

CONTRIBUȚII LA STUDIUL MIȘCĂRILOR FLUIDE ROTATORII

DE
LASCU BAL

*Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, Mc AcRPR,
în ședința din 24 Iunie 1950 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.*

INTRODUCERE

În lucrarea de față vom considera un sistem de n lame dreptunghiulare de lățime dată, dispuse radial simetric în jurul unei axe, astfel ca două lame învecinate să formeze între ele un unghi de $\frac{2\pi}{n}$ radiani. Sistemul este așezat într'un fluid care poate fi, sau nelimitat în toate direcțiile, sau limitat lateral de un cilindru circular drept având ca axă, axa sistemului. Acest sistem rotativ e numit moderator cu aripioare sau regulator cu aripioare. Vom presupune că moderatorul se rotește în jurul axei și ne propunem să studiem mișcarea fluidă născută de rotirea acestui sistem în următoarele ipoteze simplificatoare: (1) fluidul e perfect și incompresibil, (2) mișcarea e plană, adică elementele fluide care la un moment dat se găsesc pe aceeași paralelă la axa cilindrului au aceeași viteză paralelă cu secțiunea dreaptă în cilindru și (3) mișcarea e irotațională. În aceste ipoteze studiul mișcării se va face în planul determinat de secțiunea dreaptă cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă.

Pentru sistematizare lucrarea a fost împărțită în 3 părți:

În prima parte vom face o scurtă monografie a problemei arătând contribuția diferiților autori.

În a doua parte vom studia mișcarea în fluidul nelimitat, iar în partea ultimă în fluidul limitat.

Deși condițiile în care se face mișcarea studiată sunt îndeplinite cu greutate în practică, totuși rezultatele noastre pot fi folosite, într-o primă aproximație, cu folos de către tehnicieni în studiul turbinelor.

Ecuția integrală la care conduce studiul mișcării este întâlnită în teoria aripei portante, studiu atât de important în aerodinamică.

Subiectul prezentei lucrări mi-a fost sugerat de profesorul C. Iacob, încă din Mai 1947 și am expus o parte din rezultate atât la Cercul Mate-

matic al Societății de Științe din Cluj, cât și la Cercul de Studii al Laboratorului de Mecanică al Universității din Cluj.

Țin să-mi exprim pe această cale profunđa mea recunoștință profesorului C. Iacob, care a urmărit în deaproape lucrarea, oferindu-mi tot sprijinul de care am avut nevoie.

CAPITOLUL I

Problema mișcării fluide născute de moderatorul cu aripioare a fost studiată de diferiți autori cu diferite metode. Nu vom cita decât pe acei care au făcut un studiu mai general al problemei.

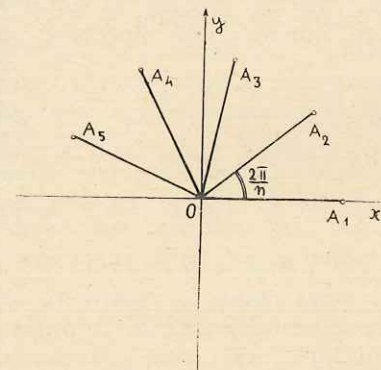


Fig. 1.

Întâi trebuie citat Prof. V. Vâlcovici¹⁾, care în trei memorii, dintre care ultimul e o sinteză a primelor două, tratează problema în cazul când fluidul e nelimitat și aripioarele ajung până la axa de rotație. D-sa ajunge la următoarea problemă din teoria funcțiilor armonice pentru funcția de curent:

Să se determine o funcție armonică în tot planul cu excepția aripioarelor OA_n care să aibe derivatele parțiale de ordinul întâi nule la infinit

și care să ia pe aripioare valoarea $-\frac{\omega}{2}r^2$, ω fiind viteza unghiulară iar r distanța dela un punct la axa de rotație.

Pentru găsirea acestei funcții D-sa face transformarea $z = aZ$, a fiind lungimea segmentelor OA_n și studiază reprezentarea conformă

$$Z^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \left[\zeta^{\frac{n}{2}} + \zeta^{-\frac{n}{2}} \right]$$

care transformă biunivoc planul (Z) din care s'au scos segmentele OA'_n transformatele lui OA_n în interiorul unui cerc de rază unitate.

Prof. Vâlcovici folosește apoi formula lui Schwartz—Villat și determină funcția de variabilă complexă a cărei parte imaginară e funcția de curent cerută

$$f(\zeta) = -\frac{a^2\omega i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \frac{n\theta}{2} \left| \frac{1+\zeta e^{-i\theta}}{1-\zeta e^{-i\theta}} \right|^{\frac{n}{2}} d\theta$$

¹⁾ V. Vâlcovici. *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, t. X. (1920) p. 5 și 201. *Bull. Scient. de l'École Polyt. Timișoara*, 9. 2, 1928. p. 199.

Pornind de aici, determină apoi elementele mișcării: liniile de curent, viteza, energia cinetică, acțiunea hidrodinamică și momentul hidrodinamic.

Cazurile particulare $n = 1, 2, 4$ sunt studiate în detaliu găsindu-se expresiile potențialelor complexe

$$f_1 = -\frac{a^2 i \omega}{16} (\zeta^2 + 4\zeta + 3)$$

$$f_2 = -\frac{a^2 i \omega}{4} (1 + \zeta^2) \quad f_4 = \frac{a^2 \omega i}{2\pi \zeta^2} (1 + \zeta^4) \left[\frac{1}{i} \log \frac{1+i+\zeta^2(1-i)}{1-i+\zeta^2(1+i)} - \frac{\pi}{2} \right]$$

D-sa mai determină pentru fiecare din aceste cazuri vitezele dealungul aripioarelor cu punctele de oprire, energia cinetică precum și acțiunea hidrodinamică și momentul hidrodinamic cu punctele de aplicație ale rezistenței.

Problema a fost studiată și de autorii germani W. Kucharski²⁾, M. Spannhake³⁾, E. Sörensen⁴⁾, Schultz și Busemann tot prin metode din teoria funcțiilor armonice. Dânsii tratează cazul când aripioarele sunt cuprinse între 2 cercuri concentrice, reușind să studieze și modele cu aripioare ușor curbate în spirale logaritmice. În toate aceste lucrări fluidul e considerat nelimitat.

În două note publicate în C. R. Paris (1927) Prof. Carafoli⁵⁾ consideră mișcarea fluidă ciclică în jurul unei plăci plane în rotație în ipotezele că planul plăcii nu trece prin axa de rotație iar viteza fluidului la infinit e diferită de zero, găsind atât potențialul complex cât și rezistența hidrodinamică și momentul hidrodinamic.

W. Kucharski⁶⁾, într-o lucrare recentă, reia problema moderatorului cu lamele până în centrul de rotație, în fluidul nelimitat, și dă soluția prin altă metodă. D-sa acoperă lamele cu vârtejuri de densitate necunoscută și găsește o ecuație integrală singulară pentru determinarea acestei densități. Soluția o obține prin metoda dezvoltării în serie. Mișcarea găsită e mișcarea ciclică, iar constanta circulației este astfel determinată ca vârtejurile să aibă densitate nulă la capetele exterioare.

Metoda folosită nu-i permite să trateze în mod uniform cazul general, ci distinge cazurile $n \leq 4$ și $n > 4$.

Pentru $n \leq 4$ găsește densitățile

$$m(\xi) = \frac{a^n}{2} \frac{\xi^n - 1}{\sqrt{a^n - \xi^n}} \sum_{\nu=1}^n b_\nu [\cos \nu\psi - (-1)^\nu] \quad b_\nu = \frac{4a}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{\sin^k \frac{\varphi}{2}} \sin \nu\varphi d\varphi$$

²⁾ W. Kucharski, *Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper*. München und Berlin 1918.

³⁾ W. Spannhake *Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik*. Bd. 5. 1925, p. 481—484.

⁴⁾ E. Sörensen, *Zeitschrift für angew. Math. und Mech.* Bd. 7, 1927, p. 89.

⁵⁾ E. Carafoli, *Comptes rendus*, Paris, t. 184, 1927, p. 804 și p. 933.

⁶⁾ W. Kucharski, *Zeitschrift für angew. Math. u. Mech.* Bd. 21 1941 p. 65—79.

cu valorile particulare $\cos \psi = 1 - 2 \left(\frac{\xi}{a} \right)^n$

pentru $n = 1, 2$ și 4 .

$$m_1 = \frac{a\omega}{2\pi} \frac{1+\zeta-2\zeta^2}{\sqrt{\zeta-\zeta^2}}, \quad m_2 = \frac{a\omega}{\pi} \sqrt{1-\zeta^2}; \quad m_4 = \frac{2a\omega}{\pi} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4^\nu}{4^\nu - 1} \cos \nu\psi \right]$$

$$\zeta = \frac{\xi}{l}$$

În cazul $n > 4$ D-sa reușește să dea expresia densității vârtejurilor sub forma unor serii care se pretează ușor la calcule numerice și aplică aceste metode și la aripioare ușor curbate.

Într'un memoriu publicat în 1943 Prof. C. Iacob⁷⁾ revine asupra problemei și pornind de la considerațiuni generale asupra mișcărilor rotatorii dă expresia acțiunii hidrodinamice asupra pereților solidelor din fluid și apoi trece la studiul moderatorului în fluidul nelimitat. D-sa reduce rezolvarea problemei Dirichlet la cea a unei probleme mixte Volterra—Signorini. Această metodă o extinde și la cazul fluidului limitat și cercetează detaliat cazurile particulare $n = 1, 2$ și 4 dând expresiile potențialelor complexe ale mișcărilor ciclice și aciclice.

