

10.

ASUPRA UNOR FORMULE GENERALE DE INTEGRARE NUMERICĂ

DE

D. D. STANCU

1. În această lucrare vom da o metodă pentru calculul coeficienților formulelor de integrare numerică care în general folosesc noduri multiple. La elaborarea acestora am ajuns folosindu-ne de formula de interpolare a lui Lagrange-Hermite, căreia i-am consacrat recent lucrarea [1], precum și de două lucrări ale lui L. Ciakalo v [2], [3].

2. Să considerăm o funcție $f(x)$ despre care presupunem că este definită într-un interval (a, b) — finit sau infinit — și care admite în acest interval derivatele ce vor interveni în formulele din această lucrare. Să notăm cu $u(x)$ polinomul de gradul n cu rădăcini reale

$$u(x) = \prod_{i=1}^s (x - x_i)^{r_i}, \quad (1)$$

unde r_i ($i = 1, s$) sînt numere naturale, iar $n = r_1 + r_2 + \dots + r_s$.

Polinomul de interpolare de grad minim relativ la funcția $f(x)$ și rădăcinile polinomului $u(x)$ se știe că există și că este unic; acest polinom, care e de gradul $n - 1$, este polinomul $H_{n-1}(x; f)$ al lui Lagrange-Hermite, determinat de condițiile

$$H_{n-1}^{(k)}(x_i; f) = f^{(k)}(x_i), \quad (k = 0, 1, \dots, r_i - 1; i = 1, 2, \dots, s). \quad (2')$$

După cum se știe, el este de forma

$$H_{n-1}(x; f) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} l_{i,k}(x) f^{(k)}(x_i), \quad (2)$$

unde polinoamele $l_{i,k}(x)$, numite polinoamele fundamentale de interpolare, au gradul cel mult $n - 1$.

O expresie pentru acest polinom a fost dată de V. L. Gonciarov [4]. În lucrarea [1] am arătat o cale foarte simplă prin care se poate obține formula dată în [4]; de asemenea am stabilit și alte expresii mai explicite pentru polinomul $H_{n-1}(x; f)$.

3. Dacă se introduce notațiile

$$u_i(x) = \frac{u(x)}{(x-x_i)^{r_i}} = (x-x_1)^{r_1} (x-x_2)^{r_2} \dots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \dots (x-x_s)^{r_s}, \quad (3)$$

expresiile date de Gonciarov pentru polinoamele fundamentale de interpolare sînt

$$l_{i,k}(x) = \frac{(x-x_i)^k}{k!} \sum_{j=0}^{r_i-k-1} \left[\frac{(x-x_i)^j}{j!} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)^{(j)} \right] u_i(x), \quad (4)$$

unde am folosit notația

$$\left[v(t) \right]_{t=t_0}^{(p)} = \left[\frac{d^p v(t)}{dt^p} \right]_{t=t_0}.$$

În lucrarea [1] am dat următoarea expresie explicită pentru aceste polinoame

$$l_{i,k}(x) = \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left[\sum_{j=0}^{r_i-k-1} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s}^{(j)} (x-x_i)^j \right] \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)}, \quad (5)$$

unde

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s}^{(j)} = \sum \frac{\binom{r_1+\alpha_1-1}{\alpha_1} \dots \binom{r_s+\alpha_s-1}{\alpha_s}}{(x_1-x_i)^{\alpha_1} \dots (x_s-x_i)^{\alpha_s}};$$

suma aceasta se extinde la toate sistemele de întregi nenegativi care verifică relația $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_s = j$, iar liniuța indică absența factorilor cu toți indicii i .

4. Formula de interpolare prin polinomul lui Lagrange-Hermite este, după cum e bine cunoscută, următoarea

$$f(x) = H_{n-1}(x; f) + R(x; f), \quad (6)$$

unde $R(x; f)$, numit termenul complementar sau restul acestei formule, are expresia

$$R(x; f) = u(x) [x, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{x_s, \dots, x_s}_{r_s}; f]^{**}. \quad (7)$$

*) În lucrarea [1] am mai atras atenția că expresiile date pentru $l_{i,k}(x)$ de către G. Zelen [5] sînt inexacte dacă $r_i > 2$ iar $s \geq 2$. Formulele date de acest autor în partea a doua a lucrării sale, relative la descompunerea unei funcții raționale, sînt în consecință de asemenea inexacte.

