

OBSERVAȚII ASUPRA UNOR PROCEDEE DE
 INTERPOLARE GENERALIZATE

DE

ELENA MOLDOVAN

Comunicare prezentată de academician GR. C. MOISIL în ședința din 11 ianuarie 1954

1. În această Comunicare ne ocupăm de evaluarea aproximației cu care anumite procedee de interpolare generalizate pot să reprezinte o funcție continuă într-un interval dat.

Să considerăm sistemul de noduri de interpolare

$$x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

situate în intervalul $[a, b]$. Fie de asemenea dat sistemul de funcții

$$\varphi_{n,1}(x), \varphi_{n,2}(x), \dots, \varphi_{n,n}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

definite în intervalul $[a, b]$. Putem construi următorul procedeu de interpolare generalizat

$$I_n(f; x) = \sum_{i=1}^n f(x_{n,i}) \varphi_{n,i}(x) \quad (3)$$

unde $f(x)$ este o funcție definită în $[a, b]$. Procedeu de interpolare (3) se zice că este convergent dacă are loc relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f; x) = f(x), \text{ uniform pentru } x \in [a, b] \quad (4)$$

oricare ar fi funcția $f(x)$, continuă în intervalul $[a, b]$.

Un exemplu de procedeu de interpolare de forma (3) este procedeu de interpolare a lui Lagrange,

$$L_n(f; n) = \sum_{i=1}^n f(x_{n,i}) l_{n,i}(x), \quad (5)$$

unde am notat cu $l_{n,i}(x)$ polinoamele fundamentale cunoscute. Prin procedeu de interpolare (5) se atașează funcției $f(x)$, un polinom de grad $\leq n-1$, care coincide cu funcția $f(x)$ în cele n noduri. Se știe *) că oricum s-ar alege

*) Teorema lui G. Faber și S. N. Bernstein.

sistemul de noduri (1), există o funcție continuă în intervalul $[a, b]$, astfel ca relația (4) să nu aibă loc. Deci procedeul de interpolare al lui Lagrange nu este un procedeu convergent.

L. Fejér [1] a arătat că dacă sistemul (1) de noduri este un sistem normal*), se pot construi polinoamele

$$F_n(f; x) = \sum_{i=1}^n f(x_{n,i}) \left[1 - \frac{\omega_n''(x_{n,i})}{\omega_n'(x_{n,i})} (x - x_{n,i}) \right] (l_{n,i}(x))^2, \quad n=1, 2, \dots, \quad (6)$$

așfel că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f; x) = f(x), \text{ uniform pentru } x \in [a, b],$$

oricare ar fi funcția $f(x)$, continuă în intervalul $[a, b]$.

În (6) s-a notat $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_{n,i})$, iar $l_{n,i}(x)$ sînt polinoamele fundamentale ale lui Lagrange. Polinoamele $F_n(f; x)$ au gradul $\leq 2n - 1$ și coincid cu funcția $f(x)$ în cele n noduri.

Se știe [2] că dacă se iau ca noduri rădăcinile polinomului $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$,

$$x_{n,i} = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

aproximația obținută prin procedeul de interpolare (6) al lui L. Fejér, este cel puțin de ordinul lui $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\omega(\delta)$ fiind modulul de oscilație al funcției $f(x)$, presupusă continuă în întreg intervalul $[a, b]$. Printr-o aranjare convenabilă a calculelor, se poate arăta că acest rezultat poate fi precizat.

Nodurile de interpolare fiind punctele (7), polinomul lui L. Fejér are forma

$$F_n(f; x) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n f(x_{n,i}) (1 - x \cdot x_{n,i}) \frac{T_n^2(x)}{(x - x_{n,i})^2}. \quad (8)$$

Ținînd seama de proprietatea

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (1 - x \cdot x_{n,i}) \frac{T_n^2(x)}{(x - x_{n,i})^2} = 1,$$

avem

$$|f(x) - F_n(f; x)| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |f(x) - f(x_{n,i})| |1 - x x_{n,i}| \frac{T_n^2(x)}{(x - x_{n,i})^2}.$$

Aplicînd proprietățile cunoscute ale modulului de oscilație, putem scrie

$$|f(x) - F_n(f; x)| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \omega(|x - x_{n,i}|) |1 - x x_{n,i}| \frac{T_n^2(x)}{(x - x_{n,i})^2}.$$

*) Sistemul (1) se numește normal, dacă în orice punct al intervalului $[a, b]$ pentru orice valoare a lui i are loc inegalitatea

$$1 - \frac{\omega_n''(x_{n,i})}{\omega_n'(x_{n,i})} (x - x_{n,i}) \geq 0.$$

Se știe [2] că este suficient să evaluăm pe

$$A_n = \sup_{[-1,1]} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |x - x_{n,i}| |1 - x x_{n,i}| \frac{T_n^2(x)}{(x - x_{n,i})^2}, \quad (9)$$

deoarece

$$|f(x) - F_n(f; x)| \leq 2 \omega(A_n). \quad (10)$$

Făcînd înlocuirea $x = \cos \theta$ și $x_{n,i} = \cos \theta_i$, putem scrie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |\cos \theta - \cos \theta_i| |1 - \cos \theta \cos \theta_i| \left[\frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} \right]^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |\theta - \theta_i| |1 - \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i| \left[\frac{\cos n\theta - \cos n\theta_i}{\cos \theta - \cos \theta_i} \right]^2 \end{aligned} \quad (11)$$

deoarece $\sin \theta \sin \theta_i \geq 0$, θ și θ_i fiind arce cuprinse între 0 și π , iar $\cos n\theta_i = 0$. Aplicînd relații elementare cunoscute, membrul al doilea al inegalității (11) se mai poate scrie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |\theta - \theta_i| \left| 2 \sin^2 \frac{\theta + \theta_i}{2} \right| \left[\frac{2 \sin \frac{n(\theta + \theta_i)}{2} \sin \frac{n(\theta_i - \theta)}{2}}{2 \sin \frac{\theta + \theta_i}{2} \sin \frac{\theta_i - \theta}{2}} \right]^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n |\theta - \theta_i| \left[\frac{\sin \frac{n(\theta_i - \theta)}{2}}{\sin \frac{\theta_i - \theta}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Dar se știe [3] că

$$\frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n |\theta - \theta_i| \left[\frac{\sin \frac{n(\theta_i - \theta)}{2}}{\sin \frac{\theta_i - \theta}{2}} \right]^2 \leq \frac{\pi}{n} \log n.$$