În cazul fluidului nelimitat se obține

$$F(z, t) = \frac{-i\gamma}{\pi} \log [\sqrt{z^n - a^n} + \sqrt{z^n - b^n}] - \frac{i\omega}{2\pi} \sqrt{(z^n - a^n)(z^n - b^n)} \int_a^b \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{(x^n - a^n)(b^n - x^n)(x^n - z^n)}}$$

când $\gamma = 0$ mișcarea e aciclică.

În cazul fluidului limitat, pentru mișcarea aciclică, D-sa găsește

$$F_1(z, t) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{g(z^n)} \int_{a^n}^{b^n} \frac{\frac{\omega}{2} X^n - C}{\sqrt{[g(x)]} (X-Z)(R^2 - XZ)} dX$$

cu

$$g(z) = (z-a)(z-b) \left(z - \frac{R^2}{a} \right) \left(z - \frac{R^2}{b} \right)$$

iar

$$C = \frac{\int_a^b \frac{\omega}{2} x^2 dx}{\sqrt{[g(x)]}} = \frac{\int_a^b dx}{\sqrt{[g(x)]}}$$

care e condiția ca mișcarea să fie aciclică.

⁷⁾ C. Iacob, *Disquisitiones Mathematicae et Physicae* t. III. 1943 p. 207—247; *Comptes rendus*, Paris, t. 217, 1943, p. 313.

Prof. C. Iacob indică apoi forma termenului aditiv corespunzător mișcării ciclice

$$F_2(z) = \frac{-\gamma i}{2\pi} \sqrt{g(z^n)} \int_{a^n}^{b^n} \frac{dX}{(X-Z^n) \sqrt{g(X)}}$$

în acest caz constanta C fiind determinată prin condiția de regularitate la infinit a lui

$$F_1(z, t) + F_2(z)$$

În 1947 Prof. C. Iacob⁸⁾ revine asupra ecuației integrale singulare a lui Kucharski și-i dă o nouă metodă de rezolvare cu ajutorul unei probleme mixte.

Noi am căutat să stabilim ecuația integrală a mișcării prin procedeul folosit de W. Kucharski, în cazul fluidului limitat. Am reluat mai întâi cazul fluidului nelimitat, rezolvând ecuația integrală a mișcării cu ajutorul metodei Prof. C. Iacob și găsind densitatea am reușit să calculăm atât viteza complexă cât și potențialul complex al mișcării, regăsind ca o verificare rezultatele Prof. Iacob, atât în cazul general cât și în cazul unor numere mici de aripioare. Metoda folosită am extins-o în cazul fluidului limitat și am găsit expresia densității și a vitezei complexe. Acest procedeu care extinde pe cel al lui Kucharski la cazul fluidului limitat, duce la calcule destul de complicate. El prezintă totuși un interes deosebit prin faptul că este susceptibil de a fi extins în cazul aripioarelor puțin curbate, problemă de care mă voi ocupa într-o lucrare viitoare.

CAPITOLUL II.

MIȘCAREA APARATULUI ROTATIV ÎNTR'UN FLUID NELIMITAT.

1. Găsirea ecuației integrale.

Presupunem aripioarele cuprinse între două cercuri concentrice și fie $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ urmele lor în planul mișcării; ne propunem să studiem mișcarea fluidă născută de rotirea acestui moderator în fluidul nelimitat în toate direcțiile.

Pentru studiul mișcării vom determina potențialul complex $f(z_1, t)$ față de axele fixe sau $f(z, t)$ față de axele legate de sistemul rotativ. În acest caz între vitezele complexe avem relația

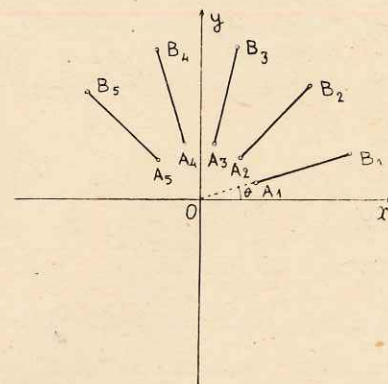


Fig. 2.

⁸ C. Jacob, *Mathematica*, t. 23, 1947—48, p. 153.

$$\frac{df}{dz_1} = \frac{df}{dz} e^{-i\theta} \text{ căci } z_1 = z e^{i\theta}, \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

θ fiind unghiul ce-l face lama A_1B_1 cu axa ox_1 , iar ω e viteza unghiulară pe care o presupunem funcție de timp.

Din relația

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_t$$

rezultă viteza relativă complexă

$$u_r - iv_r = \frac{df}{dz} + i\omega z$$

În timpul mișcării viteza relativă e tangentă la lama și deci proiecția vitezei absolute V_{an} pe normala la lamă este egală cu proiecția vitezei de transport V_{tn} pe această normală. Avem deci condiția

$$V_{an} = V_{tn} = \omega r$$

r fiind distanța dela punct la axa de rotație.

Pentru găsirea ecuației integrale a mișcării pornim ca și W. Kucharski⁹⁾ cu introducerea vârtejurilor fictive așezate pe segmente.

Considerăm n vârtejuri de densitate $\frac{m}{\pi}$, plasate la distanța ξ de origine pe cele n aripioare. Potențialul complex al mișcării fluide născute de vârtejuri e

$$f_1(z) = \frac{m}{\pi i} \log [z^n - \xi^n] \quad z = x + iy, \quad a < \xi < b$$

a și b fiind distanțele extremităților unei aripioare de axa de rotație, iar viteza complexă este

$$\frac{df_1}{dz} = u - iv = \frac{m}{\pi i} \frac{nz^{n-1}}{z^n - \xi^n}$$

Viteza normală la aripioare va fi

$$V_{an} = \frac{m}{\pi} \frac{nr^{n-1}}{r^n - \xi^n}$$

Considerăm o distribuție fictivă de vârtejuri de densitate $\frac{m(\xi)d\xi}{\pi}$ ce acoperă aripioarele. Viteza normală datorită tuturor acestor vârtejuri are expresia

$$V_n = \frac{nr^{n-1}}{\pi} \int_a^b \frac{m(\xi)d\xi}{r^n - \xi^n}$$

integrala fiind luată ca valoare principală în sensul lui Cauchy, adică

⁹ W. Kucharski, Citat la Nr. 6.

$$\int_a^b \frac{n(\xi) d\xi}{r^n - \xi^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{r-\varepsilon} \frac{m(\xi) d\xi}{r^n - \xi^n} + \int_{r+\varepsilon}^b \frac{m(\xi) d\xi}{r^n - \xi^n} \right]$$

Planele radiale, executând o mișcare de rotație de viteză unghiulară ω , viteza normală a unei particule fluide de pe un plan este egală cu viteza de rotație a punctului din plan cu care coincide în acel moment

$$V_n^* = \omega r \quad (1)$$

Vom pune astfel problema încât mișcarea generată de vârtejurile fictive plasate pe lame să îndeplinească aceleași condiții la limită ca și mișcarea născută de aparatul rotativ, adică să avem

$$V_n^* = V_n$$

Urmează

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{n r^{n-1} m(\xi) d\xi}{r^n - \xi^n} = \omega r$$

care este ecuația integrală a mișcării. Făcând transformarea $r^n = u$, $\xi^n = v$ obținem

$$\frac{1}{\pi} \int_{a^n}^{b^n} \frac{M(v) dv}{u - v} = \frac{\omega}{u^{\frac{n-2}{n}}} \quad (2)$$

unde

$$M(v) = m(\sqrt[n]{v}) v^{\frac{1-n}{n}}$$

Această ecuație integrală e de specia întâia cu valoare principală. Ea a fost mult studiată, fiind întâlnită în teoria aripei portante.

Soluția ecuației integrale (2) a fost dată de W. Kucharski prin dezvoltare în serie după metoda utilizată în teoria aripei portante. (A se vedea de ex. G. Hamel¹⁰) și J. Pérès¹¹). H. Söhlgen¹²) consideră ecuația integrală

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{f(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (2')$$

și arată că dacă $g(x)$ e hölderiană iar $g(x)$ și $g^2(x)\sqrt{a^2 - x^2}$ sunt integrabile în intervalul deschis $(-a, +a)$, atunci ecuația integrală definește o funcție $f(x)$, care e hölderiană și $f(x)$ cu $f^2(x)\sqrt{a^2 - x^2}$ sunt integrabile în intervalul deschis $(-a, +a)$, astfel ca $\int_a^b f(\xi) d\xi$ să aibă o valoare dată.

¹⁰ G. Hamel, *Integralgleichungen*. Berlin. 1937, p. 145.

¹¹ J. Pérès, *Cours de Mécanique des fluides* Paris. 1936. p. 270.

¹² H. Söhlgen, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 45. 1930. p. 245.

Cu acest fel de ecuații s'au mai ocupat J. Legras¹³), J. Weissinger¹⁴), J. Vecua¹⁵), C. Iacob¹⁶).

2. Rezolvarea ecuației integrale. Vom rezolva ecuația integrală (2) cu ajutorul unei probleme mixte studiată de A. Signorini¹⁷), V. Vâlcovici¹⁸), E. Demtchenko¹⁹), C. Iacob²⁰).

Pentru rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru semiplan, adică determinarea unei funcții de variabilă complexă $F(z) = \varphi + i\psi$ olomorfă în semiplanul superior și la infinit, a cărei parte reală să ia valori continue, date, pe axa reală, avem formula clasică

$$F(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{z - \xi} + \psi_0 \quad (3)$$

$\varphi(\xi)$ fiind valoarea părții reale pe axa reală, iar ψ_0 valoarea la infinit a părții imaginare $\psi(x, y)$.

