de plusieurs formes ternaires, et ce problème peut être traité par la méthode que nous venons d'indiquer. Il n'y a rien à changer quant à la manière d'écrire la forme Φ sous forme intégrale, et à l'expression de ses coefficients. Mais les triplets p, q, r subiront cette fois la transformation

$$\begin{aligned}\bar{p} &= ap + a'q, \\ \bar{q} &= bp + b'q, \\ \bar{r} &= cp + c'q + r.\end{aligned}\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

On est conduit à poser la condition suivante pour le noyau d'un invariant affine

$$H(ap + a'q, bp + b'q, cp + c'q + r, \dots) = \Delta^n H(p, q, r, \dots).$$

En dérivant par rapport à a, a', b, b', c, c' et en faisant $a = b' = 1, a' = b = c = c' = 0$, on a un système complet qui montre que H doit être de la forme

$$H = H[(ij), (gh)]$$

avec $(gh) = p_g q_h - q_g p_h$. Les conditions supplémentaires relatives au degré de ces expressions par rapport à chaque indice, et relatives à son comportement quand on permute ces indices, se maintiennent inchangées. En y ajoutant les expressions $(i), (x, gh), (x, i)$, on forme des « covariants et contrevariants affines », qui joueront un rôle dans la classification des propriétés affines des courbes algébriques. Signalons, par exemple, la « Hessienne affine » d'une courbe plane

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} \\ \Phi''_{yx} & \Phi''_{yy} \end{vmatrix} = \frac{n^2(n-1)^2}{2!} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^6 \int \psi_1 \psi_2 (12)^2 (1)^{n-2} (2)^{n-2} dp_1 \dots dr_2$$

dont le degré est $2n - 4$.

Il est clair que les invariants projectifs d'une forme seront des fonctions, non nécessairement rationnelles, des invariants affines de la même forme. On doit s'attendre à l'existence de certaines « syzygies » reliant ces deux sortes d'invariants. La même remarque s'applique aux concomitants de tout sous-groupe du groupe projectif. On peut voir ici un autre principe de fractionnement du calcul, en se proposant d'exprimer les concomitants projectifs en fonction des concomitants relatifs aux sous-groupes du groupe projectif. Mais l'expression des premiers en fonction des seconds ne sera rationnelle cette fois, et ceci est dû au fait que le groupe projectif ne possède pas de sous-groupe invariant différent de l'unité¹⁾. Dans la recherche des syzygies en question on peut, toutefois, appliquer avec profit la méthode de scission du noyau.

¹⁾ Voir S. Qie *Theorie der Transformationsgruppen*, I, III.

DESPRE VALENȚA DOMENIILOR RIEMANNIENE

(Lucrările sesiunii generale științ, iunie 1950 București
Ed. Acad. R.P.R., 1951, (195—203)

Comunicare prezentată în ședința din 3 iunie 1950

Se știe că dacă $Z = f(z)$ este o funcție holomorfă într-un domeniu D , valorile luate de Z pentru $z \in D$ formează un domeniu Δ care poate acoperi de mai multe ori unele regiuni ale planului (Z), și în acest caz se spune că $f(z)$ este multivalentă în domeniul D . Este comod să considerăm domeniul Δ ca fiind așternut pe o suprafață Riemann, obținută prin suprapunerea mai multor plane între care se stabilește o comunicație cu ajutorul unor tăieturi făcute de-a lungul unor curbe.

Vom numi *domeniu riemannian* (sau cu multiplă acoperire) un domeniu plan Δ , caracterizat prin proprietatea că el acoperă de mai multe ori anumite regiuni ale planului (Z), fie că Δ se poate obține, sau nu, printr-o transformare $Z = f(z)$ aplicată unui domeniu D , cu simplă acoperire (univalent), din planul (z). Astfel, dacă un plan, conceput ca o membrană elastică, este îndoit în formă de cută, în sensul comun al cuvîntului, el devine un domeniu cu triplă acoperire în regiunea cutei însă un astfel de domeniu nu se poate obține aplicînd unui domeniu cu simplă acoperire o transformare $Z = f(z)$, unde $f(z)$ este o funcție analitică. În adevăr, suprafața Riemann a unei funcții analitice nu poate prezenta astfel de cute¹⁾.