Ținînd deci seama de (10), avem

$$|f(x) - F_n(f; x)| \leq 2\pi \omega\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad (12)$$

$f(x)$ fiind o funcție continuă în intervalul $[-1, 1]$, în care sînt situate nodurile (7).

Se arată că evaluarea obținută nu mai poate fi îmbunătățită. Într-adevăr, pentru $f(x) = |x|$, presupunînd pe n par avem

$$|F_n(|x|; 0)| = \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |x_{n,i}| \frac{1}{x_{n,i}^2} \right|. \quad (13)$$

Făcînd în (13) schimbarea $x = \cos \theta$, $x_i = \cos \theta_i$, avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \left| \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right| \frac{1}{\cos^2 \theta_i} &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\cos \theta_i} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)} = \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sin \frac{n-2i+1}{2n} \pi} \geq \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2n}{(n-2i+1)\pi} > \frac{2}{\pi n} \log n, \end{aligned}$$

ceea ce dovedește că evaluarea (12) nu mai poate fi îmbunătățită.

2. Un alt procedeu de interpolare generalizat, este acela al lui S. N. Bernstein

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} \cdot (1-x)^{n-i} x^i. \quad (14)$$

Se știe că prin procedeul (14), $f(x)$ fiind o funcție continuă în intervalul $[0, 1]$, se obține o aproximație de ordinul lui $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, deci mai slabă decît

în cazul procedurii lui L. Fejér.

Modificînd procedeul (14), înlocuind polinoamele

$$\lambda_i = \left(\frac{n}{i}\right) (1-x)^{n-i} x^i \text{ după cum urmează}$$

$$\begin{cases} l_i(x) = \frac{\lambda_{i-1}(x) + 2\lambda_i(x) + \lambda_{i+1}(x)}{4} & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ l_0(x) = \frac{3\lambda_0(x) + \lambda_1(x)}{4} \\ l_n(x) = \frac{\lambda_{n-1}(x) + 3\lambda_n(x)}{4} \end{cases} \quad (14')$$

se obține un nou procedeu de interpolare

$$B_n^*(f; x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) l_i(x). \quad (15)$$

Pentru a evalua ordinul aproximației obținute prin (15) ne folosim de proprietatea

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$$

și

$$\sum_{i=0}^n \left| x - \frac{i}{n} \right| l_i(x) \leq \sqrt{\sum_{i=0}^n \left(x - \frac{i}{n} \right)^2 l_i(x)}$$

Prin calcule simple obținem

$$\sum_{i=0}^n i l_i(x) = \frac{1}{4} (4nx + \lambda_0(x) - \lambda_n(x))$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 l_i(x) = \frac{1}{4} [4nx(nx+1-x) - (2n+1)\lambda_n(x) - \lambda_0(x) + 2].$$

Înlocuind în (16) obținem

$$\sum_{i=0}^n \left(x - \frac{i}{n} \right)^2 l_i(x) \leq \frac{n+2}{4n^2},$$

de unde rezultă, ținînd seama de (16), că ordinul aproximației obținute prin procedeul (15), nu este mai slab decît în cazul procedurii inițial (14)

$$|f(x) - B_n^*(f; x)| \leq 2\omega\left(\sqrt{\frac{n+2}{4n^2}}\right). \quad (17)$$

Prin urmare, n-ar fi lipsită de interes căutarea unei modificări analoge, care ar permite îmbunătățirea ordinului aproximației obținute prin procedeul lui S. N. Bernstein.

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ПРИЕМАХ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении указывается, что приближение, достигнутое посредством полиномов Л. Фежера (6), для непрерывных функций $[-1, 1]$, где узлы представляют собой точки (7), является порядка $\omega\left(\frac{\log n}{n}\right)$, $\omega(\delta)$ будучи модулем изменений функции $f(x)$; большего уточнения полученного результата не может быть достигнуто. Автор указывает также, что порядок приближения, полученного посредством полинома С. Н. Бернштейна (14), остается тем же после изменения (14').

OBSERVATIONS SUR CERTAINS PROCÉDÉS D'INTERPOLATION GÉNÉRALISÉS

(RÉSUMÉ)

On démontre que l'approximation donnée par les polynômes (6) de L. Fejér, les noeuds étant les points (7), est de l'ordre de $\omega\left(\frac{\log n}{n}\right)$, $\omega(\delta)$ étant le module d'oscillation de la fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle $[-1, 1]$. Ce résultat ne peut pas être amélioré. On obtient ensuite l'évaluation (17) pour le procédé d'interpolation (15).

BIBLIOGRAFIE

1. L. Fejér, Math. Ann., 1930, nr. 102, p. 707—725.
2. T. Popoviciu, *Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrass cu ajutorul potențialelor de interpolare*, în *Lucrările Sesiunii generale științifice din 2—12 iunie 1950*. Ed. Acad. R.P.R., 1951.
3. N. Krilov, Bull. Sc. Math., 1917, nr. 41, p. 309—320.