În cazul când $\varphi(x)$ este o funcție de pătrat integrabil, și e nulă pe toată axa reală afară de un segment (α, β) făcând pe z să tindă către un punct de afix x de pe segmentul (α, β) , în virtutea unor rezultate ale matematicienilor P. Fatou²¹), J. Privaloff²²), H. Villat²³), avem

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \frac{\varphi(\xi) d\xi}{x - \xi} + \psi_0 \quad (3')$$

Când $\psi(x, y)$ e nulă la infinit, $\psi_0 = 0$, iar $\psi(x, 0) = g(x)$ este dată pe segmentul (α, β) , $\varphi(x)$ este soluția ecuației integrale.

$$g(x) = - \int_a^\beta \frac{\varphi(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (4)$$

care este analoagă cu (2).

După metoda folosită de Prof. C. Iacob în memoriul citat la Cap. I., considerăm problema mixtă următoare: Să se determine o funcție de variabilă complexă $F(z) = u + iv$, olomorfă în semiplanul superior, nulă

¹³ J. Legras, *C. R. Acad. Paris*. t. 206, 1937, p. 972.

¹⁴ J. Weissinger, *Math. Zeitschrift*. Bd. 47. 1941. p. 16—33.

¹⁵ J. Vecua, *C. R. Acad. U. R. S. S.* t. 26—1928, p. 327—330.

¹⁶ C. Iacob — citat la Nr. 8.

¹⁷ A. Signorini, *C. R. Acad. Paris*. t. 190, 1930, p. 712.

¹⁸ V. Vâlcovici, *C. R. Acad. Paris*. t. 190, 1930, p. 1264.

¹⁹ B. Demtchenko, *C. R. Acad. Paris*, t. 190. 1930, p. 415.

²⁰ C. Iacob, *C. R. Acad. Paris*, t. 228. 1949, p. 355.

²¹ P. Fatou, *Acta Mathematica*, t. 30. 1906. p. 335.

²² J. Privaloff, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 44. 1916,, p. 100. *Journal de l'Ec. Polyt.* t. 24 (1924). p. 110.

²³ H. Villat, *Acta Mathematica*, t. 40. 1916. p. 101.

la infinit, mărginită pe axa ox în afară poate de $x=\alpha$, $x=\beta$, care să îndeplinească următoarele condiții pe axa reală:

$$u=0 \text{ între } (-\infty, \alpha); (\beta, +\infty) \text{ iar } v=g(x) \text{ h\"olderian\"a pe } (\alpha, \beta) \quad (5)$$

Soluția acestei probleme există și e uniformă, căci $F(z)$ definit de condițiile (5) se poate prelungi prin simetrie în semiplanul inferior, determinarea ei revenind la o problemă Dirichlet pentru planul din care s'a tăiat segmentul (α, β) . Condiția la infinit nu constituie o restricție căci putem adăoga soluției un termen de forma

$$i \frac{Az+C}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}} \quad A \text{ și } C \text{ constante reale,}$$

ce îndeplinește condițiile (5) și putem alege pe A astfel ca soluția să fie nulă la infinit.

Luăm funcția auxiliară $\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$ cu determinările

$$\begin{array}{ll} -\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} & \text{în intervalul } -\infty, \alpha) \\ i\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} & \text{,, ,, } (\alpha, \beta) \\ \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} & \text{,, ,, } (\beta, +\infty) \end{array} \quad (6)$$

Determinarea produsului $(Fz)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$ revine la problema lui Dirichlet pentru semiplanul superior, căci vom cunoaște valorile pe care le ia partea reală a acestei funcțiuni pe axa ox .

Presupunem că la mari distanțe $F(z)$ se dezvoltă într'o serie de forma

$$F(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Potrivit formulei (3) avem

$$F(z)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} = -\frac{i}{\pi} \int_a^\beta \frac{g(\xi)\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}}{z-\xi} d\xi + iC$$

sau

$$F(z) = \frac{Ci}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}} - \frac{i}{\pi\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}} \int_a^\beta \frac{g(\xi)\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}}{z-\xi} d\xi \quad (7)$$

Făcând pe z să tindă către un punct de afix x de pe segmentul (α, β) găsim

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} - \frac{1}{\pi\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} \int_a^\beta \frac{g(\xi)\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}}{x-\xi} d\xi \quad (8)$$

$\varphi(x) = u(x, 0)$ este soluția ecuației integrale (4). Constanta C este

$$C = \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \varphi(x) dx$$

Se poate verifica acest rezultat integrând termen cu termen relația (8) și ținând seama de rezultatele lui G. Bertrand²⁴) asupra intervertirii integralelor cu valori principale precum și de formulele

$$\int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \pi \quad \text{și} \quad \int_a^\beta \frac{dx}{(x-\xi)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 0 \quad \alpha < \xi < \beta \quad (9)$$

Mai putem da soluției (7) și altă formă luând ca funcție auxiliară

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}} & \text{cu determinările} \\ -\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} & \text{în intervalul } (-\infty, \alpha) \\ -\frac{i}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} & \text{pe segmentul } (\alpha, \beta) \\ \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} & \text{în intervalul } (\beta, +\infty) \end{array}$$

Găsim pentru $F(z)$ folosind câtul $\frac{F(z)}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}$ expresia

$$F(z) = \frac{i\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}{\pi} \int_a^\beta \frac{g(\xi)d\xi}{(z-\xi)\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}} \quad (10)$$

Soluția (10) nu e nulă la infinit. Pentru a îndeplini și această condiție îi adăogăm termenul

$$i \frac{C_1 - C_2 z}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}} \quad (C_1 \text{ și } C_2 \text{ constante reale),}$$

care are proprietatea că verifică aceleași condiții la limită și determinăm pe C_2 astfel ca să îndeplinească și această condiție.

Vom găsi

²⁴ G. Bertrand, *Annales Sc. l'Ecole Normale Sup.* t. 58. 1923, p. 205.

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \frac{g(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}}$$

În acest caz soluțiile (10) și (7) sunt identice. Între constante există relația

$$C_1 = C_2 + \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \frac{(\xi-\alpha-\beta)g(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}} \quad (11)$$

Revenind acum la mișcarea fluidă considerată constatăm că ecuația integrală a mișcării (2), care ne va da densitatea vârtejurilor este de aceeași formă cu ecuația integrală (4) dela problema mixtă a cărei soluție am găsit-o.

Din identificare scoatem

$$M(u) = \varphi(u); \quad \omega u^{\frac{2-n}{n}} = g(u) \quad \alpha = a^n \quad \beta = b^n$$

și ținând seama de (8)

$$M(u) = \frac{C}{\sqrt{(u-a^n)(b^n-u)}} - \frac{\omega}{\pi \sqrt{(u-a^n)(b^n-u)}} \int_a^{b^n} \frac{\sqrt{(v-a^n)(b^n-v)} dv}{(v-u)^{\frac{n-2}{n}}} \quad (12)$$

unde

$$M(u) = m \left(\sqrt[n]{u} \right) u^{\frac{1-n}{n}},$$

$\frac{m(u)}{\pi}$ fiind densitatea unui vârtej plasat la distanța u de axa de rotație.

Expresia $\frac{\sqrt{(v-a^n)(b^n-v)}}{v^{\frac{n-2}{n}}}$ este continuă și hõlderiană în intervalul (a^n, b^n) .

Valoarea principală a integralei în sensul lui Cauchy există și deci integrala are sens.

3. Calcularea densității vârtejurilor în cazul unui număr mic de aripioare. În aceste calcule intervin integrale de forma

$$I_n = \int_a^b \frac{x^n dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad \text{și} \quad J_n = \int_a^b \frac{x^n dx}{(u-x)\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad a < u < b$$

Pentru calcularea lui I_n folosim fie substituția $x = a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi$ fie metoda reziduurilor și găsim

$$I_0 = \pi; \quad I_1 = \frac{a+b}{2} \pi; \quad I_2 = \frac{3a^2+2ab+3b^2}{8} \pi$$

$$J_3 = \frac{(a+b)(5a^2+5b^2-2ab)\pi}{16} \quad (14)$$

Pentru calcularea lui J_n putem folosi metoda reziduurilor. Din relația

$$\frac{\pi}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} = \int_a^b \frac{d\xi}{(\xi-z)\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}}$$

făcând pe z să tindă către un punct de afix x de pe segmentul (α, β) găsim pe (9).

$$J_0 = 0.$$

Ținând seama de aceasta se obține succesiv

$$J_1 = -\pi; \quad J_2 = -\pi u - \frac{\pi(a+b)}{2}; \quad J_3 = -\pi u^2 - \frac{\pi u}{2}(a+b) - \frac{\pi}{8}(3a^2+2ab+3b^2)$$

$$J_4 = -\pi u^3 - \frac{\pi}{2} u^2(a+b) - \frac{\pi}{8}(3a^2+2ab+3b^2)u - \frac{\pi}{16}(5a^2+2ab+5b^2) \quad (15)$$

Având aceste integrale putem găsi densitățile vârtejurilor pentru numere mici de aripioare.