**) Paranteza dreaptă [...] reprezintă diferența divizată relativă la funcția $f(x)$ și punctele puse în evidență.

5. Să ne folosim de formula (6) pentru calculul numeric al integralei

$$I = \int_a^b p(x) f(x) dx, \quad (8)$$

unde $p(x)$ este o funcție dată, integrabilă în (a, b) .

Vom obține următoarea formulă generală de integrare numerică (de cuadratură)

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} A_{i,k} f^{(k)}(x_i) + \rho[f], \quad (9)$$

ai cărei coeficienți și rest sînt dați de formulele

$$A_{i,k} = \int_a^b p(x) l_{i,k}(x) dx, \quad (10)$$

$$\rho[f] = \int_a^b p(x) R(x; f) dx. \quad (11)$$

6. În vederea obținerii unor noi evaluări pentru coeficienții formulei generale de integrare numerică de la (9) să introducem funcțiile ajutătoare

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{u_i(x)} \int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x - t} dt, \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (12)$$

unde t e o variabilă independentă de x .

Să calculăm derivata de ordinul $r_i - k - 1$, în punctul x_i , a funcției $\varphi_i(x)$; folosind formula lui Leibniz se obține

$$\varphi_i^{(r_i-k-1)}(x) = \sum_{j=0}^{r_i-k-1} \binom{r_i-k-1}{j} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)^{(j)} \left[\int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x - t} dt \right]^{(r_i-k-j-1)}. \quad (13)$$

Avînd în vedere că

$$\left[\int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x - t} dt \right]^{(p)} = \sum_{v=0}^p \binom{p}{v} \int_a^b p(t) \left(\frac{1}{x - t} \right)^{(v)} [u(x) - u(t)]^{(p-v)} dt$$

și că dacă $x = \alpha$ e rădăcină de ordinul r a lui $u(x)$, unde $r > p$, avem

$$\left[\int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x - t} dt \right]_{x=\alpha}^{(p)} = - \int_a^b p(t) \left(\frac{1}{x - t} \right)_{x=\alpha}^{(p)} u(t) dt = n! \int_a^b \frac{p(t) u(t) dt}{(t - \alpha)^{p+1}},$$

rezultă că

$$\left[\int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{t - x} dt \right]_{x=x_i}^{(r_i-k-j-1)} = (r_i - k - j - 1)! \int_a^b \frac{p(x) u(x) dx}{(x - x_i)^{r_i-k-j}}.$$

Ținând seama de aceste formule putem scrie

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(r_i-k-1)}(x_i) &= (r_i-k-1)! \sum_{j=0}^{r_i-k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)^{(j)} \int_a^b \frac{p(x) u(x) dx}{(x-x_i)^{r_i-k-j}} = \\ &= (r_i-k-1)! \int_a^b \frac{p(x) u(x)}{(x-x_i)^{r_i-k}} \left[\sum_{j=0}^{r_i-k-1} \frac{(x-x_i)^j}{j!} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)^{(j)} \right] dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Din formulele (4), (10) și (14) rezultă pentru coeficienții formulei (9) următoarele expresii — care ni se par interesante și utile —

$$A_{i,k} = \frac{1}{k! (r_i-k-1)!} \varphi_i^{(r_i-k-1)}(x_i), \quad (15)$$

$$(k = 0, 1, \dots, r_i - 1; i = 1, 2, \dots, s).$$

7. Folosind polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite (2), se poate obține în mod efectiv descompunerea în fracții simple a unei funcții raționale

$$R(x) = \frac{h(x)}{u(x)}, \quad (16)$$

în cazul general cînd $u(x)$ e polinomul de la (1), iar $h(x)$ e un polinom de grad mai mic decît n . De altfel, după cum s-a putut vedea și în lucrarea [1], există o echivalență între aceste două probleme: a determina polinomul $H_{n-1}(x; f)$ care verifică condițiile (2') și a descompune funcția rațională (16) în fracții simple.

Se știe că $R(x)$ se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$R(x) = \frac{h(x)}{u(x)} = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{B_{i,k}}{(x-x_i)^{k+1}}. \quad (17)$$

Scriind polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite relativ la funcția $h(x)$ și la rădăcinile polinomului de la (1) se obține

$$H_{n-1}(x; h) = h(x),$$

căci $h(x)$ are, prin ipoteză, gradul mai mic decît n — gradul polinomului $u(x)$.