Fie Δ un domeniu riemannian, în acest sens generalizat, adică un domeniu cu acoperire multiplă. El se descompune în alte domenii, cu simplă acoperire, în modul următor: Să notăm cu Δ_1 cea mai mare mulțime deschisă din (Z) care se găsește acoperită o singură dată de Δ , cu Δ_2 cea mai mare mulțime deschisă acoperită de 2 ori de Δ , etc. Vom scrie simbolic:

$$\Delta = \Delta_1 + 2\Delta_2 + \dots + n\Delta_n + \dots$$

Dacă mulțimea Δ_n este vidă pentru $n > p$, însă $\Delta_p \neq 0$, vom spune că întregul p este ordinul de multivalență, sau mai scurt, *valența* domeniului Δ . Dacă un punct $\zeta \in \Delta$, vom spune că *valența locală* în ζ este q .

Vom stabili aici unele relații între valența p a unui domeniu Δ și anumite constante metrice legate de acest domeniu, enunțînd și o condiție necesară și suficientă pentru ca Δ să aibă valența p . Aceste rezultate își găsesc aplicații la caracterizarea funcțiilor analitice univalente sau multivalente într-un domeniu. Asupra acestei aplicații, vom reveni într-o Notă ulterioară.

¹⁾ G. Călugăreanu *Sur la structure des transformations ponctuelles du plan*. *Mathematica (Cluj)*, XVIII (1942), 68.

1. Fie Δ un domeniu mărginit, p — valent, din planul (Z) , iar $\zeta \in \Delta$, un punct în care valența locală este $q \leq p$. Să considerăm integrala

$$(1) \quad f(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \lambda e^{-\lambda|z-\zeta|^2} d\omega$$

în care $d\omega$ reprezintă elementul de arie. Această integrală se poate lua în sens Lebesgue când Δ nu este măsurabil în sens Jordan. Vom avea

$$f(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_1} + \frac{2}{\pi} \iint_{\Delta_2} + \dots + \frac{p}{\pi} \iint_{\Delta_p}$$

Se vede că domeniul Δ se poate considera aici ca fiind suma unui domeniu Δ_1 , a două domenii Δ_2 suprapuse, ..., a p domenii Δ_p suprapuse, legăturile ce există între aceste domenii putîndu-se suprima fără a schimba valoarea integralei $f(\lambda, \zeta)$. Este util să considerăm planul $\mathbb{C}(Z)$ ca fiind format din p plane suprapuse, din care domeniile Δ_q se vor distribui astfel: În planul π_1 vom așeza domeniul Δ_1 și cite un exemplar din $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_p$. În π_2 vom așeza al doilea exemplar Δ_2 (astfel încît să se suprapună primului), și cite un al doilea exemplar din $\Delta_3, \dots, \Delta_p$. În π_3 vom așeza al treilea exemplar Δ_3 (suprapus primelor două), și cite un exemplar din $\Delta_4, \dots, \Delta_p$. Continuînd astfel, vom termina așezînd în π_p ultimul exemplar Δ_p .

Să arătăm acum că $f(\lambda, \zeta) \rightarrow q$, când $q \rightarrow \infty$, dacă $\zeta \in \Delta_p$.

Să observăm că integrala de mai sus, extinsă planului întreg π , se poate calcula ușor, și avem, notînd $|Z - \zeta| = r$.

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Pi} \lambda e^{-\lambda r^2} r dr d\theta = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda r^2} 2r dr = 1.$$

În valoarea acestei integrale, contribuția elementelor $d\omega$ depărtate de ζ este cu atît mai neglijabilă cu cît λ este mai mare, astfel că elementele care predomină sînt cele vecine cu ζ . Mai precis, fie Γ un cerc cu centrul ζ , de rază ρ . Avem

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Pi} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega + \frac{1}{\pi} \iint_{\Pi-\Gamma} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega = (1 - e^{-\lambda \rho^2}) + e^{-\lambda \rho^2}$$

Să luăm $\rho = \lambda^{-1/4}$. Contribuția cercului Γ este $1 - e^{-V\lambda}$, iar aceea a exteriorului său $\Pi - \Gamma$ este $e^{-V\lambda}$. Cînd $\lambda \rightarrow \infty$, se vede că $\rho \rightarrow 0$, contribuția cercului Γ tinde către 1, iar aceea a exteriorului său tinde către zero.