Pentru o singură aripioară avem

$$m_1 = \frac{C}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} - \frac{\omega}{8} \frac{8x^2-4(a+b)x-(a-b)^2}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

Pentru două aripioare

$$m_2 = xM_2 = \frac{Cx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} - \frac{\omega x(2x^2-a^2-b^2)}{2\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \quad (16)$$

Pentru 4 aripioare

$$m_4 = \frac{Cx^3}{\sqrt{(x^4-a^4)(b^4-x^4)}} - \frac{\omega x^3}{\pi \sqrt{(x^4-a^4)(b^4-x^4)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(a^4-v)(v-b^4)} dv}{v^{\frac{1}{2}} x^4-v}$$

În cazul când aripioarele se întind până în origine, funcția de sub semnul integrală rămâne integrabilă așa că și în acest caz putem calcula densitățile vârtejurilor și găsim pentru

$$n=1 \quad m_1 = \frac{C}{\sqrt{x(b-x)}} - \frac{\omega}{8} \frac{8x^2-4bx-b^2}{\sqrt{x(b-x)}}$$

$$n=2 \quad m_2 = \frac{C}{\sqrt{b^2-x^2}} - \frac{\omega}{2} \frac{2x^2-b^2}{\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$n=4 \quad m_4 = -\frac{\omega x}{\pi \sqrt{b^4-x^4}} \left(2b^2 + \sqrt{b^4-x^4} \log \frac{b^2-\sqrt{b^4-x^4}}{b^2+\sqrt{b^4-x^4}} \right) + \frac{Cx}{\sqrt{b^4-x^4}}$$

Densitățile vârtejurilor sunt infinite la capetele aripioarelor. Cum

dispunem de o constantă arbitrară, putem să o determinăm astfel ca la capetele B_n să avem densitate nulă. În acest caz obținem pentru constanta C valoarea

$$C = \frac{\omega}{\pi} \int_{a^n}^{b^n} \frac{\sqrt{(v-a^n)(b^n-v)}}{v^{\frac{n-2}{n}} (b^n-v)} dv \quad (18)$$

iar pentru densități în cazurile unui număr mic de aripioare avem

$$m_1 = -\frac{\omega}{2} \frac{2x^2 - bx - b^2}{\sqrt{x(b-x)}}; \quad m_2 = -\frac{\omega}{2} \sqrt{x^2 - b^2}; \quad m_4 = -\frac{\omega x}{\pi} \log \frac{b^2 - \sqrt{b^4 - x^4}}{b^2 + \sqrt{b^4 - x^4}} \quad (18')$$

Aceste rezultate au fost găsite și de Kucharski în lucrarea citată. D-sa, folosind metoda dezvoltării în serie, nu a putut trata problema în general într'un singur fel, ci a distins două cazuri, unul pentru $n \leq 4$ și celălalt pentru $n > 4$. În studiul nostru se vede că nu există o distincție teoretică între aceste cazuri. În cazul când $a \rightarrow 0$, funcția de sub semnul integrală devine infinită în origine, rămânând totuși patratice integrabilă și integrala admitând valoarea principală în sensul lui Cauchy.

4. Determinarea vitezei complexe. Am văzut că viteza complexă a n vârtejuri plasate pe cele n aripioare la distanța $|\xi|$ de origine are expresia

$$\frac{f_1}{dz} = \frac{m}{\pi i} \frac{nz^{n-1}}{z^n - \xi^n}$$

Viteza datorită tuturor vârtejurilor ce acopăr aripioarele este

$$w = \frac{nz^{n-1}}{\pi i} \int_a^b \frac{m(\xi) d\xi}{z^n - \xi^n}$$

Făcând schimbările de variabile $\xi^n = u$, $z^n = \zeta$ și punând

$$\alpha = a^n, \beta = b^n; \quad M(u) = m \left(\sqrt[n]{u} \right) u^{\frac{1-n}{n}}$$

forma vitezei devine

$$w = \frac{\zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi i} \int_a^\beta \frac{M(u) du}{\zeta - u} \quad (19)$$

$M(u)$ fiind soluția ecuației integrale (2) este dat de relația (12), așa că expresia vitezei complexe este

$$w = \frac{\zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi i} \int_a^\beta \frac{C du}{(\zeta - u) \sqrt{(u - \alpha)(\beta - u)}} - \frac{\omega \zeta^{\frac{n-1}{n}}}{i \pi^2} \int_a^\beta \frac{du}{(\zeta - u) \sqrt{(u - \alpha)(\beta - u)}} \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v - \alpha)(\beta - v)}}{v^{\frac{n-2}{n}} (u - v)} dv \quad (20)$$

Neajunsul acestei formule constă în faptul că termenul al doilea prezintă două integrale succesive dintre care una este luată în valoare principală. Potrivit unor teoreme stabilite de G. Bertrand și Z. Eichler (25) asupra intervertirii ordinei de integrare la integrale cu valori principale, putem aduce expresia vitezei să conțină numai o singură integrală obișnuită.

Intr'adevăr putem scrie

$$\int_a^\beta \frac{du}{(\zeta - u) \sqrt{(u - \alpha)(\beta - u)}} \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v - \alpha)(\beta - v)}}{v^{\frac{n-2}{n}} (u - v)} dv = \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v - \alpha)(\beta - v)}}{v^{\frac{n-2}{n}}} \int_a^\beta \frac{du}{(\zeta - u) (u - v) \sqrt{(u - \alpha)(\beta - v)}}$$

și se verifică ușor că

$$\int_a^\beta \frac{du}{(\zeta - u) \sqrt{(u - \alpha)(\beta - u)}} = \frac{-\pi}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} \quad \text{și}$$

$$\int_a^\beta \frac{du}{(\zeta - u) (u - v) \sqrt{(u - \alpha)(\beta - u)}} = \frac{1}{\zeta - v} \int_a^\beta \frac{du}{(\zeta - u) \sqrt{(u - \alpha)(\beta - u)}} = \frac{1}{v - \zeta} \frac{\pi}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} \quad (21)$$

În modul acesta obținem formula finală a vitezei complexe ce nu mai conține integrală cu valoare principală.

$$w = \frac{Ci \zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} + \frac{\omega i}{\pi} \frac{\zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v - \alpha)(\beta - v)}}{v^{\frac{n-2}{n}} (v - \zeta)} dv \quad (22)$$

Revenind la variabila z vom pune $\zeta = z^n$, $\alpha = a^n$, $\beta = b^n$ și găsim

$$w = \frac{Ci z^{n-1}}{\sqrt{(z^n - a^n)(z^n - b^n)}} + \frac{\omega i}{\pi} \frac{z^{n-1}}{\sqrt{(z^n - a^n)(z^n - b^n)}} \int_{a^n}^{b^n} \frac{\sqrt{(v - a^n)(b^n - v)}}{v^{\frac{n-2}{n}}} \cdot \frac{dv}{v - z^n} \quad (23)$$

Pentru a stabili vitezele în cazul unor numere mici de aripioare, prin calcule simple vom efectua câteva integrale de forma

$$Y_n = \int_a^x \frac{x^n dx}{(x - z) \sqrt{(x - a)(b - x)}}$$

Se găsește

²⁵ M. Eichler, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 48. p. 503.

$$Y_0 = \frac{\pi}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}; Y_1 = \frac{\pi z}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \pi; Y_2 = \frac{\pi z^2}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \pi \left(z + \frac{a+b}{2} \right) \\ Y_3 = \frac{\pi z^3}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \pi \left(z^2 + \frac{a+b}{2} z + \frac{3a^2+2ab+3b^2}{8} \right) \quad (24)$$

și de aici vitezele pentru $n=1, 2, 4$

$$w_1 = \frac{iC}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \omega i \left[z + \frac{z^2 - \frac{a+b}{2}z - \frac{(a-b)^2}{8}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \right] \\ w_2 = \frac{iCz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} - \omega i \left[z + \frac{z \left(z^2 - \frac{a^2+b^2}{2} \right)}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} \right] \quad (25)$$

și în cazul particular $a=0$

$$w_4 = \frac{2\omega i}{\pi} \left[\frac{b^2 z}{\sqrt{z^4-b^4}} - z \operatorname{arctg} \frac{b^2}{\sqrt{z^4-b^4}} \right] + \frac{iCz}{\sqrt{z^4-b^4}}$$

Vitezele astfel calculate coincid cu vitezele mișcării ciclice găsite de C. Iacob, iar când $C=0$ cu cele ale mișcării aciclice. Și aici ca și în cazul densității vârtejurilor, la capetele segmentelor vitezele devin infinite, situație inacceptabilă din punct de vedere fizic. Putem dispune de constanta C astfel ca vitezele să fie finite la extremitățile B_n .

Valoarea determinată pentru C astfel este

$$C = -\frac{\omega}{\pi} \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v-\alpha)(v-\beta)} dv}{v^{\frac{n-2}{n}}(v-\beta)} \quad (26)$$

ea fiind identică cu (18) pentru care se anulează densitatea la extremitățile exterioare, cum era de așteptat.

În acest caz viteza complexă ia forma

$$w^* = -\frac{\omega i \zeta^{\frac{n-1}{n}} (\beta-\zeta)}{\pi \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}} \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v-\alpha)(v-\beta)} dv}{v^{\frac{n-2}{n}}(v-\beta)(v-\zeta)} \quad (27)$$

În cazurile simple considerate avem vitezele complexe

$$w_1^* = -\omega i z - \frac{\omega i \left(z^2 - \frac{a+b}{2} z + \frac{b(a-b)}{2} \right)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \\ w_2^* = -\omega i z + \frac{\omega i z (b^2 - z^2)}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}$$

$$w_4^* = -\frac{2\omega i z}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b^2}{\sqrt{z^4-b^4}} \quad (a=0) \quad (23)$$

Punctele de viteză relativă nulă coincid cu capetele B_n ale aripioarelor.

5. Determinarea potențialului complex. $f(z, t)$ fiind potențialul complex al mișcării, $\frac{df}{dz}$ este viteza complexă; dar

$$w = \frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{df}{d\zeta} n z^{n-1} \quad \text{căci } \zeta = z^n$$

Din (23) deducem

$$n \frac{df}{d\zeta} = \frac{Ci}{\pi \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}} + \frac{\omega i}{\pi \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}} \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)} dv}{v^{\frac{n-2}{n}}(v-\zeta)} \quad (29)$$

Punând

$$U = \frac{\sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)}}{v-\zeta} \quad dV = v^{\frac{n-2}{n}} dv$$

și integrând prin părți se poate verifica identitatea

$$\int_a^\beta \frac{\sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)} dv}{v^{\frac{n-2}{n}}(v-\zeta)} = -\frac{n}{\pi} \int_a^\beta \frac{v^{\frac{2}{n}} [2v\zeta - (\alpha+\beta)v + 2\alpha\beta] dv}{(v-\zeta)^2 \sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)}}$$

pe care înlocuind-o în (29) obținem

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{Ci}{\pi n \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}} + \frac{\omega i}{4\pi \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}} \int_a^\beta \frac{v^{\frac{2}{n}} [2v\zeta - (\alpha+\beta)v + 2\alpha\beta] dv}{(v-\zeta)^2 \sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)}} \quad (30)$$

Constanta de integrare fiind aditivă, n'are nici o importanță în mișcare, așa că o luăm nulă.