Din această cauză se găsesc pentru coeficienții dezvoltării (17) următoarele expresii

$$B_{i,k} = \sum_{j=0}^{r_i-k-1} \frac{h^{(j)}(x_i)}{j! (r_i-k-j-1)!} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)^{(r_i-k-j-1)}_{x=x_i} = \frac{1}{(r_i-k-1)!} \left(\frac{h(x)}{u_i(x)} \right)^{(r_i-k-1)}_{x=x_i}. \quad (18)$$

8. Să alegem acum

$$h(x) = \int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x-t} dt. \quad (19)$$

Pentru coeficienții dezvoltării (17), în cazul particular de la (19), se obțin — dacă avem în vedere formulele (12) și (18) — următoarele expresii

$$B'_{i,k} = \frac{1}{(r_i-k-1)!} \varphi_i^{(r_i-k-1)}(x_i). \quad (20)$$

Comparînd formulele (15) și (20) se găsesc următoarele relații între coeficienții formulei generale de integrare numerică (9) și coeficienții dezvoltării în fracții simple de la (17), în cazul particular (19),

$$A_{i,k} = \frac{1}{k!} B'_{i,k}. \quad (21)$$

Acest rezultat interesant se datorește*) lui L. C i a k a l o v [2], [3].

9. Acum vom prezenta o extensiune a rezultatelor principale obținute mai sus la cazul a două variabile.

Să considerăm o funcție $f(x, y)$ definită și cu derivate parțiale, pînă la ordinele de care vom avea nevoie mai jos, într-un interval bidimensional D dat de inegalitățile

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d. \quad (22)$$

Fie $x_1, x_2, \dots, x_s$ puncte distincte din intervalul (a, b) și $y_1, y_2, \dots, y_r$ puncte distincte din (c, d) .

Să considerăm polinoamele

$$u(x) = \prod_{i=1}^s (x-x_i)^{r_i}, \quad v(y) = \prod_{k=1}^r (y-y_k)^{s_k}. \quad (23)$$

Vom defini acum o rețea dreptunghiulară de noduri care se obțin prin intersecția următoarelor drepte paralele cu axele de coordonate

$$x = x_i (i = \overline{1, s}), \quad y = y_k (k = \overline{1, r}).$$

Ordinele de multiplicitate ale acestor drepte se presupune că sînt date respectiv de ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor polinoamelor de la (23).

Formula de interpolare a lui Lagrange-Hermite relativă la funcția $f(x, y)$ și rețeaua de noduri definită mai sus este

$$f(x, y) = L(x, y; f) + R(x, y; f), \quad (24)$$

unde

$$\begin{aligned} L(x, y; f) &= L \left(\begin{matrix} x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots, x_s, \dots, x_s \\ y_1, \dots, y_1, y_2, \dots, y_2, \dots, y_r, \dots, y_r \end{matrix}; f \right) \Big|_y^x = \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} \sum_{j=1}^r \sum_{\mu=0}^{s_j-1} l_{i,k}(x) h_{j,\mu}(y) \left(\frac{\partial^{k+\mu} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^\mu} \right) \Big|_{y=y_j}^{x=x_i}, \end{aligned} \quad (25)$$

*) În cazul $r_1 = r_2 = \dots = r_s = 1$ formula (21) a fost obținută de E. B. C h r i s t o f f e l [6], care de asemenea a folosit funcția $h(x)$ de la (19).

$l_{i,k}(y)$ fiind dat de formula (4), iar $h_{v,\mu}(y)$ de următoarea

$$h_{v,\mu}(y) = \frac{(y - y_v)^\mu}{\mu!} \sum_{l=0}^{s_v - \mu - 1} \left[\frac{(y - y_v)^l}{l!} \left(\frac{1}{v_v(y)} \right)^{(l)} \right] v_v(y), \quad (26)$$

cu

$$v_v(y) = \frac{v(y)}{(y - y_v)^{s_v}}.$$

Restul formulei (24) se poate pune ([7], [8]) sub forma

$$\begin{aligned} R(x, y; f) = & u(x) [x, x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots, x_s, \dots, x_s; f(x, y)] + \\ & + v(y) [y, y_1, \dots, y_1, y_2, \dots, y_2, \dots, y_r, \dots, y_r; f(x, y)] - \\ & - u(x) v(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, \dots, x_s, \dots, x_s \\ y, y_1, \dots, y_1, y_2, \dots, y_2, \dots, y_r, \dots, y_r \end{matrix}; f(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