Avem însă pentru $\Gamma \subset \Delta_q$, deci pentru λ destul de mare,

$$f(\lambda, \zeta) = \frac{q}{\pi} \iint_{\Gamma} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega + \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta-q\Gamma} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega = q(1 - e^{-V\lambda}) + \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta-q\Gamma} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega.$$

Am notat aici cu $q\Gamma$ domeniul Γ acoperit de q ori. Avem evident

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta-q\Gamma} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega < \frac{p}{\pi} \iint_{\Pi-\Gamma} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega = p e^{-V\lambda}.$$

Așadar, $f(\lambda, \zeta) \rightarrow q$, pentru $\lambda \rightarrow \infty$. Avem

$$\begin{aligned} f(\lambda, \zeta) &= \frac{\lambda}{\pi} \iint_{\Delta} d\omega - \frac{\lambda^2}{1!} \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |z - \zeta|^2 d\omega + \frac{\lambda^3}{2!} \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |z - \zeta|^4 d\omega - \dots = \\ &= b_0 \lambda - b_1 \lambda^2 + \frac{b_2}{2} \lambda^3 - \dots + (-1)^n \frac{b_n}{n!} \lambda^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

notînd

$$b_n = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |Z - \zeta|^{2n} d\omega$$

Se observă că b_0 reprezintă A/π , unde A este aria domeniului Δ , iar πb_1 reprezintă momentul de inerție al domeniului Δ , considerat ca o placă de densitate 1, moment luat în raport cu ζ . În general, πb_n este un moment de ordin superior, care nu intervine în Mecanică.

Valența locală q în punctul ζ este deci dată de valoarea asimptotică pentru $\lambda \rightarrow +\infty$ a funcției întregi de λ , $f(\lambda, \zeta) = b_0 \lambda - b_1 \lambda^2 + \frac{1}{2} b_2 \lambda^3 - \dots$. Se vede ușor că, domeniul Δ fiind mărginit, această funcție întregă este de gen 1 cel mult.

Să considerăm funcția întregă

$$(2) \quad \varphi(\lambda, \zeta) = p - f(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{p\Pi-\Delta} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \iint_{C(\Delta)} \lambda e^{-\lambda r^2} d\omega = p - b_0 \lambda + b_1 \lambda^2 - \dots$$

unde am notat prescurtat $C(\Delta) = p\Pi - \Delta$.

Vom arăta că $\varphi(\lambda, \zeta)$ este o funcție complet monotonă¹⁾ pe un segment $(0, c)$ al axei 0λ . Această proprietate ne va permite să scriem,

¹⁾ S. Bernstein, *Sur les fonctions absolument monotones*. Acta math., 52 (1928), 1-66; D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton math Series, 1946, p. 144-177.

pentru coeficienții dezvoltării în serie a lui φ , inegalitățile lui S. Bernstein-
de unde vor rezulta inegalități pentru valoarea p a domeniului Δ . Deri-
vând formal (2) în raport cu λ , obținem

$$\varphi' = \frac{1}{\pi} \iint_{C(\Delta)} (1 - \lambda r^2) e^{-\lambda r^2} d\omega, \quad \varphi'' = \frac{1}{\pi} \iint_{C(\Delta)} r^2 (\lambda r^2 - 2) e^{-\lambda r^2} d\omega, \dots,$$

$$\varphi^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\pi} \iint_{C(\Delta)} r^{2(n-1)} (\lambda r^2 - n) e^{-\lambda r^2} d\omega.$$

Toate aceste integrale fiind uniform convergente în domeniul infi-
nit $C(\Delta)$, derivarea este legitimă.

Avem evident $\varphi(\lambda, \zeta) > 0$ pentru $\lambda > 0$, deoarece în (2) elementul
integral este pozitiv. Să arătăm că avem $(-1)^n \varphi^{(n)} \geq 0$, pentru $0 \leq \lambda \leq$
 $\leq c$, $n = 1, 2, \dots$, adică

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \iint_{C(\Delta)} r^{2n-2} (\lambda r^2 - n) e^{-\lambda r^2} d\omega \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq c.$$

Să construim cercul γ , cu centrul ζ și de rază $\sqrt{\frac{n}{\lambda}}$. Acest cerc va
conține în interiorul său întreg domeniul Δ , dacă $0 \leq \lambda \leq c$, unde $\frac{1}{c} =$
 $= \text{Max}_{\Delta}(r^2)$. Putem scrie, deci:

$$(4) \quad \frac{1}{\pi} \iint_{C(\Delta)} r^{2n-2} (\lambda r^2 - n) e^{-\lambda r^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \iint_{(\gamma) \cdot C(\Delta)} + \frac{1}{\pi} \iint_{C(\gamma)}$$