Revenind la variabila z și punând $\frac{C}{2n} = C_1$, regăsim expresia potențialului complex al mișcării ciclice din lucrarea citată a Prof. C. Iacob.

$$f(z, t) = C_1 i \log [\sqrt{(z^n-a^n)} + \sqrt{(z^n-b^n)}] - \frac{\omega i}{2\pi} \sqrt{(z^n-a^n)(z^n-b^n)} \int_a^{b^n} \frac{nx^{n+1} dx}{(x^n-a^n)\sqrt{(x^n-a^n)(b^n-x^n)}} \quad (31)$$

Odată cunoscut potențialul complex al mișcării fluide se pot calcula cu ușurință celelalte elemente ale mișcării: energia cinetică, acțiunea hidrodinamică și momentul hidrodinamic, probleme studiate atât de V. Vâlcovici cât și de C. Iacob.

În cazurile $n=1, 2$ și 4 avem

$$f_1 = \frac{Ci}{2} \log [\sqrt{z-a} + \sqrt{z-b}] - \frac{\omega i}{2} \left[z^2 + \left(z + \frac{a+b}{2} \right) \sqrt{(z-a)(z-b)} \right]$$

$$f_2 = \frac{Ci}{4} \log [\sqrt{z^2-a^2} + \sqrt{z^2-b^2}] - \frac{\omega i}{2} [z^2 + \sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}] \quad (32)$$

și

$$f_4 = \frac{Ci}{8} \log [z^2 + \sqrt{z^4-b^4}] + \frac{i\omega z^2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b^2}{\sqrt{z^4-b^4}}$$

cu

$$a = 0.$$

CAPITOLUL III.

MIȘCAREA APARATULUI ROTATIV ÎN FLUIDUL LIMITAT.

1. Rezolvarea unei probleme mixte. Înainte de a trece la găsirea ecuației integrale a mișcării, vom rezolva o problemă mixtă care generalizează pe cea tratată de Prof. C. Iacob²⁶) în legătură cu ecuația integrală (2), și conduce la o ecuație integrală analoagă.

Vom determina o funcție de variabilă complexă $F(z) = \varphi + i\psi$ olomorfa în interiorul unui semicerc de rază R , cu centrul în originea axelor de coordonate și cu diametrul pe axa reală Ox care să îndeplinească următoarele condiții la limită:

$\varphi = 0$ pe semicercul DCE și pe segmentele EA și BD; iar partea imaginară să se reducă la o funcție dată pe segmentul AB.

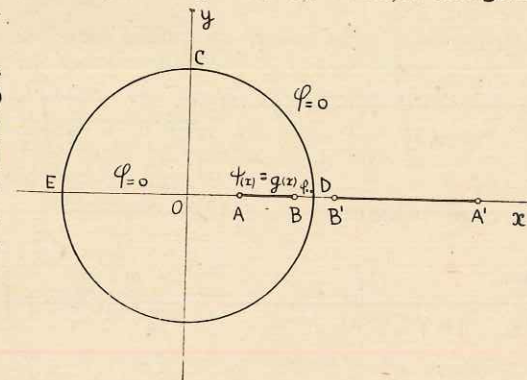


Fig. 3.

În virtutea acestor condiții $F(z)$ se poate prelunge prin simetrie în semicercul inferior, problema luând forma următoare:

Să se determine o funcție $F(z)$ olomorfa în interiorul cercului afară de segmentul AB, a cărei parte reală să fie nulă pe cerc, iar partea imaginară să se reducă la o funcție dată pe segmentul AB.

Acesta e un caz particular al problemei lui Dirichlet generalizate, studiată de Prof. H. Villat²⁷) și C. Iacob pentru domenii multiplu conexe, despre care se știe că are o soluție unică mărginită și uniformă în cazul domeniilor dublu conexe, cum este cazul nostru.

Pentru determinarea ei vom observa că $F(z)$, având partea reală nulă

²⁶ C. Iacob, citat la Nr. 8.

²⁷ H. Villat, citat la Nr. 23.

pe semicercul superior, se poate prelunge în virtutea principiului lui Schwartz, prin simetrie față de cerc în semiplanul superior $y > 0$, luând în punctele simetrice valorile $\varphi = -\varphi_1$ și $\psi = \psi_1$ și deci pe segmentele AB și A'B' simetricul lui AB față de cerc

$$\varphi_1(x') = -\varphi(x); \quad g_1(x') = g(x) \quad \text{unde } x' = \frac{R^2}{x}$$

În acest caz avem o problemă mixtă pentru semiplanul superior. Știm că această problemă are o soluție unică mărginită și uniformă. Putem presupune că soluția noastră este nulă la infinit și deci și în origine; pentru aceasta vom renunța la condiția ca funcția căutată să fie mărginită la capetele segmentului AB. Adăugirea unui termen de forma

$$\frac{i}{\pi} \frac{C_1 + C_2 z + C_3 z^2}{\sqrt{h(z)}}$$

unde C_1 , C_2 și C_3 sunt constante reale, permite realizarea acestei condiții.

Să presupunem că valoarea lui φ pe AB este $f(x)$ iar pe A'B' $f_1(x')$ pe care considerându-le pentru un moment date $F(z)$ e dat de formula (3)

$$F(z) = \frac{i}{\pi} \int_a^b \frac{f(\xi) d\xi}{z-\xi} + \frac{i}{\pi} \int_{b'}^{a'} \frac{f_1(\xi') d\xi'}{z-\xi'} + iK \quad (33)$$

unde constanta K trebuie luată egală cu zero. Făcând în integrala a doua schimbarea de variabilă $\xi' = \frac{R^2}{\xi}$ găsim

$$F(z) = \frac{i}{\pi} \int_a^b \frac{z f(\xi) (\xi^2 - R^2) d\xi}{\xi (z-\xi) (z\xi - R^2)} \quad (34')$$

În virtutea rezultatelor invocate ale matematicienilor P. Fatou și J. Priwaloff²⁹) suntem conduși la relația

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{x f(\xi) (\xi^2 - R^2) d\xi}{(x-\xi)(x\xi - R^2)} \quad a < x < b \quad (34)$$

care este ecuația integrală ce determină pe $f(x)$ când cunoaștem pe $g(x)$. Ea are aceleași caractere ca și ecuația integrală (2').

Problema noastră pentru semiplanul superior e următoarea:

Să se determine o funcție de variabilă complexă $F(z) = \varphi + i\psi$ olomorfa în semiplanul superior și pe axa reală afară de segmentele AB și A'B', nulă la infinit și care să îndeplinească pe axa reală condițiile la

²⁹ Citați la Nr. 21 și 22.

limită:

$\varphi = 0$ în intervalele $(-\infty, a)$; (b, b') ; $(a', +\infty)$

$\psi = g(x)$ continuă și hălderiană pe AB și $\psi = g_1(x')$ pe $A'B'$ cu relațiile

$$g(x) = g_1(x'); \quad a' = \frac{R^2}{a}; \quad b' = \frac{R^2}{b}, \quad x' = \frac{R}{x}.$$

Pentru rezolvarea ei procedăm în mod analog cu cazul anterior. Luăm o funcție auxiliară $h(z) = (z-a)(z-b)(z-a')(z-b')$ și considerăm ramura $\sqrt{h(z)}$ care are determinările

$\sqrt{h(x)}$	în intervalul	$(-\infty, a)$
$-i\sqrt{ h(x) }$	" "	(a, b)
$-\sqrt{h(x)}$	" "	(b, b')
$i\sqrt{ h(x) }$	" "	(b', a')
$\sqrt{h(x)}$	" "	$(a', +\infty)$

Folosind artificii lui Signorini avem pentru semiplanul superior de determinat funcția $\frac{F(z)}{\sqrt{h(z)}}$ olomorfă în semiplanul superior și pe axa reală afară de segmentele AB , $A'B'$, nulă la infinit îndeplinind pe axa reală condițiile:

Partea reală e nulă în intervale (∞, a) ; (b, b') și $(a', +\infty)$ iar pe segmentul AB egală cu

$$\frac{-g(x)}{\sqrt{|h(x)|}} \text{ și pe } A'B' \text{ cu } \frac{g_1(x')}{\sqrt{|h(x')|}}.$$

Formula (3) ne dă și în acest caz soluția

$$\frac{F(z)}{\sqrt{h(z)}} = -\frac{i}{\pi} \int_a^b \frac{g(\xi) d\xi}{(z-\xi)\sqrt{|h(\xi)|}} + \frac{i}{\pi} \int_{b'}^{a'} \frac{g_1(\xi') d\xi'}{(z-\xi')\sqrt{|h(\xi')|}} \quad (36)$$

sau

$$\frac{F(z)}{\sqrt{h(z)}} = -\frac{i}{\pi} \int_a^b \frac{g(\xi)(\xi^2 - R^2) d\xi}{(z-\xi)(z\xi - R^2)\sqrt{|h(\xi)|}}$$

Această soluție nu e nulă la infinit. Pentru a îndeplini această condiție îi adăugăm expresia

$$E(z) = \frac{i}{\pi} \frac{C_1 + C_2 z + C_3 z^2}{\sqrt{h(z)}} \quad (37)$$

C_1 , C_2 și C_3 fiind constante reale astfel determinate ca să îndeplinească condiția la limită

$$\Phi(\xi) = -\Phi\left(\frac{R^2}{\xi}\right) \text{ pe segmentele } AB \text{ și } A'B'$$

$\Phi(\xi)$ fiind partea reală a expresiei (37) și să nu modifice condițiile (35). Se găsește

$$C_1 = R^2 C_3 \quad (38)$$

Alegând pe C_3 astfel ca să avem o soluție nulă la infinit obținem

$$C_3 = \int_a^b \frac{g(\xi)(\xi^2 - R^2) d\xi}{\xi \sqrt{|h(\xi)|}} \quad (39)$$

În acest caz soluția

$$F_0(z) = F(z) + E(z)$$

îndeplinește condițiile la limită ale problemei și are forma

$$F_0(z) = -\frac{i\sqrt{h(z)}}{\pi} \int_a^b \frac{g(\xi)(\xi^2 - R^2) d\xi}{(z-\xi)(z\xi - R^2)\sqrt{|h(\xi)|}} + \frac{i}{\pi} \frac{C_1 + C_2 z + C_3 z^2}{\sqrt{h(z)}} \quad (40)$$

Ținând seama de rezultatele (38) și (39) expresia (40) devine

$$F_0(z) = -\frac{i}{\pi} \int_a^b \frac{g(\xi)(\xi^2 - R^2)[\xi h(z) - (R^2 + z^2)(z-\xi)(z\xi - R^2)] d\xi}{\xi \sqrt{|h(\xi)|} \sqrt{h(z)} (z-\xi)(z\xi - R^2)} + \frac{i C_3 z}{\pi \sqrt{h(z)}} \quad (41)$$

C fiind o constantă arbitrară.