10. Dacă ne folosim de formula (24) pentru calculul numeric al integralei duble

$$J = \iint_D p(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (28)$$

unde funcția pondere este de forma $p(x, y) = p(x) q(y)$, se obține formula de integrare numerică (de cubatură)

$$J = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{r_i-1} \sum_{v=1}^r \sum_{\mu=0}^{s_v-1} A_{i,k,v,\mu} \left[\frac{\partial^{k+\mu} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^\mu} \right]_{x=x_i}^{x=x_i} + r(f),$$

unde

$$A_{i,k,v,\mu} = a_{i,k} b_{v,\mu},$$

$$a_{i,k} = \int_a^b p(x) l_{i,k}(x) dx, \quad b_{v,\mu} = \int_c^d q(y) h_{v,\mu}(y) dy,$$

iar

$$r(f) = \iint_D p(x, y) R(x, y; f) dx dy.$$

11. Introducând funcțiile

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{u_i(x)} \int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x - t} dt, \quad \psi_v(y) = \frac{1}{v_v(y)} \int_c^d q(\tau) \frac{v(y) - v(\tau)}{y - \tau} d\tau,$$

se obțin pentru coeficienții formulei de cubatură (28) următoarele expresii

$$\begin{aligned} a_{i,k} = & \frac{1}{k! (r_i - k - 1)!} \varphi_i^{(r_i - k - 1)}(x_i), \quad b_{v,\mu} = \frac{1}{\mu! (s_v - \mu - 1)!} \psi_v^{(s_v - \mu - 1)}(y_v), \\ & (k = 0, 1, \dots, r_i - 1; i = 1, 2, \dots, s; \mu = 0, 1, \dots, s_v - 1; \\ & v = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

Cluj, 15 august 1957.

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Используя интерполяционную формулу Лагранжа-Эрмита и вспомогательные функции (12), автор приводит для вычисления коэффициентов общей квадратурной формулы (9) формулы (15).

Разложив на основании той же интерполяционной формулы полином $h(x)$ меньшей степени, чем n , где $n = r_1 + \dots + r_s$, весьма легко получить выражения (18) для коэффициентов $B_{i,k}$ разложения на простые дроби (17). Для частного случая (19) получены для коэффициентов этого разложения оценки (20). При сопоставлении формулы (15) и (20) найдены интересные соотношения (21) Л. Чакалова [2], [3].

В §§ 9—10 приведено обобщение предыдущих результатов на случай двух переменных.

SUR CERTAINES FORMULES GÉNÉRALES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

RÉSUMÉ

A l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange-Hermite et des fonctions auxiliaires (12), l'auteur a donné, pour le calcul des coefficients de la formule générale de quadrature (9), les formules (15).

Suivant cette même formule d'interpolation, il développe le polynôme $h(x)$ de degré plus petit que n — où $n = r_1 + \dots + r_s$ — et obtient très facilement les expressions (18) pour les coefficients $B_{i,k}$ du développement en fractions simples (17). Pour le cas particulier (19), les évaluations (20) sont obtenues pour les coefficients de ce développement. La comparaison des formules (15) et (20) a permis de trouver les relations si intéressantes (21), données par Tchakaloff dans [2] et [3].

Dans les nos 9 et 10, l'auteur donne une extension des résultats précédents au cas de deux variables.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. D. STANCU, *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite și a unor aplicații ale acesteia. Studii și cercetări de matematică și fizică*, Cluj, 2 (1957) (sub tipar).
2. L. N. CHAKALOV (Tchakaloff), *Über eine allgemeine Quadraturformel*. C. R. Acad. Bulgare des Sciences, 1, 2—3, 9—12 (1948).
3. — *Ob odnoi obščei kvadraturnoi formule*. DAN SSSR, 68, 233—236 (1949).
4. V. L. GONCHAROV, *Teoria interpolirovania i približenia funkčii*. Moscova (1954).

5. G. ZEMPLEN, *Etude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles*. Archiv. d. Math. u. Physik, 8, 214—226 (1905).
6. E. B. CHRISTOFFEL, *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*. Journ. f. reine u. angew. Math., 55, 61—82 (1858).
7. D. D. STANCU, *O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcțiile de două variabile*. Studii și cercetări de matematică și fizică, Cluj (sub tipar).
8. — *Considerații asupra interpolării polinomiale a funcțiilor de mai multe variabile*. Buletinul Universităților „Babeș” și „Bolyai”, Seria științele naturii, 1—2 (1957).