Avem, însă:

$$\frac{1}{\pi} \iint_{C(\gamma)} r^{2n-2} (\lambda r^2 - n) e^{-\lambda r^2} r dr d\theta = \int_{\sqrt{\frac{n}{\lambda}}}^{\infty} r^{2n-2} (\lambda r^2 - n) e^{-\lambda r^2} 2r dr =$$

$$= [-r^{2n} e^{-\lambda r^2}]_{\sqrt{\frac{n}{\lambda}}}^{\infty} = \left(\frac{n}{\lambda e}\right)^n.$$

De altfel, avem evident

$$\frac{1}{\pi} \iint_{(\gamma) \cdot C(\Delta)} r^{2n-2} (\lambda r^2 - n) e^{-\lambda r^2} d\omega < 0$$

deoarece în (γ) avem $\lambda r^2 - n < 0$. Apoi

$$\left| \frac{1}{\pi} \iint_{(\gamma) \cdot C(\Delta)} r^{2n-2} (\lambda r^2 - n) e^{-\lambda r^2} d\omega \right| < \frac{1}{\pi} \iint_{(\gamma)} r^{2n-2} (n - \lambda r^2) e^{-\lambda r^2} r dr d\theta =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{n}{\lambda}}} r^{2n-2} (n - \lambda r^2) e^{-\lambda r^2} 2r dr = \left(\frac{n}{\lambda e}\right)^n$$

Ținând seama de (4), rezultă imediat (3), deci $\varphi(\lambda, \zeta)$ este complet
monotonă pentru $0 \leq \lambda \leq c$. Funcția $\psi(\lambda, \zeta) = \varphi(-\lambda, \zeta) = p + b_0 \lambda +$
 $+ b_1 \lambda^2 + \frac{b_2}{2} \lambda^3 + \dots + \frac{b_n}{n!} \lambda^{n+1} + \dots$ este deci absolut monotonă pe seg-
mentul $-c \leq \lambda \leq 0$, și inegalitățile lui S. Bernstein (cf. p. 4) ne dau
atunci, utilizând notațiile acestui autor,

$$\left(\psi(0), \frac{d^2 \psi(0)}{d \log c^2} \right) = \left| \frac{\psi c \psi'}{c \psi' c^2 \psi'' + c \psi'} \right| \geq 0, \quad c(\psi \psi'' - \psi'^2) + \psi \psi' \geq 0$$

așadar, deoarece $\psi(0) = p$, $\psi'(0) = b_0$, $\psi''(0) = 2b_1$,

$$(5) \quad b_0^2 \leq p \left(2b_1 + \frac{b_0}{c} \right)$$

Ținând seama că

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} d\omega = \frac{A}{\pi}, \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} r^2 d\omega = \frac{I\zeta}{\pi}$$

obținem

$$A^2 \leq \pi p (2I\zeta + A\delta\zeta)$$

notînd cu A aria domeniului Δ (măsura superficială în sens Lebesgue)
cu $I\zeta$ momentul de inerție al lui Δ în raport cu punctul ζ , iar cu $\delta\zeta$ ma-
ximul distanței de la ζ la un punct al lui Δ . Această inegalitate se poate
însă ameliora, și găsim pe o cale directă inegalitatea

$$(6) \quad A^2 \leq 2\pi p I\zeta$$

valabilă oricare ar fi poziția punctului ζ în plan. În special, ea este vala-
bilă cînd ζ este centrul de greutate al domeniului Δ . Scrisă sub forma

$$p \geq \frac{A^2}{2\pi I_G},$$

inegalitatea exprimă că la arie dată A , dacă facem ca momentul de inerție I_c față de centrul de greutate să devină foarte mic, domeniul Δ începe în mod necesar să calce pe el însuși. Această inegalitate nu se poate ameliora, egalitatea avînd loc în cazul unui cerc, simplu sau multiplu. Inegalități analoage se pot da în spații cu mai mult de două dimensiuni, însă asupra acestor generalizări, și asupra demonstrației elementare a formulei (6) vom reveni într-o Notă ulterioară.