Am fi putut proceda și altfel. Dacă am fi considerat produsul $F(z)\sqrt{h(z)}$, am fi fost iarăși conduși la o funcțiune olomorfă în semiplanul superior, pentru care partea reală este cunoscută pe Ox . Dar pentru a putea aplica formula (3) trebuie să presupunem că $F(z)$ la mari distanțe e dezvoltabilă în serie de forma

$$F(z) = \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots$$

și obținem

$$F(z)\sqrt{h(z)} = \frac{i}{\pi} \int_a^b \frac{g(\xi)\sqrt{h(\xi)}}{z-\xi} d\xi - \frac{i}{\pi} \int_{b'}^{a'} \frac{g_1(\xi')\sqrt{|h(\xi')|}}{z-\xi'} d\xi' + ik$$

sau aducând la o singură integrală prin schimbarea de variabilă $\xi' = \frac{R^2}{\xi}$

$$F(z) = \frac{i}{\pi \sqrt{h(z)}} \int_a^b \frac{g(\xi)\sqrt{|h(\xi)|}(z\xi^2 + R^2 - \xi R^2)(\xi - R^2)}{\xi^2(z-\xi)(z\xi - R^2)} d\xi + \frac{ik}{\pi \sqrt{h(z)}} \quad (42)$$

Aceasta soluție are reziduul la infinit nul și pentru a obține o soluție cu reziduul punctului dela infinit diferit de zero adăugăm expresiei termenul

$$\frac{i A z}{\pi \sqrt{h(z)}} \quad (43)$$

care nu modifică condițiile la limită (35).
Noua soluție

$$F_1(z) = F(z) + \frac{i A z}{\pi \sqrt{h(z)}}$$

trebuind să îndeplinească condițiile (35) se găsește pentru K valoarea

$$K = \int_a^b \frac{g(\xi) \sqrt{|h(\xi)|} (\xi^2 - R^2) d\xi}{\xi^3}$$

și în acest caz

$$F_1(z) = \frac{i z^2}{\pi \sqrt{h(z)}} \int_a^b \frac{g(\xi) (\xi^2 - R^2) \sqrt{|h(\xi)|}}{\xi^2 (z - \xi) (\xi^2 - R^2)} d\xi + \frac{i A z}{\pi \sqrt{h(z)}} \quad (44)$$

Soluțiile (41) și (43), în aparență par diferite, să arătăm că ele sunt identice dacă între constante e o anumită relație.

Punând în evidență termenul comun soluțiilor F_0 și F_1 , $F_0(z)$ se poate scrie

$$F_0 = \frac{i z^2}{\pi \sqrt{h(z)}} \int_a^b \frac{g(\xi) (\xi^2 - R^2) \sqrt{|h(\xi)|} d\xi}{\xi^2 (z - \xi) (\xi^2 - R^2)} +$$

$$- \frac{i}{\pi} \int \frac{g(\xi) (\xi^2 - R^2) [z^2 \xi h(\xi) + \xi^3 h(z) - \xi^2 (R^2 + z^2) (-\xi) (\xi^2 - R^2)]}{\xi^3 \sqrt{h(z)} \sqrt{|h(\xi)|} (z - \xi) (\xi^2 - R^2)} d\xi + \frac{i C z}{\sqrt{h(z)}} \quad (45)$$

Se poate verifica ușor identitatea

$$z^2 \xi |h(\xi)| + \xi^3 h(z) = (z - \xi) (\xi^2 - R^2) \left\{ z^2 \xi^2 + z \xi \left[R^2 + \xi^2 - (a + b) \xi - \frac{R^2(a + b)}{a b} \xi \right] + R^2 \xi^2 \right\}$$

unde

$$h(z) = (z - a)(z - b) \left(z - \frac{R^2}{a} \right) \left(z - \frac{R^2}{b} \right)$$

$$|h(\xi)| = (\xi - a)(\xi - b) \left(\xi - \frac{R^2}{a} \right) \left(\xi - \frac{R^2}{b} \right)$$

În acest caz relația (45) devine

$$F_0(z) = \frac{i z^2}{\pi \sqrt{h(z)}} \int_a^b \frac{g(\xi) (\xi^2 - R^2) \sqrt{|h(\xi)|} d\xi}{\xi^2 (z - \xi) (\xi^2 - R^2)} +$$

$$- \frac{i z}{\pi \sqrt{h(z)}} \int_a^b \frac{g(\xi) (\xi^2 - R^2) \left[R^2 + \xi^2 - (a + b) \xi - \frac{R^2(a + b)}{a b} \xi \right] d\xi}{\xi^2 \sqrt{|h(\xi)|}} + \frac{i C z}{\pi \sqrt{h(z)}} \quad (46)$$

De aici se vede imediat că $F_0(z)$ și $F_1(z)$ sunt identice dacă între constante există relația

$$A = C + \int_a^b \frac{g(\xi) (R^2 - \xi^2) \left[R^2 + \xi^2 - (a + b) \xi^2 - \frac{R^2(a + b)}{a b} \xi \right] d\xi}{\xi^2 \sqrt{|h(\xi)|}} \quad (47)$$

Făcând pe z să tindă către un punct de afix x de pe segmentul AB în (44) vom găsi

$$f(z) = - \frac{x^2}{\pi \sqrt{|h(x)|}} \int_a^b \frac{g(\xi) (\xi^2 - R^2) \sqrt{|h(\xi)|} d\xi}{\xi^2 (x - \xi) (\xi^2 - R^2)} - \frac{A x}{\pi \sqrt{|h(x)|}} \quad (48)$$

iar din (41) obținem

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{|h(x)|}} \int_a^b \frac{g(\xi) (\xi^2 - R^2) [\xi h(x) - (x^2 + R^2) (x - \xi) (\xi^2 - R^2)]}{\xi (x - \xi) (\xi^2 - R^2) \sqrt{|h(\xi)|}} d\xi$$

$$- \frac{C x}{\pi \sqrt{|h(x)|}}$$

2. Ecuația integrală a mișcării. După cum am văzut în introducere, în această ultimă parte vom presupune aparatul rotativ așezat într'un fluid, limitat lateral de un cilindru de revoluție, având ca axă de revoluție, axa aparatului rotativ. Figura alăturată reprezintă secțiunea dreaptă în cilindru, C_0 fiind urma cilindrului, iar $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots$ și $A_n B_n$ urmele aripioarelor. Ipotezele în care se face mișcarea sunt cele enumerate în introducere: fluidul perfect și incompresibil, iar mișcarea plană și irotatională

Considerăm la început cazul unei aripioare și plasăm în punctul M de abscisă ξ un vârtej fictiv de densitate $\frac{m}{\pi}$. Mișcarea fluidă născută de acest vârtej va avea cercul C_0 ca linie de curent. Se știe că prin introducerea în punctul M', simetricul lui M în raport cu cercul C_0 a unui vârtej de densitate

— $\frac{m}{\pi}$ revenim la mișcarea în fluidul nelimitat, C_0 rămânând linie de curent.

Potențialul complex al mișcării fluide generate de aceste două vârtejuri este

$$f_1(z) = \frac{m}{\pi i} \log \frac{z - \xi}{z - \frac{R^2}{\xi}}$$

iar viteza complexă

$$\frac{df_1}{dz} = \frac{m}{\pi i} \left[\frac{1}{z - \xi} - \frac{1}{z - \frac{R^2}{\xi}} \right]$$

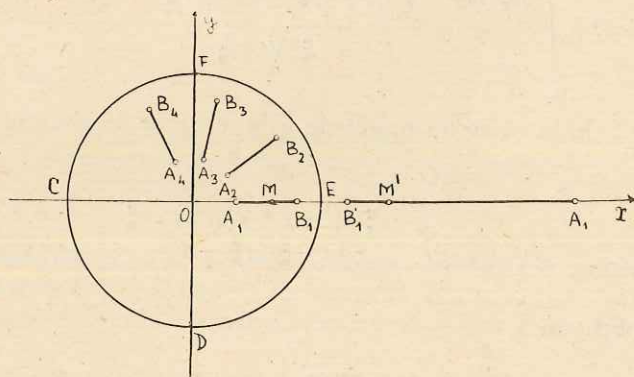


Fig. 4.