A doua inegalitate a lui S. Bernstein se scrie

$$\left(\psi(0), \frac{d^2\psi(0)}{d \log c^2}, \frac{d^4\psi(0)}{d \log c^4} \right) = \begin{vmatrix} \psi & \psi' & \psi'' \\ c\psi' & \psi' + c\psi'' & 2\psi'' + c\psi''' \\ c^2\psi'' & 2c\psi'' + c^2\psi''' & 2\psi'' + 4c\psi''' + c^2\psi^{IV} \end{vmatrix}$$

care dă

$$p[4b_0b_1 + 4c(3b_0b_2 - 2b_1^2) + 4c^2b_0b_3 + c^3(8b_1b_3 - 9b_2^2)] - 4c[b_0^2b_1 + 3cb_0(b_0b_2 - b_1^2) + c^2(b_0^2b_3 + 2b^3 - 3b_0b_1b_2)] \geq 0.$$

Aplicînd și celelalte inegalități date de S. Bernstein, găsim pentru valența p a domeniului Δ o infinitate de inegalități, făcînd să intervină din ce în ce mai multe momente b_n ale domeniului Δ . Rămîne de văzut dacă ele nu se pot ameliora toate punînd $c = \infty$, cum se întîmplă cu (5). Ne mai punem problema de a ști dacă aceste inegalități nu oferă o aproximație oricît de precisă a lui p , cînd facem să intervină coeficienți b_n destul de mulți.

2. Am arătat că pentru $\zeta \in \Delta_q$ avem

$$f(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \lambda e^{-\lambda|z-\zeta|^2} d\omega \rightarrow q, \lambda \rightarrow \infty.$$

Fie Δ'_q un domeniu complet interior lui Δ_q (frontierele domeniilor Δ'_q și Δ_q sînt disjuncte, deci au o distanță pozitivă). Se vede ușor că pentru $\zeta \in \Delta'_q$ (domeniul Δ'_q la care se adaugă frontiera sa) $f(\lambda, \zeta)$ converge uniform, pentru $\lambda \rightarrow \infty$, către q . Pentru aceasta să considerăm iarăși cercul Γ cu centrul ζ , de rază $\lambda^{-\frac{1}{4}}$. Notînd cu $\delta > 0$ distanța dintre frontierele domeniilor Δ_q și Δ'_q , vom avea $\Gamma \subset \Delta_q$, dacă $\lambda^{-\frac{1}{4}} < \delta$, $\zeta \in \Delta'_q$. Am văzut însă că avem atunci

$$f(\lambda, \zeta) = q(1 - e^{-V\lambda}) + h(\lambda, \zeta), 0 < h(\lambda, \zeta) < pe^{-V\lambda}. \quad (8)$$

deci

$$q - f(\lambda, \zeta) = qe^{-V\lambda} - h(\lambda, \zeta), |q - f(\lambda, \zeta)| < (p + q)e^{-V\lambda} < (p + q)e^{-\frac{1}{\delta^2}}$$

cînd $\zeta \in \Delta'_q$, $\lambda > \frac{1}{\delta^4}$, ceea ce exprimă convergența uniformă $f(\lambda, \zeta) \rightarrow q$

în Δ'_q . Să considerăm acum integrala

$$g(\lambda) = \iint_{\Delta} f(\lambda, \zeta) d\omega_{\zeta},$$

unde $d\omega_{\zeta}$ este un element de arie care conține punctul ζ , mobil în Δ .

Avem, notînd cu A_q aria domeniului Δ_q , pentru $q = 1, 2, \dots, p$, iar cu A aria domeniului Δ ,

$$A = A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \dots + pA_p, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = A_1 + 2^2A_2 + \dots + p^2A_p. \quad (7)$$

În adevăr, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = \iint_{\Delta} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda, \zeta) d\omega_{\zeta} = \iint_{\Delta} q d\omega = \sum_{q=1}^p q^2 A_q$. Dacă

luăm integrala în sens Lebesgue, permutabilitatea simbolurilor $\lim$ și $\iint$ aici nu necesită convergența uniformă arătată mai sus.

Din (7) putem deduce o condiție necesară și suficientă pentru univalența domeniului Δ . Se vede că vom avea, oricare ar fi $\lambda > 0$,

$$g(\lambda) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \iint_{\Delta} \lambda e^{-\lambda|z-\zeta|^2} d\omega_{\zeta} d\omega_z < A \quad (8)$$

numai în cazul domeniilor univalente.

În general, putem determina valența p a domeniului Δ considerînd funcțiile

$$G_n(\lambda) = \iint_{\Delta} [f(\lambda, \zeta) - 1][f(\lambda, \zeta) - 2] \dots [f(\lambda, \zeta) - n] d\omega_{\zeta}$$

Vom avea și aici, pentru n fix,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_n(\lambda) = \iint_{\Delta} (q - 1)(q - 2) \dots (q - n) d\omega_{\zeta}$$