Componenta vitezei pe normala la segmentul AB are expresia

$$V_n = \frac{m}{\pi} \left[\frac{1}{x - \xi} - \frac{1}{x - \frac{R^2}{\xi}} \right]$$

Să așezăm pe segmentul AB un strat de vârtejuri de densitate $\frac{m(\xi)d\xi}{\pi}$. Ele vor avea contribuția de viteză

$$V_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b m(\xi) \left[\frac{1}{x - \xi} - \frac{1}{x - \frac{R^2}{\xi}} \right] d\xi \quad (50)$$

În mișcarea reală a aripioarei în fluidul din interiorul cercului C_0 , cercul C_0 este linie de curent, iar aripioara AB este linie relativă de curent. Viteza normală a unei molecule de fluid depe aripioară este egală

cu viteza punctului depe aripioară cu care coincide în acel moment.

$$w_n = \omega x$$

Condiția la limită

$$V_n = w_n = \omega x \quad (50')$$

conduce, cazul unei singure aripioare, la ecuația integrală

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{m(\xi)(\xi^2 - R^2)d\xi}{(x - \xi)(x\xi - R^2)} = \omega x \quad a < \xi < b \quad (51)$$

În cazul a n aripioare avem potențialul complex și vitezele complexe

$$f_1 = \frac{m}{\pi i} \log \frac{z^n - \xi^n}{z^n - \frac{R^{2n}}{\xi^n}};$$

$$\frac{df_1}{dz} = \frac{nz^{n-1}}{\pi i} \left[\frac{1}{z^n - \xi^n} - \frac{\xi^n}{z^n \xi^n - R^{2n}} \right] m$$

$$V_n = \frac{nx^{n-1}}{\pi} \left[\frac{1}{x^n - \xi^n} - \frac{\xi^n}{x \xi^n - R^{2n}} \right] m$$

Viteza normală la aripioare, născută din contribuția tuturor vârtejurilor plasate pe aripioare este

$$V_n = \frac{nx^{n-1}}{\pi} \int_a^b \left(\frac{1}{x^n - \xi^n} - \frac{\xi^n}{x \xi^n - R^{2n}} \right) m(\xi) d\xi$$

Ținând seama de condiția la limită (50'), găsim ecuația integrală a moderatorului cu n aripioare în fluidul limitat lateral de un cilindru de revoluție

$$\frac{nx^{n-1}}{\pi} \int_a^b \left(\frac{1}{x^n - \xi^n} - \frac{\xi^n}{x \xi^n - R^{2n}} \right) m(\xi) d\xi = \omega x$$

care se reduce la ecuația (51) în cazul lui $n = 1$.

Făcând schimbarea de variabilă

$$x^n = v \quad \xi^n = u$$

și punând

$$a^n = \alpha, \quad b^n = \beta \quad M(u) = m (\sqrt[n]{u}) u^{\frac{1-n}{n}}$$

ecuația integrală ia forma

$$\frac{1}{\pi} \int_a^\beta \frac{(u^2 - R^{2n}) M(u) du}{(v-u)(vu - R^{2n})} = \omega v^{\frac{2-n}{n}} \quad (53)$$

analoagă cu (34) a cărei soluție am aflat-o.

Prin identificare găsim

$$M(u) = \frac{f(u)}{u}; \quad \omega v^{\frac{2-n}{n}} = \frac{g(v)}{v}$$

și de aici folosind soluțiile (48) și (49) al ecuației integrale (34), găsim pentru ecuația integrală (53) soluția sub una din formele

$$M(u) = - \frac{\omega u}{\pi \sqrt{|h(u)|}} \int_a^\beta \frac{(v^2 - R^{2n}) v^{\frac{2}{n}} \sqrt{|h(v)|} dv}{v^2(u-v)(uv - R^{2n})} - \frac{A}{\pi \sqrt{|h(u)|}}$$

sau

$$M(u) = \frac{\omega}{\pi u \sqrt{|h(u)|}} \int_a^\beta \frac{(v^2 - R^{2n}) v^{\frac{2}{n}} [vh(u) - (u^2 + R^{2n})(u-v)(uv - R^{2n})] dv}{v \sqrt{|h(v)|} (u-v)(uv - R^{2n})} + \frac{C}{\pi \sqrt{|h(u)|}}$$

care sunt identice căci între constante există relația (47).

Luând soluția sub forma a doua cu $C = R^{2n} C_1$, avem pentru cazul unui număr mic de aripioare, densitățile particulare, pentru $n = 1$.

$$m_1 = \frac{\omega}{\pi x \sqrt{|h(x)|}} \int_a^b \frac{(v^2 - R^2) v [vh(x) - (x^2 + R^2)(x-v)(xv - R^2)] dv}{\sqrt{|h(v)|} (x-v)(xv - R^2)} + \frac{R^2 C_1}{\pi \sqrt{|h(x)|}}$$

pentru $n=2$

$$m_2 = \frac{\omega}{\pi x \sqrt{|h(x^2)|}} \int_a^{b^2} \frac{(v^2 - R^4) [vh(x^2) - (x^4 + R^4)(x^2-v)(x^2v - R^4)] dv}{\sqrt{|h(v)|} (x^2-v)(x^2v - R^4)} + \frac{R^4 C_1 x}{\pi \sqrt{|h(x^2)|}} \quad (55)$$

pentru $n=4$

$$4 = \frac{\omega}{\pi x \sqrt{|h(x^4)|}} \int_a^{b^4} \frac{(v^2 - R^8) [vh(x^4) - (x^8 + R^8)(x^4-v)(x^4v - R^8)] dv}{v^2(x^4-v)(x^4v - R^8) \sqrt{|h(v)|}} + \frac{R^8 C_1 x^3}{\pi \sqrt{|h(x^4)|}}$$

Făcând raza cilindrului să tindă către infinit regăsim densitățile vârtejurilor din cazul fluidului nelimitat

$$M(u) = \frac{\omega}{\pi \sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}} \left[C_1 \sqrt{ab} + \int_a^\beta \frac{v^{\frac{2}{n}} dv}{\sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)}} \right] + - \frac{\omega}{\pi \sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}} \int_a^\beta \frac{\sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)} dv}{v^{\frac{n-2}{n}}(u-v)} \quad (56)$$

cu circulația

$$\Gamma = C_1 \sqrt{ab} + \int_a^\beta \frac{v^{\frac{2}{n}} dv}{\sqrt{(v-\alpha)(\beta-v)}} \quad (57)$$

3. Calcularea vitezei complexe a mișcării. În cazul a n aripioare viteza complexă e dată de integrala

$$W = \frac{nz^{n-1}}{\pi i} \int_a^b \frac{m(\xi) (\xi^{2n} - R^{2n}) d\xi}{(z^n - \xi^n) (z^n \xi^n - R^{2n})}$$

care după înlocuirile

$$z^n = \zeta; \quad \xi^n = u \quad a^n = \alpha \quad b^n = \beta \quad M(u) = m (\sqrt[n]{u}) u^{\frac{1-n}{n}}$$

devine

$$W = \frac{\zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi i} \int_a^\beta \frac{M(u) (u^2 - R^{2n}) du}{(\zeta - u) (\zeta u - R^{2n})} \quad (58)$$

unde $M(u)$ este soluția ecuației integrale (53).

Înlocuind pe $M(u)$ cu relația (54) relația (56) devine

$$W = \frac{\zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi i} \int_a^\beta \frac{\omega u (u^2 - R^{2n}) du}{\pi \sqrt{|h(u)|} (\zeta - u) (\zeta u - R^{2n})} \int_a^\beta \frac{(h^{2n} - v^2) v^{\frac{2}{n}} \sqrt{|h(v)|} dv}{v^2(u-v)(uv - R^{2n})}$$

$$-\frac{A \zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi^2 i} \int_a^\beta \frac{(u^2 - R^{2n}) du}{(\zeta - u)(\zeta u - R^{2n}) \sqrt{|h(u)|}} \quad (59)$$

Cu ajutorul reziduurilor sau din formula care rezolvă problema lui Dirichlet pentru semiplanul superior se pot deduce cu ușurință relațiile

$$\frac{\pi}{\sqrt{h(\zeta)}} = \int_a^\beta \frac{(R^{2n} - u^2) du}{(\zeta - u)(\zeta u - R^{2n}) \sqrt{|h(u)|}} \quad \text{și}$$

$$\int_a^\beta \frac{(R^{2n} - u^2) du}{(v - u)(uv - R^{2n}) \sqrt{|h(u)|}} = 0 \quad (60)$$

Intervertind integralele în expresia vitezei complexe și ținând seama de rezultatele (60) găsim formula finală

$$W = \frac{\omega \zeta^{\frac{2n-1}{n}}}{\pi i \sqrt{h(\zeta)}} \int_a^\beta \frac{(R^{2n} - v^2) v^{\frac{2}{n}} \sqrt{|h(v)|} dv}{v^2 (v - \zeta)(v \zeta - R^{2n})} + \frac{A \zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi i \sqrt{h(\zeta)}} \quad (61)$$

Pentru cazurile $n=1, 2, 4$ obținem expresiile

$$W_1 = -\frac{\omega i z}{\pi \sqrt{h(z)}} \int_a^b \frac{(R^2 - v^2) \sqrt{|h(v)|} dv}{(v - \zeta)(v \zeta - R^2)} + \frac{A}{\pi i \sqrt{h(z)}}$$

$$W_2 = -\frac{\omega i z^3}{\pi \sqrt{h(z^2)}} \int_a^{b^2} \frac{(R^4 - v^2) \sqrt{|h(v)|} dv}{v(v - z^2)(z^2 v - R^4)} + \frac{A z}{\pi i \sqrt{h(z^2)}} \quad (62)$$

$$W_4 = -\frac{\omega i z^7}{\pi \sqrt{h(z^4)}} \int_a^{b^4} \frac{(R^8 - v^2) v^{\frac{1}{2}} \sqrt{|h(v)|} dv}{v^2 (v - z^4)(v z^4 - R^8)} + \frac{A z^3}{\pi i \sqrt{h(z^4)}}$$