și rezultă că pentru $n \geq p$ vom avea $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_n(\lambda) = 0$, iar pentru $n <$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_n(\lambda) &= n! A_{n+1}(n+1) + \frac{(n+1)!}{1!} A_{n+2}(n+2) + \dots + \\ &+ \frac{(p-1)!}{(n-p+1)!} A_p \cdot p \\ &= (n+1)! A_{n+1} + \dots + \frac{p!}{(n-p+1)!} A_p. \end{aligned}$$

Așadar valența p a domeniului Δ este cea mai mică valoare a întregului n pentru care avem $\lim G_n(\lambda) = 0$, $\lambda \rightarrow \infty$. Putem scrie

$$G_n(\lambda) = \frac{1}{\pi^n} \iint_{\Delta} \iint_{\Delta} \dots \iint_{\Delta} [e^{-\lambda|z_1 - \zeta_1|^2} - 1][e^{-\lambda|z_2 - \zeta_2|^2} - 2] \dots [e^{-\lambda|z_n - \zeta_n|^2} - n] d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n d\omega_{\zeta}.$$

3. Proprietățile de mai sus își găsesc aplicații în studiul transformărilor continue ale planului, și considerații similare se pot face și în spații cu mai multe dimensiuni.

Fie $Z = X(x, y) + iY(x, y)$ o transformare continuă a domeniului simplu conex și univalent D în domeniul Δ , care poate fi multivalent. Vom presupune că X și Y posedă în D jacobianul $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$, mărginit în D . Atunci, notînd cu $\zeta = \xi + i\eta$, avem

$$f(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_D \lambda e^{-\lambda[(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2]} \left| \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right| dx dy.$$

Pentru univalența domeniului Δ va fi necesar și suficient să avem, oricare ar fi $\lambda > 0$,

$$(9) \quad \frac{1}{\pi} \iiint_D \lambda e^{-\lambda[(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2]} \left| \frac{D(X_1, Y_1)}{D(x_1, y_1)} \right| \cdot \left| \frac{D(X_2, Y_2)}{D(x_2, y_2)} \right| dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \\ < \iint_D \left| \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right| dx dy.$$

În mod analog, putem explicita funcțiile $G_n(\lambda)$ cu ajutorul cărora putem determina în general valența p a domeniului Δ .

Din (9) putem deduce o condiție necesară și suficientă pentru univalența unei funcții holomorfe în cercul unitate, asupra căreia vom reveni într-o Notă ulterioară.

DESPRE FUNCȚIILE UNIVALENTE

(Lucrările sesiunii generale științ., iunie 1950. București, Ed. Acad. R.P.R., 1951, 204-209).

Comunicare prezentată în ședința din 3 iunie 1950

În teoria funcțiilor univalente joacă un rol esențial o teoremă a lui Bieberbach, numită *teorema ariei*. Am încercat, într-o Notă anterioară, să dau o generalizare a acestei teoreme, stabilind o condiție necesară și suficientă pentru univalența unui domeniu plan. Voi arăta aici care e forma pe care o ia această condiție în cazul unei funcții holomorfe în cercul unitate, funcție dată prin dezvoltarea

$$Z = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Să notăm cu Γ cercul unitate din planul (z), iar cu γ cercul de rază $r < 1$, concentric cu Γ . Atunci $Z = f(z)$ transformă cercul γ într-un domeniu Δ . Am văzut că pentru ca Δ să fie univalent, e necesar și suficient să avem, oricare ar fi $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{\pi} \iiint_{\Delta} \lambda e^{-\lambda|z - \zeta|^2} d\omega_z d\omega_{\zeta} < A,$$

unde A este aria domeniului Δ . Această arie este mărginită, ca și domeniul Δ deoarece $r < 1$. Condiția de mai sus se mai scrie.

$$\frac{1}{\pi} \iiint_{\gamma} \lambda e^{-\lambda|f(z) - f(u)|^2} |f'(z)|^2 |f'(u)|^2 r dr d\theta \rho d\rho dt < \iint_{\gamma} |f'(z)|^2 r dr d\theta$$

punînd $z = re^{i\theta}$, $u = \rho e^{it}$, $\zeta = f(u)$. Dezvoltînd în serie exponențială, apar următoarele constante:

$$k_n = \frac{1}{\pi} \iiint_{\gamma} |f(z) - f(u)|^{2n} \cdot |f'(z)|^2 \cdot |f'(u)|^2 r dr d\theta \rho d\rho dt$$

iar condiția de univalență se scrie

$$(1) \quad k_0 \lambda - k_1 \lambda^2 + \frac{k_2}{2} \lambda^3 - \dots + (-1)^n \frac{k_n}{n!} \lambda^{n+1} + \dots < A, \lambda > 0.$$