Ca și în cazul densității, vom obține la limită când $R \rightarrow \infty$, expresia vitezei în cazul mișcării din fluidul nelimitat

$$W = \frac{\omega i \zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi \sqrt{h(\zeta)}} \int_a^\beta \frac{\sqrt{|h(v)|} dv}{(v - \zeta) v^{\frac{n-2}{n}}} + \frac{\omega i \zeta^{\frac{n-1}{n}}}{\pi \sqrt{h(\zeta)}} \left[C_1 \sqrt{ab} + \int_a^\beta \frac{v^{\frac{2}{n}} dv}{\sqrt{|h(v)|}} \right] \quad (63)$$

4. Determinarea potențialului complex al mișcării. Notând cu $f(z, t)$ potențialul complex al mișcării, viteza complexă este

$$W = \frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{df}{d\zeta} n z^{n-1}$$

și de aici

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{\omega \zeta}{n \pi i \sqrt{h(\zeta)}} \int_a^\beta \frac{(R^{2n} - v^2) v^{\frac{2}{n}} \sqrt{|h(v)|} dv}{v^2 (v - \zeta)(v \zeta - R^{2n})} + \frac{A}{n \pi i \sqrt{h(\zeta)}}$$

Printr-o simplă integrare și o intervertire a ordinei de integrare obținem potențialul complex sub forma

$$f(z, t) = \frac{\omega}{n \pi i} \int_a^\beta \frac{(R^{2n} - v^2) v^{\frac{2}{n}} \sqrt{|h(v)|} dv}{v^2} \int_{\zeta_0}^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{(v - \zeta)(v \zeta - R^{2n}) \sqrt{|h(v)|}} \quad (64)$$

$$+ \frac{A}{n \pi i} \int_{\zeta_0}^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}}$$

BIBLIOGRAFIE

- G. Bertrand. *La théorie des marées et les équations intégrales*, Annales, Scient. de l'École Normale Sup. t. 58. 1923. p. 205.
 U. Cisotti. *Idrodinamica Piana I*. Milano, 1921.
 E. Carafoli. *Sur le mouvement autour d'une plaque en rotation*. C. R. Acad. Paris. 1927. t. 184. p. 804. și p. 933.
 B. Demtchenko. *Hydrodynamique des fluides*. 1933. Paris.
 B. Demtchenko. *Sur un problème mixte*. C. R. Acad. Paris 1930 t. 190 p. 415.
 M. Eichler. *Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern*. Mathematische Zeitschrift, Bd. 48. 1942, p. 503.
 P. Fatou. *Séries trigonométriques et séries de Taylor*. Acta Mathematica. T. 30. 1906, p. 335.
 M. Giqueaux. *Mécanique des fluides théoriques*. Paris et Liege. 1944.
 G. Hamel. *Integralgleichungen*. Berlin 1937.
 C. Jacob. *Sur l'écoulement fluide produit par la rotation d'un biplan „en tandem“ autour d'un axe situé dans son propre plan*. Mathematica. t. XIX. 1943, p. 106—118.
 C. Jacob. *Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites*. Thèses. 1935. Mathematica. t. XI. 1935, pp. 58—175.
 C. Jacob. *Recherches sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de plusieurs corps solides*. Disquisitiones Mathematicae et Physicae. t. III, f (3—4). 1943. pp. 207—247.
 C. Jacob. *Sur une équation intégrale singulière*. Mathematica, t. XXIII. 1948. p. 155.
 C. Jacob. *Sur un problème mixte pour le plan muni de coupures rectilignes alignées*. C. R. Acad. Paris. t. 226. 1949. p. 355.
 W. Kucharski. *Eine Integralgleichung für den rotierenden Schaufelstern und ihre Lösung*. Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik. Bd. 21 H. 2. 1941. pp. 65—79.

J. Legras. *Sur une équation intégrale à partie principale*. C. R. Acad. Sc. Paris. t. 206 (1937). p. 972.

J. Pérès. *Cours de Mécanique des fluides*, Paris. 1936.

E. Picard. *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la Physique mathématique*. Paris 1927.

J. Priwaloff. *Sur les fonctions conjuguées* Bull. de la Soc. Math. de France t. 44. 1916, p. 100.

J. Priwaloff. *Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques*. C. R. Acad. Paris. 1924. t. 178, p. 611.

A. Signorini. *Sur un problème mixte*. C. R. Acad. Paris, t. 190, 1930, p. 712.

H. Söngen. *Die Lösungen der Integralgleichung*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{\beta} \frac{f(\xi) d\xi}{x-\xi} \text{ und deren}$$

Anwendung in der Tragflügeltheorie. Mathematische Zeitschrift. Bd. 45. 1939. p. 245.

V. Vâlcovici. *Sur un problème mixte de Dirichlet*. Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roum. T. IV. 1915—16. p. 20.

V. Vâlcovici. *Sur un problème de Dirichlet*. Bull. de la Sect. Scient. de l'Acad. Roum. T. IV. 1915. p. 160.

V. Vâlcovici. *Sur la position du point d'arrêt dans le mouvement de rotation uniforme*. C. R. Acad. Paris, 1917. t. 165. p. 147.

V. Vâlcovici. *Sur le mouvement fluide autour d'un modérateur à ailettes*. Annales Scient. de l'Université de Jassy. t. X. 1920, p. 5 și p. 201.

V. Vâlcovici. *Sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de certains solides*. Bull. Scient. l'Ec. Polyt. Timisoara T. 2. 1929, pp. 199—237.

J. Vecua. *Sur les équations intégrales singulières contenant des intégrales aux sens de la valeur principale de Cauchy*. C. R. Acad. U.R.S.S. t. 1928. pp. 327—330.

H. Villat. *Mécanique des fluides*. Paris, 1930. Gauthier Villars.

H. Villat. *Leçons sur l'Hydrodynamique*. Paris, 1929. Gauthier Villars.

H. Villat. *Sur la résolutions de certaines équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*. Acta Mathematica. XL. 1916. p. 101.

J. Weissinger. *Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie*. Mathematische Zeitschrift. Bd. 47. 1941. p. 16—33.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей статье автор изучает текущее движение вокруг ротора с радиальными лопостями в случае неограниченного потока, или же ограниченного со стороны прямым круговым цилиндром.

Учитывая гипотезы упрощения, при которых совершается движение, а также граничные условия, автор находит следующие интегральные уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{\beta} \frac{M(u) du}{u-v} = \omega u^{\frac{2-n}{n}}$$

для неограниченного потока и

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{\beta} \frac{(u^2 - R^{2n}) M(u) du}{(v-u)(uv - R^{2n})} = \omega v^{\frac{2-n}{n}}$$

для ограниченного потока, который определяет неизвестную функцию $M(v)$; нахождение этой функции включает также в себе нахождение сложного потенциала.

Эти интегральные уравнения были решены при помощи сочетания смешанных задач по способу, применяемому К. Якобом.

Для первого уравнения автор рассматривает следующую смешанную задачу.

Определить функцию сложной переменной $F(z) = u + iv$, голоморфную в верхней полуплоскости, нулевую в бесконечности, ограниченную на оси ox , кроме точек $x = \alpha$; $x = \beta$, выполняющую на ox граничные условия

$$u = 0 \text{ re } (\infty, \alpha); (\beta, +\infty), \text{ а } v = g(x) \text{ гельдерово на } (\alpha, \beta).$$

Для второго уравнения автор рассматривает смешанную задачу.

Определить функцию $F(z) = u + iv$, голоморфную в области ограниченной окружностью с центром в происхождении и с сечением АВ на внутреннем относительно круга ox , так чтобы ее вещественная часть была нулевой на окружности, причем вообразаемая часть должна сводиться к заданной на отрезке АВ функции.

Решив эти интегральные уравнения, автор переходит к определению сложной скорости и сложного потенциала движения. Автор изучает в частности несколько простых случаев.

R É S U M É

Dans ce mémoire l'auteur se propose d'étudier l'écoulement fluide autour d'un rotateur à palettes radiales au cas d'un fluide illimité ou bien limité latéralement par un cylindre circulaire.

Tenant compte des hypothèses simplificatrices dans lesquelles se fait le mouvement, ainsi que des conditions aux limites, on trouve les équations intégrales

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{\beta} \frac{M(u) du}{v-u} = \omega v^{\frac{2-n}{n}} \quad \text{pour le fluide illimité}$$

et
$$\frac{1}{\pi} \int_a^{\beta} \frac{(u^2 - R^{2n}) M(u) du}{(v-u)(u - R^{2n})} = \omega v^{\frac{2-n}{n}} \quad \text{pour le fluide limité}$$

déterminant la fonction inconnue $M(u)$, dont la connaissance implique celle du potentiel complexe.

La résolution de ces équations intégrales est faite en leur associant des problèmes mixtes, suivant la méthode utilisée par. M. C. J a c o b.

Déterminer une fonction de variable complexe $F(z)=u+iv$ holomorphe dans le demiplan supérieur, nulle à l'infini, bornée sur l'axe ox sauf peut-être aux points $x=\alpha$, $x=\beta$ qui remplisse sur ox les conditions aux limites

$u=0$ sur $(-\infty, \alpha)$; $(\beta, +\infty)$ et $v=g(x)$, $g(x)$ étant hölderienne sur (α, β) .

Pour la seconde équation on a considéré le problème mixte:

Déterminer une fonction $F(z)=u+iv$ holomorphe dans le domaine limité par une circonférence de centre l'origine et une coupure AB de l'axe ox , dont la partie réelle est nulle sur le cercle, la partie imaginaire se réduisant à une fonction donnée sur le segment AB .

Ces équations intégrales étant résolues on passe ensuite à la détermination de la vitesse complexe et du potentiel complexe du mouvement; quelques cas simples sont étudiés spécialement.